Časopis pro pěstování matematiky

Václav Pecina

O jedné existenční větě n-rozměrné centrální axonometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 426--430

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117729

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O JEDNÉ EXISTENČNÍ VĚTĚ n-ROZMĚRNÉ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

(Došlo dne 22. května 1970)

Označme E^n n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor a $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ lineární obal lineárních prostorů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Budeme dále užívat označení a pojmů zavedených v [5]; připomeňme však alespoň následující definici:

Nechť k, n jsou přirozená čísla ($2 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 3$). n-ramennou, k-rozměrnou polyedrickou konfigurací $K_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$ rozumíme konfiguraci navzájem různých bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, jestliže:

1) O, A_i, B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) je trojice kolineárních bodů, body O, A_i jsou vlastní.

2) Pro přímky $x_i = OA_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) platí $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E^k$.

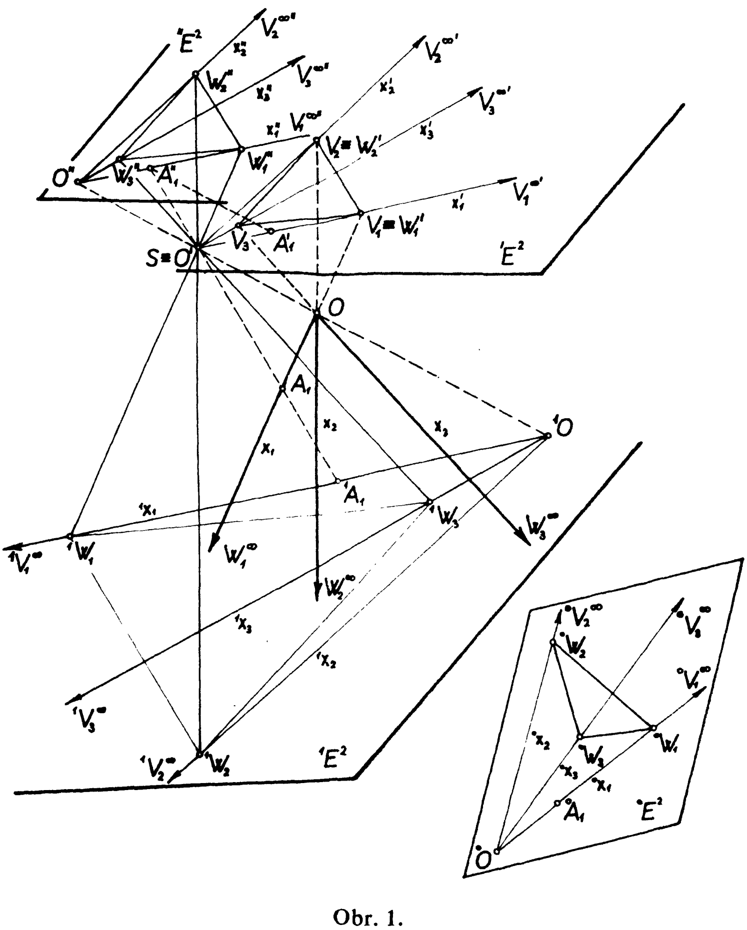
Jsou-li dány konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$ a ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ (přičemž $(OA_iB_i) \neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 3$) a jsou-li $S^{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ resp. ${}^0S^{n-1}({}^0W_1, {}^0W_2, \ldots, {}^0W_n)$ simplexy tvořené úběžníky $V_i({}^0W_i)$ přímek $x_i({}^0x_i)$ v projektivnostech bodových řad $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak podobnost simplexů S^{n-1} a ${}^0S^{n-1}$ je nutnou a postačující podmínkou pro existenci takové centrální projekce $\mathscr{P}$ (z bodu do nadroviny v E^n), v níž je $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$ (viz [2], [5]).

Jsou-li dány dvě libovolné konfigurace K_n^n a ${}^0K_n^{n-1}$, nemusí být $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$, a nelze tedy vždy dosáhnout toho, aby centrální projekcí konfigurace K_n^n byla konfigurace shodná s konfigurací ${}^0K_n^{n-1}$; přiřazením odpovídajících si vrcholů simplexů ${}^0S^{n-1}$ a S^{n-1} je však stanovena jistá afinita $\mathscr{A} : {}^0E^{n-1} \to {}'E^{n-1}$. Budeme se dále zabývat souvislostí této afinity s centrální projekcí konfigurace K_n^n a konfigurací ${}^0K_n^{n-1}$.

Věta 1. *Nechť jsou dány konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$, ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ ($n \geqq 3$) *a nechť* $(OA_iB_i) \neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Nechť* $V_i({}^0W_i)$ *je úběžník přímky* $x_i({}^0x_i)$ *v projektivnosti bodových řad* $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *a* $L({}^0W_1, {}^0W_2, \ldots, {}^0W_n) = {}^0E^{n-1}$. *Označme* ${}'E^{n-1} = L(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ *a* $\mathscr{A}$ *afinitu* ${}^0E^{n-1} \to {}'E^{n-1}$, *stanovenou přiřazením* ${}^0W_i \to V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pak existuje vlastní nadrovina ${}^1E^{n-1} \subset E^n$ *a vlastní bod* $S \in E^n$ $(S \notin {}^1E^{n-1})$, *jež tvoří basi* $[S, {}^1E^{n-1}]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* E^n *tak, že* $\mathscr{P}(K_n^n) \cong \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$.

Důkaz (obr. 1 pro $n = 3$). Sestrojme v nadrovině $'E^{n-1}$ konfiguraci $\mathscr{A}({}^0K_n^{n-1}) = {}'K_n^{n-1} \equiv \{O', A'_i, B'_i\}$ a zvolme $S = \mathscr{A}({}^0O)$ za střed (S je nutně vlastní bod, $S \subset {}'E^{n-1} \subset E^n$) a libovolnou (vlastní) nadrovinu ${}^1E^{n-1}$ $({}^1E^{n-1} \neq {}'E^{n-1},\ {}^1E^{n-1} \subset E^n)$



Obr. 1.

rovnoběžnou s $'E^{n-1}$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}$ v E^n. Sestrojme dále konfiguraci $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Pro $x'_i = O'A'_i = \mathscr{A}({}^0x_i)$, ${}^1x_i = {}^1O\,{}^1A_i = \mathscr{P}(x_i)$ platí $x'_i \parallel {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (je totiž $\mathscr{A}({}^0V_i^\infty) = \mathscr{P}(V_i) = {}^1V_i^\infty \in {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Vezměme nyní translaci $\mathscr{T} : E^n \to E^n$, určenou vektorem $\overrightarrow{OS}$ a označme $''E^{n-1} = \mathscr{T}('E^{n-1})$, $''K_n^{n-1} \equiv \{O'', A''_i, B''_i\} = \mathscr{T}('K_n^{n-1})$. Poněvadž $\mathscr{P}(W_i^\infty) = {}^1W_i \in {}^1x_i$, je zřejmě $\mathscr{T}(x_i) = S\,{}^1W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a jistě je $''K_n^{n-1} \cong {}'K_n^{n-1}$. Dokážeme dále, že

$\mathscr{P}(K_n^n) = \mathscr{P}({}''K_n^{n-1})$. Poněvadž $W_i'' = \mathscr{T}\mathscr{A}({}^0W_i) \in S^1W_i$, je $\mathscr{P}(W_i'') = {}^1W_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, a vzhledem k $x_i'' = O''W_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $\mathscr{P}(O'') = {}^1O$, je $\mathscr{P}(x_i'') = {}^1x_i = \mathscr{P}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Poněvadž $A_i'' \in x_i''$, $B_i'' \in x_i''$, je $\mathscr{P}(A_i'') = {}^1A_i^* \in {}^1x_i$ a $\mathscr{P}(B_i'') = {}^1B_i^* \in {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Projekce $\mathscr{P}$ zachovává dvojpoměr a tedy $(OA_iV_iW_i^\infty) = ({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^\infty{}^1W_i)$. Z projektivnosti bodových řad $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$ plyne $(OA_iV_iW_i^\infty) = ({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^\infty{}^0W_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy

$$({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^\infty{}^0W_i) = ({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^\infty{}^1W_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Poněvadž ${}^1A_i^* = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0A_i)$, ${}^1O = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0O)$, ${}^1V_i^\infty = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0V_i^\infty)$, ${}^1W_i = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0W_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^\infty{}^0W_i) = ({}^1O{}^1A_i^*{}^1V_i^\infty{}^1W_i) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne $({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^\infty{}^1W_i) = ({}^1O{}^1A_i^*{}^1V_i^\infty{}^1W_i)$ a odtud ${}^1A_i^* = {}^1A_i = \mathscr{P}(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Analogicky ${}^1B_i^* = {}^1B_i = \mathscr{P}(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $\mathscr{P}(K_n^n) = \mathscr{P}({}''K_n^{n-1})$.

Poněvadž konfigurace ${}''K_n^{n-1}$ a $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^{n-1}$ leží v rovnoběžných nadrovinách, jsou podobné. Protože ${}''K_n^{n-1} \cong {}'K_n^{n-1}$, je také ${}'K_n^{n-1} \sim {}^1K_n^{n-1}$. Bude-li při pevném S nadrovina ${}^1\mathrm{E}^{n-1}({}^1\mathrm{E}^{n-1} \nparallel {}'\mathrm{E}^{n-1})$ nabývat všech možných navzájem rovnoběžných poloh, budou konfigurace ${}^1K_n^{n-1} = P(K_n^n)$ homotetické, přičemž koeficient homotetie nabude všech nenulových hodnot. Konfigurace ${}'K_n^{n-1}$ a ${}^1K_n^{n-1}$ pak budou podobné, přičemž koeficient podobnosti nabude všech kladných hodnot. Lze tedy určit polohu ${}^1\mathrm{E}^{n-1}$ tak, že ${}'K_n^{n-1} = \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1}) \cong \mathscr{P}(K_n^n)$.

P o z n á m k a 1. Z důkazu věty 1 je zřejmé, že při zachování všech předpokladů věty 1 platí následující tvrzení:

Existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathrm{E}^{n-1}]$ a podobnost $\mathscr{Q} : {}'\mathrm{E}^{n-1} \to {}^1\mathrm{E}^{n-1}$ s libovolným kladným koeficientem tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) = \mathscr{Q}\mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$.

Afinita $\mathscr{Q}\mathscr{A}$ z předchozího tvrzení má zřejmě libovolný kladný modul a z věty 1 tedy plyne (pro $n = 3$) věta Beskinova (až na omezení $(OA_iB_i) \nparallel ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$).

V případě, že afinita $\mathscr{A}$ z věty 1 je podobností, obdržíme z věty 1 jednoduchou úvahou postačující podmínku pomocné věty z [5].

Zobecníme nyní větu 1 pro případ centrální projekce z $(n - m - 1)$-rozměrného centra do m-rozměrného podprostoru.

Věta 2. *Nechť jsou dány konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathrm{E}^n$ a ${}^0K_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathrm{E}^m$ $(m \geqq 2,\ n \geqq m + 1)$. Nechť $(OA_{\alpha+k}B_{\alpha+k}) \nparallel ({}^0O{}^0A_{\alpha+k}{}^0B_{\alpha+k})$, $k = 0, 1, \ldots, m$; α pevné, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ a nechť $V_{\alpha+k}({}^0W_{\alpha+k})$ je uběžník přímky $x_{\alpha+k}({}^0x_{\alpha+k})$ v projektivnosti bodových řad $x_{\alpha+k}(O, A_{\alpha+k}, B_{\alpha+k}, \ldots) \barwedge {}^0x_{\alpha+k}({}^0O, {}^0A_{\alpha+k}, {}^0B_{\alpha+k}, \ldots)$ $k = 0, 1, \ldots, m$; α pevné, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$. Nechť $L({}^0W_i,$*

${}^0W_{i+1}, \ldots, {}^0W_{i+m}) = {}^0\mathsf{E}^m$, $L(V_i, V_{i+1}, \ldots, V_{i+m}) = {}'\mathsf{E}_i^m$, $i = \alpha$, a $\mathscr{A}_\alpha : {}^0\mathsf{E}^m \to {}'\mathsf{E}_\alpha^m$ je *afinita stanovená přiřazením* ${}^0W_j \to V_j$ $(j = \alpha, \alpha + 1, \ldots, \alpha + m)$, α *pevné*, $\alpha =$ $= 1, 2, \ldots, n - m$.

Pak pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ *existují prostory* $\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1} \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}_\alpha^m \subset \mathsf{E}^n$, *jež tvoří basi* $[\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}_\alpha^m]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}_\alpha$ *tak, že* $\mathscr{P}_\alpha(K_n^n) \cong \mathscr{A}_\alpha({}^0K_n^m)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti stačí zřejmě provést důkaz pro $\alpha = 1$.

a) $n > m + 1$. Uvažujme nejprve částečnou konfiguraci $K_{m+1}^{m+1} \subset K_n^n$, ležící v $\mathsf{E}^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \subset \mathsf{E}^n$ a částečnou konfiguraci ${}^0K_{m+1}^m \subset {}^0K_n^m$ ležící v ${}^0\mathsf{E}^m$. Poněvadž K_{m+1}^{m+1} a ${}^0K_{m+1}^m$ splňují předpoklady věty 1, existuje vlastní bod $S \in \mathsf{E}^{m+1}$ a vlastní nadrovina ${}^1\mathsf{E}_1^m \subset \mathsf{E}^{m+1}$, jež tvoří basi $[S, {}^1\mathsf{E}_1^m]$ centrální projekce $\overline{\mathscr{P}}$ (v prostoru E^{m+1}) tak, že $\overline{\mathscr{P}}(K_{m+1}^{m+1}) = {}^1K_{m+1}^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\} \cong \mathscr{A}_1({}^0K_{m+1}^m)$. Sestrojme v ${}^1\mathsf{E}_1^m$ konfiguraci ${}^1K_n^m \cong \mathscr{A}_1({}^0K_n^m)$ tak, aby ${}^1K_{m+1}^m \subset {}^1K_n^m$. Zvolme nyní ${}^1\mathsf{E}_1^m$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}_1$ v E^n a hledejme její střed tak, aby $\mathscr{P}_1(K_n^n) = {}^1K_n^m$. Sestrojme $\mathsf{E}_1^{n-m-1} = L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m})$, kde q_i je příčka mimoběžek $A_{m+i}{}^1A_{m+i}$, $B_{m+i}{}^1B_{m+i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n - m)$ vedená bodem S. Snadno zjistíme, že v centrální projekci $\mathscr{P}_1$ (v E^n) s basí $[\mathsf{E}_1^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}_1^m]$ je $\mathscr{P}_1(K_n^n) = {}^1K_n^m \cong \mathscr{A}_1({}^0K_n^m)$ (příslušná úvaha je obdobná jako v důkazu věty 2 v [5]).

b) $n = m + 1$. Věta je totožná s větou 1.

Poznámka 2. Bude-li průmětna ${}^1\mathsf{E}_\alpha^m$ z věty 2 nabývat při pevném středu $\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1}$ všech navzájem rovnoběžných poloh $(\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1} \cap {}^1\mathsf{E}_\alpha^m = \emptyset)$, budou konfigurace $\mathscr{P}_\alpha(K_n^n)$ podobné, přičemž koeficient podobnosti nabude všech kladných hodnot. Platí tedy při zachování všech předpokladů věty 2 následující tvrzení:

Pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ *existují prostory* $\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1} \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}_\alpha^m \subset \mathsf{E}^n$, *jež tvoří basi* $[\mathsf{E}_\alpha^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}_\alpha^m]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}_\alpha$ *a podobnost* $\mathscr{Q}_\alpha : {}'\mathsf{E}_\alpha^m \to {}^1\mathsf{E}_\alpha^m$ *tak, že* $\mathscr{P}_\alpha(K_n^n) = \mathscr{Q}_\alpha \mathscr{A}_\alpha({}^0K_n^m)$, *přičemž koeficient podobnosti je libovolné kladné číslo.*

Literatura

[1] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie I, II, III. Matem. fys. čas. SAV, *VII*, 2-1957 a *VIII*, 2-1958.

[2] *V. Havel:* Sdružené normalisované desarguesovské konfigurace. Spisy přír. fak. univ. v Brně, 1958.

[3] *L. Drs:* Centrální axonometrie v *n*-rozměrném prostoru. Čas. pro pěst. mat., *85* (1960), 274—290.

[4] *Е. А. Мчедлишвили:* Проективные основания начертательной геометрии. Труды Груз. полит. инст., Тбилиси, *19* (1949).

[5] *V. Pecina:* K základní větě *n*-rozměrné centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 81—85.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 3 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusammenfassung

ÜBER EIN EXISTENZTHEOREM DER n-DIMENSIONALEN ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

In der Arbeit zeigt man zuerst, dass zwei gegebene Polyederkonfigurationen K_n^n und ${}^0K_n^{n-1}$ eine gewisse Afinität $\mathscr{A}$ und Zentralprojektionen $\mathscr{P}$ (aus einem Punkt nach Hyperebene im n-dimensionalen erweiterten euklidischen Raum) so bestimmen, dass $\mathscr{P}(K_n^n) \cong \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$ ist. Das Resultat ist dann auf den Fall der Zentralprojektion von einem $(n - m - 1)$-dimensionalen Zentrum in einen m-dimensionalen Unterraum $(2 \leqq m < n)$ verallgemeinert.