Časopis pro pěstování matematiky

Štefan Schwabik

Bemerkungen zu Stabilitätsfragen für verallgemeinerte Differentialgleichungen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 57--66

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117712`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

BEMERKUNGEN ZU STABILITÄTSFRAGEN FÜR VERALLGEMEINERTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingelangt am 8. September 1969)

I

Es sei E_n der n-dimensionale Euklid'sche Raum mit der üblichen Norm $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. Weiter sei $M = \{x \in E_n;\ \|x\| < R\}$, $G = M \times (-\infty, \infty)$. Setzen wir voraus, dass $h(t)$ eine auf $(-\infty, \infty)$ definierte beschränkte von links stetige zunehmende reelle Funktion ist und betrachten die in [2] bzw. [3] definierte Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h)$.

Zu der Klasse $\mathscr{F}(G, h)$ gehören Funktionen (Abbildungen) $F(x, t) : G \to E_n$ für welche folgendes gilt:

$$\|\Delta_t^{t_2-t_1} F(x, t_1)\| \leqq |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für} \quad (x, t_i) \in G_i\,, \quad i = 1, 2 \tag{1,1}$$

$$\|\Delta_t^{t_2-t_1} \Delta_x^y F(z, t_1)\| \leqq \|y\|\, |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für} \quad (x, t_i), (y + x, t_i) \in G_i\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{1,2}$$

Mit $\Delta_t^\sigma F(x, \tau)$ und $\Delta_x^y F(z, t)$ sind die Differenzen $\Delta_t^\sigma F(x, \tau) = F(x, \tau + \sigma) - F(x, \tau)$ und $\Delta_x^y F(z, t) = F(z + y, t) - F(z, t)$ bezeichnet.

In [2] und [3] werden Systeme untersucht, welche man mit der Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{1,3}$$

beschreiben kann; (1,3) ist eine verallgemeinerte Differentialgleichung, deren Lösung auf dem Grunde einer von J. KURZWEIL abstammenden Verallgemeinerung des Integralbegriffes (vgl. [1]) definiert wird. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die rechte Seite $F(x, t)$ der verallgemeinerten Gleichung (1,3) in der Klasse $\mathscr{F}(G, h)$ liegt.

Unter einer Lösung der Gleichung (1,3) im Intervall $\langle t_0, t_1 \rangle$ versteht man soein $x(\tau) : \langle t_0, t_1 \rangle \to E_n$, für welches $(x(\tau), \tau) \in G$, $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$ ist, und

$$x(\sigma) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\sigma} DF(x(\tau), t) \tag{1,4}$$

für alle $\sigma \in (t_1, t_2\rangle$ gilt.

(Auf rechten Seite der Beziehung (1,4) steht das verallgemeinerte Integral im Sinne von Kurzweil [1].)

Bemerkung 1,1. Systeme der Form (1,3) mit $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ sind zu einer Beschreibung von Differentialgleichungssystemen mit Impulsen gut geeignet (vgl. [3]).

Bemerkung 1,2. Wenn vorausgesetzt wird, dass $\Delta_t^{t_2 - t_1} F(0, t_1) = 0$ für alle $t_1, t_2 \in E_1$ ist, dann ist $x(\tau) \equiv 0$ eine Lösung der Gleichung (1,3). Offenbar ist $(0, t) \in G$ für alle $t \in (-\infty, \infty)$. Nach dem Lemma 2,4 in [3] ergibt sich dann sofort $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(0, t) = 0$ für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in (-\infty, \infty)$.

Für verallgemeinerte Differentialgleichungen (1,3) mit $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ gelten folgende Behauptungen (vgl. [2]):

Existenzsatz (lokal): *Es sei G_F die Menge aller $(x, t) \in G$ für welche $(x + F(x, t+) - F(x, t), t) \in G$ ist $(F(x, t+) = \lim_{\tau \to t+} F(x, \tau))$. Zu jedem $(x_0, t_0) \in G_F$ gibt es ein $\sigma > 0$, sodass im Intervall $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$ eine Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (1,3) so existiert, dass $x(t_0) = x_0$ gilt.*

Eindeutigkeitssatz: *Es seien $x(\tau)$ und $y(\tau)$ auf $\langle t_0, t_1 \rangle$ definierte Lösungen der Gleichung (1,3) sodass für $t_2 \in \langle t_0, t_1 \rangle$ die Beziehung $x(t_2) = y(t_2)$ gilt. Dann ist $x(\tau) = y(\tau)$ für $\tau \in \langle t_2, t_1 \rangle$.*

Zum angeführten Eindeutigkeitssatz ist zu bemerken, dass da nur eine Eindeutigkeit „vorwärts" d. h. für zunehmende Werte τ vorhanden ist. Eine Eindeutigkeit für fallende Werte τ muss da nicht vorhanden sein (vgl. Beispiel in [2]).

Der eben angeführte Eindeutigkeitssatz ist eine ganz einfache Folgerung der folgenden Ungleichung (vgl. Satz 2,1 in [3]):

Wenn $x(\tau)$ und $y(\tau)$ zwei Lösungen der Gleichung (1,3) im Intervall $\langle t_0, t_1 \rangle$ sind, dann gilt

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq e^{h(\tau) - h(t_0)} \|x(t_0) - y(t_0)\| \tag{1,5}$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_1 \rangle$.

II

Wir wollen nun einige Fragen der Stabilität der eben beschriebenen verallgemeinerten Differentialgleichungen untersuchen.

Zusammen mit der verallgemeinerten gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t)\,, \tag{2,1}$$

wo $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ ist, untersuchen wir auch die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = D[(y, t) + \eta\, S(y, t)]\,, \tag{2,2}$$

wobei $S(x, t) \in \mathscr{F}(G, \tilde{h})$ ist ($\tilde{h}$ ist eine Funktion derselben Art wie die Funktion h) und es ist $\eta \in E_1$. Das Zusatzglied $\eta\, S(y, t)$ ist als eine Störung der Gleichung (2,1) zu betrachten.

Wir werden weiterhin voraussetzen, dass $\Delta_t^{t_2 - t_1} F(0, t) = 0$ für alle $t_1, t_2 \in E_1$ ist d. h. dass $x(\tau) \equiv 0$ eine Lösung der Gleichung (2,1) ist. Zugleich sei auch die unbeschränkte Fortsetzbarkeit der Lösungen beider Gleichungen (2,1) und (2,2) für zunehmende Werte der Variablen τ gesichert. Den Voraussetzungen nach ist offenbar $F(x, t) + \eta\, S(x, t) \in \mathscr{F}(G, h + \eta\tilde{h})$. Weiter sei noch folgendes erfüllt: es existieren Werte $a > 0$, $\tilde{a} > 0$ und nichtnegative Konstanten C, $\tilde{C}$, sodass

$$h(t_0 + a) - h(t_0) \leqq C\,, \quad \tilde{h}(t_0 + \tilde{a}) - \tilde{h}(t_0) \leqq \tilde{C} \tag{2,3}$$

für alle $t_0 \in E_1$ ist.

Diese letzte Voraussetzung sichert, dass der Zuwachs beider Funktionen h und $\tilde{h}$ gleichmässig ist. Daher geben dann die von [2] bekannten Eigenschaften der Lösungen von (2,1) und (2,2), dass auch der Zuwachs der Lösungen der Gleichungen gleichmässig sein muss (vgl. auch die Ungleichung (2,7) in [3]).

Wir führen nun zwei, die Gleichungen (2,1) und (2,2) betreffende, Hilfssätze an.

Hilfssatz 2,1. *Sei $T > 0$ und sei $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (2,1) im Intervall $\langle t_0, t_0 + T\rangle$, $x(t_0) = x_0$. $y(\tau)$ sei eine Lösung der Gleichung (2,2) im Intervall $\langle t_0, t_0 + T\rangle$, $y(t_0) = y_0$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq \left(\|x_0 - y_0\| + |\eta| \left(\left[\frac{T}{\tilde{a}}\right] + 1\right) \tilde{C}\right) e^{h(\tau) - h(t_0)} \tag{2,4}$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_0 \in T\rangle$, wobei $[.]$ den ganzen Teil einer reellen Zahl bedeutet.

Beweis. Der Definition einer Lösung einer verallgemeinerten Differentialgleichung nach, ist für alle $\xi \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$

$$\|x(\xi) - y(\xi)\| = \left\|x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{\xi} DF(x(\tau), t) - \int_{t_0}^{\xi} DF(y(\tau), t) - \eta \int_{t_0}^{\xi} DS(y(\tau), t)\right\| \leqq$$

$$\leqq \|x_0 - y_0\| + \left\|\int_{t_0}^{\xi} D[F(x(\tau), t) - F(y(\tau), t)]\right\| + \left\|\eta \int_{t_0}^{\xi} DS(y(\tau), t)\right\|.$$

Die Eigenschaft (1,2) einer Funktion von der Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h)$ gibt

$$\|\Delta_t^{t_2 - t_1}(F(x(\tau), t_1) - F(y(\tau), t_1)\| = \|\Delta_t^{t_2 - t_1}\Delta_x^{x(\tau) - y(\tau)}F(y(\tau), t_1)\| \leqq$$
$$\leqq \|x(\tau) - y(\tau)\| \, . \, |h(t_2) - h(t_1)| \, .$$

Daher gilt nach dem Lemma 2,1 in [3] die Ungleichung

$$\left\|\int_{t_0}^{\xi} D[F(x(\tau), t) - F(y(\tau), t)]\right\| \leqq \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, dh(\tau)$$

und zugleich gilt auch

$$\left\|\int_{t_0}^{\xi} DS(y(\tau), t)\right\| \leqq \int_{t_0}^{\xi} d\tilde{h}(\tau) = \tilde{h}(\xi) - \tilde{h}(t_0) \leqq \tilde{h}(t_0 + T) - \tilde{h}(t_0) \, .$$

Also ist

$$\|x(\xi) - y(\xi)\| \leqq \|x_0 - y_0\| + |\eta| \, . \, (\tilde{h}(t_0 + T) - \tilde{h}(t_0)) + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, dh(\tau) \, .$$

Nach dem Lemma 2,3 von [3] gibt diese letzte Ungleichung die Ungleichung

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq (\|x_0 - y_0\| + |\eta| \, . \, (\tilde{h}(t_0 + T) - \tilde{h}(t_0))) \, e^{h(\tau) - h(t_0)}$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$ und nach (2,3) gilt also auch (2,4).

Hilfssatz 2,2. *Sei zusätzlich noch* $\Delta_t^{t_2 - t_1} S(0, t_1) = 0$ *für alle* $t_1, t_2 \in E_1$. *Sei* $T > 0$ *und seien* $x(\tau)$ *und* $y(\tau)$ *Lösungen der Gleichung* (2,1) *bzw.* (2,2) *wie im Hilfssatz* 2,1. *Es gelte noch* $\|x(\tau)\| < \beta$ *für* $\tau > t_0$, $\beta = \text{const}$. *Dann gilt die Ungleichung*

$$(2,5) \quad \|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq \left(\|x_0 - y_0\| + |\eta| \, \beta \, \tilde{C}\left(\left[\frac{T}{\tilde{a}}\right] + 1\right)\right) e^{h(\tau) + |\eta| \tilde{h}(\tau) - h(t_0) - |\eta| \tilde{h}(t_0)}$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$, *wobei mit* $[.]$ *der ganze Teil einer reellen Zahl bezeichnet wird.*

Beweis. So, wie bei dem Beweis des Hilfssatzes 2,1, gilt für alle $\xi \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$ die Ungleichung $\|x(\xi) - y(\xi)\| \leqq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^{\xi} D[F(x(\tau), t) - F(y(\tau), t)\| +$

$+\|\eta \int_{t_0}^{\xi} DS(y(\tau), t)\|$. Der Voraussetzung nach ist $\Delta_t^{t_2-t_1}S(y, t) = \Delta_t^{t_2-t_1}\Delta_x^y S(0, t_1)$ und also ist nach (1,2) $\|\Delta_t^{t_2-t_1}S(y(\tau), t_1)\| \leqq \|y(\tau)\| \cdot |\tilde{h}(t_2) - \tilde{h}(t_1)|$. Das Lemma 2,1 von [3] gibt dann

$$\|x(\xi) - y(\xi)\| \leqq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, \mathrm{d}h(\tau) + \int_{t_0}^{\xi} \|y(\tau)\| \, \mathrm{d}(|\eta| \cdot \tilde{h}(\tau)) \leqq$$

$$\leqq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, \mathrm{d}(h(\tau) + |\eta| \, \tilde{h}(\tau)) + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau)\| \, \mathrm{d}(|\eta| \cdot \tilde{h}(\tau)) \leqq$$

$$\leqq \|x_0 - y_0\| + \beta|\eta| \, (\tilde{h}(\xi) \, \tilde{h}(t_0)) + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, \mathrm{d}(h(\tau) + |\eta| \, \tilde{h}(\tau)) \leqq$$

$$\leqq \|x_0 - y_0\| + \beta|\eta| \, (\tilde{h}(t_0 + T) - \tilde{h}(t_0)) + \int_{t_0}^{\xi} \|x(\tau) - y(\tau)\| \, \mathrm{d}(h(\tau) + |\eta| \cdot \tilde{h}(\tau)) \, .$$

Daher ergibt sich nach dem Lemma 2,3 von [3] die Ungleichung

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq (\|x_0 - y_0\| + \beta|\eta| \cdot (\tilde{h}(t_0 + T) - \tilde{h}(t_0)) \, . \, e^{h(\tau) + |\eta|\tilde{h}(\tau) - h(t_0) - |\eta|\tilde{h}(t_0)}$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_0 + T \rangle$. (2,5) ist nun eine Folgerung von (2,3).

Weiter geben wir einige Stabilitätsdefinitionen, welche üblich sind (vgl. z. B. [4]) und welche wir da in einem Zusammenhang mit den verallgemeinerten Differentialgleichungen (2,1) bzw. (2,2) behandeln werden.

Definition 2,1. *Die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) nennen wir gleichmässig stabil (im Sinne von Ljapunov), wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so bestimmen kann, dass von $\|x(t_0)\| < \delta$ ($t_0 \in (-\infty, \infty)$ beliebig) die Ungleichung $\|x(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geqq t_0$ folgt, wobei $x(t)$ eine Lösung der Gleichung (2,1) ist. Die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) nennen wir gleichmässig asymptotisch stabil, wenn diese gleichmässig stabil ist und wenn zusätzlich noch ein $\varepsilon_1 > 0$ so existiert, dass für jedes $\delta_1 > 0$ man eine Zahl $T > 0$ finden kann, sodass von der Ungleichung $\|x(t_1)\| < \varepsilon_1$ ($t_1 \in (-\infty, \infty)$ beliebig) die Ungleichung $\|x(t_1 + T)\| < \delta_1$ folgt.*

Für die folgende Definition 2,2 muss nicht vorausgesetzt werden dass $x = 0$ eine Ruhelage der Gleichung (2,1) ist d. h. es muss nicht $\Delta_t^{t_2-t_1}F(0, t_1) = 0$ sein.

Definition 2,2. *Den Punkt $x = 0$ nennen wir einen ε-stabilen Punkt der Gleichung (2,1), wenn man ein $\delta > 0$ so finden kann, dass von $\|x(t_0)\| < \delta(t_0 \in (-\infty, \infty)$ beliebig) die Ungleichung $\|x(t)\| < \varepsilon$ für $t \geqq t_0$ folgt.*

Definition 2,3. *Die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) nennen wir stabil bei beständig wirkenden Störungen, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und (2,3) erfüllendes $\tilde{h}$ ein $H > 0$ so existiert, dass der Punkt $y = 0$ ein ε-stabiler Punkt der Gleichung (2,2) ist, wenn $|\eta| < H$ und $S(x, t)$ eine beliebige, zu $\mathscr{F}(G, \tilde{h})$ gehörende, Funktion ist.*

Definition 2,4. *Die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) nennen wir lokal exponentialstabil, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass für jede Lösung $x(t)$ der Gleichung (2,1) mit $\|x(t_0)\| < \varepsilon$ die Ungleichung*

$$(2,6) \qquad \|x(t)\| \leqq Ae^{-\alpha(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

für $t \geqq t_0$ gilt, wobei $A \geqq 1$, $\alpha > 0$, von t_0 nicht abhängende, Konstanten sind.

Wir beweisen nun zwei Sätze, welche das Stabilitätsverhalten der Gleichung (2,2) festlegen, wenn das Stabilitätsverhalten der Gleichung (2,1) bekannt ist.

Satz 2,1. *Es sei die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) gleichmässig asymptotisch stabil. Dann ist die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) stabil bei beständig wirkenden Störungen im Sinne der Definition* 2,4.

Beweis. Nachdem $x = 0$ eine gleichmässig asymptotisch stabile Ruhelage der Gleichung (2,1) ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ sodass, wenn $\|x(t_0)\| < \delta$ ist, dann ist

$$(2,7) \qquad \|x(\tau)\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für} \quad \tau \geqq t_0\,.$$

Ferner gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ und eine Zahl $T > 0$, sodass von $\|x(t_1)\| < \varepsilon_1$ ($t_1 \in (-\infty, \infty)$) die Ungleichung

$$(2,8) \qquad \|x(t_1 + T)\| < \tfrac{1}{2}\vartheta$$

folgt, wobei $\vartheta = \min(\delta, \varepsilon_1) \leqq 0$ ist.

Wenn nun $\|x(t_0)\| < \vartheta$ ($t_0 \in (-\infty, \infty)$ beliebig) sein wird, dann wird (2,7) und zugleich auch $\|x(t_0 + T)\| < \frac{1}{2}\vartheta$ gelten. Wählen wir $H > 0$ sodass die Ungleichung

$$H\left(\left[\frac{T}{\tilde{a}}\right] + 1\right)\tilde{C}e^{([T/a]+1)C} \leqq \tfrac{1}{2}\vartheta$$

gelten wird, wobei die Zahlen a, $\tilde{a}$, C, $\tilde{C}$ von der Voraussetzung (2,3) kommen. Sei weiter $y(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (2,2) mit $y(t_0) = y_0$, $\|y_0\| < \vartheta$ und sei $x(\tau)$ soeine Lösung der Gleichung (2,1) im Intervall $\langle t_0, t_0 + T\rangle$, dass $x(t_0) = y_0$ ist. Nach (2,4) vom Hilfssatz 2,1 und der Wahl von $H > 0$, gilt für $|\eta| < H$ die Ungleichung

$$(2,9) \qquad \|x(\tau) - y(\tau)\| < \tfrac{1}{2}\vartheta$$

für alle $\tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$. Daher und nachdem $\vartheta \leqq \delta < \varepsilon$ ist, gilt $\|y(\tau)\| < \frac{1}{2}\vartheta + \|x(\tau)\| < \frac{1}{2}(\vartheta + \varepsilon)$ d. h.

$$(2,10) \qquad \|y(\tau)\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle\,.$$

(2,8) und (2,9) gibt dann auch noch $\|y(t_0 + T)\| < \frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta = \vartheta$. Wenn man nun gleicherweise fortschreitet und die eben durchgeführte Untersuchung im Intervall $\langle t_0 + T, t_0 + 2T\rangle$ wiederholt, dann ergibt sich, so wie oben, die Ungleichung (2,10) im Intervall $\langle t_0 + T, t_0 + 2T\rangle$ und ebenfalls wird auch $\|y(t_0 + 2T)\| < \vartheta$ gelten. Auf diese Weise kann man die Ungleichung (2,10) für alle $\tau \geqq t_0$ beweisen und also wird der Punkt $y = 0$ ein ε-stabiler Punkt der Gleichung (2,2) sein. Nachdem ε beliebig gewählt werden kann, gilt auch der Satz 2,1.

Satz 2,2. *Es sei die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) lokal exponentialstabil und sei zusätzlich noch*

$$(2,11) \qquad \Delta_t^{t_2 - t_1} S(0, t_1) = 0 \quad \textit{für} \quad t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)\,.$$

Dann ist für genügend kleines $|\eta|$ die Lösung $y = 0$ eine lokal exponentialstabile Ruhelage der Gleichung (2,2), wobei die, in der Definition der lokalen Exponentialstabilität dieser Ruhelage auftretenden, Konstanten von der Wahl, der zu der Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h)$ gehörenden Funktion $S(x, t)$, nicht abhängen.

Beweis. Nachdem $x = 0$ eine lokal exponentialstabile Ruhelage der Gleichung (2,1) ist, gilt nach (2,6) die Ungleichung $\|x(\tau)\| \leqq A\|x(t_0)\|$ für eine Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (2,1) (für alle $\tau \geqq t_0$), sobald $\|x(t_0)\| < \varepsilon$ ist, wo ε die Zahl von der Definition 2,4 ist. Legen wir $T = (1/\alpha) \log 4A$, wo $A \geqq 1$ und $\alpha > 0$ die, in der Definition 2,4 auftretende, Zahlen sind; offenbar ist $T > 0$. Sei weiter $H > 0$ soeine Zahl, dass für $|\eta| < H$ die Ungleichung

$$|\eta| \,.\, A \,.\, \tilde{C}([T/\tilde{a}] + 1)\, e^{C([T/a]+1)} \,.\, e^{|\eta| \tilde{C}([T/\tilde{a}]+1)} \leqq \tfrac{1}{4}$$

gilt (a, $\tilde{a}$, C, $\tilde{C}$ sind die Zahlen von der Voraussetzung (2,3)). Sei nun $\|y(t_0)\| < \varepsilon$ und setze man $x(t_0) = y(t_0)$. Wenn man die Ungleichung (2,5) vom Hilfssatz 2,2 in Betracht nimmt, dann gibt das Obige, wenn $|\eta| < H$ ist, die Ungleichung

$$(2,12) \qquad \|x(\tau) - y(\tau)\| \leqq \tfrac{1}{4}\|x(t_0)\|$$

für $\tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$, wobei $x(\tau)$, $y(\tau)$ Lösungen der Gleichung (2,1) bzw. (2,2) mit $x(t_0) = y(t_0)$ sind und wobei $t_0 \in E_1$ beliebig gewählt werden kann. Von (2,12) ergibt sich

$$\|y(\tau)\| \leqq \tfrac{1}{4}\|x(t_0)\| + \|x(\tau)\| \leqq \tfrac{1}{4}\|x(t_0)\| + A\|x(t_0)\| = (\tfrac{1}{4} + A)\, \|y(t_0)\|$$

für $\tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$ und, der Wahl von T nach, auch

$$\|y(t_0 + T)\| \leqq \tfrac{1}{4}\|x(t_0)\| + A \,.\, e^{-\alpha(1/\alpha)\log 4A}\|x(t_0)\| = \tfrac{1}{2}\|x(t_0)\| = \tfrac{1}{2}\|y(t_0)\|\,.$$

Setzen wir voraus, dass

$$(2,13) \qquad \text{a)}\ \|y(\tau)\| \leqq (\tfrac{1}{4} + A) \,.\, (\tfrac{1}{2})^{l-1}\|y(t_0)\| \quad \text{für} \quad \tau \in \langle t_0 + (l-1)\,T, t_0 + lT\rangle$$

$$\text{b)}\ \|y(t_0 + lT)\| \leqq (\tfrac{1}{2})^l \cdot \|y(t_0)\|$$

für irgendeine natürliche Zahl l gilt. Sei $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (2,1) in $\langle t_0 + lT, t_0 + (l+1) T\rangle$, $x(t_0 + lT) = y(t_0 + lT)$. Offenbar ist $\|x(t_0 + lT)\| = \|y(t_0 + lT)\| \leqq (\frac{1}{2})^l \|y(t_0)\| < \varepsilon$ nach (2,13) b) und also ist nach (2,6) von der Definition 2,4 auch $\|x(\tau)\| \leqq A\|x(t_0 + lT)\|$ für $\tau \geqq t_0 + lT$. Nach der Ungleichung (2,12), welche da offenbar anwendbar ist, wenn man statt t_0 den Wert $t_0 + lT$ legt, gilt $\|y(\tau)\| \leqq \frac{1}{4}\|x(t_0 + lT)\| + A\|x(t_0 + lT)\| = (\frac{1}{4} + A)\| y(t_0 + lT)\|$ für $\tau \in \langle t_0 + lT, t_0 + (l+1) T\rangle$ und also von (2,13) b) folgt (2,13) a) für $l + 1$. Nach der Wahl von T und nach der lokalen Exponentialstabilität der Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (2,1) ist $\|y(t_0 + (l+1) T)\| \leqq \|x(t_0 + (l+1) T)\| + \frac{1}{4}\|x(t_0 + lT)\| \leqq A \cdot e^{-\log 4A}\|x(t_0 + lT)\| + \frac{1}{4}\|x(t_0 + lT)\| = \frac{1}{2}\|x(t_0 + lT)\| = \frac{1}{2}\|y(t_0 + lT)\| \leqq (\frac{1}{2})^{l+1}\|y(t_0)\|$, wenn man (2,13) b) in Betracht nimmt. So gelten also die Ungleichungen (2,13) für alle natürliche Zahlen l und daher gilt so für $\|y(t_0)\| < \varepsilon$, $t \geqq t_0$ die Ungleichung

$$\|y(t)\| \leqq 2(\tfrac{1}{4} + A)\, e^{-\alpha(\log 2/\log 4A)(t - t_0)} \,.\, \|y(t_0)\| \,,$$

welche die lokale Exponentialstabilität der Ruhelage $y = 0$ der Gleichung (2,2) angibt.

III

Sei nun $f(x, t) : G \to E_n$, $G = Mx(-\infty, \infty)$, $M = \{x \in E_n, \|x\| < R\}$, $f(0, t) = 0$, $\|f(x, t) - f(y, t)\| \leqq K\|x - y\|$ für $(x, t), (y, t) \in G$, $f(x, t)$ messbar in t für festes $x \in M$.

Untersuchen wir die klassische Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) \tag{3,1}$$

in G und zugleich auch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y, t) + p(t)\,, \tag{3,2}$$

wobei das Störungsglied $p(t)$ folgendermassen gebildet ist: es sei $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, für welche $t_{k+1} - t_k \geqq d > 0$ ist und sei $a_k \in E_n$, $\|a_k\| \leqq K_2$, $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; dann legen wir $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - t_k)$, wo δ die bekannte Diracfunktion bedeutet. Es handelt sich also um eine Differentialgleichung mit einem Impulsstörungsglied.

Die klassische Differentiallgleichung (3,1) – wie es von [1] bekannt ist – ist mit der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t)\,, \tag{3,3}$$

wo $F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) \, d\tau$ ist, in dem Sinne äquivalent, dass jede Lösung von (3,1) zugleich auch eine Lösung von (3,3) ist und umgekehrt (vgl. [1] und [3]). Nach den Voraussetzungen über $f(x, t)$ und der Definition von $F(x, t)$ ist offenbar $F(x, t) \in \in \mathscr{F}(G, K_1 t)$ wobei $K_1 = \max(K, KR)$ und die Funktion $h(t) = K_1 t$ erfüllt offensichtlich auch die Voraussetzung (2,3) vom Abteil II.

Sei nun weiter $s(t)$ soeine Funktion, dass $s(t) = k$ für $t_k < t \leqq t_{k+1}$; $s(t)$ ist also eine nichtfallende, von links stetige, für alle $t \in E_1$ definierte reelle Funktion. Legen wir $S(x, t) = \sum_{i=s(0)}^{s(t)} a_i$, bei Benützung der Verabredung, dass $\sum_{i=N_1}^{N_2} = - \sum_{i=N_2}^{N_1}$ ist, wenn $N_1 > N_2$ ist. Untersuchen wir nun mit der Gleichung (3,3) auch die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x, t) + S(x, t)] . \tag{3,4}$$

Es gilt $\|S(x, F_2) - S(x, T_1)\| = \|\sum_{i=s(T_1)+1}^{s(T_2)} a_i\| \leqq K_2 |s(T_2) - s(T_1)|$, $(x, T_i) \in G$, $i = = 1, 2$ und $\|\Delta_t^{T_2 - T_1} \Delta_x^y S(x, T_1)\| = 0$ nachdem $S(x, t)$ von x nicht abhängt. Also ist $S(x, t) \in \mathscr{F}(G, K_2 \, s(t))$ und es gilt $s(a + d) - s(a) \leqq 1$ für alle $a \in E_1$. Die Funktion $h(t) = c \, . \, s(t)$, wo c eine beliebige Konstante ist erfüllt also die Voraussetzung (2,3) von II mit $\tilde{a} = d$ und $\tilde{C} = c$.

Die „Differentialgleichung" (3,2), auf deren rechter Seite Diracfunktionen auftreten, soll folgenderweise aufgefasst werden: Unter einer Lösung von (3,2) in einem Intervall $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ verstehen wir eine von links stetige Funktion $y(\tau)$, welche in $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cap (t_k, t_{k+1}\rangle$ eine Lösung der Gleichung (3,1) ist und für welche $\lim_{\tau \to t_k} y(\tau) - - y(t_k) = a_k$ gilt. Diesem Begriff einer Lösung von (3,2) entsprechen die Lösungen von (3,4) (vgl. [3], Abs. 5); man kann also die Lösungen von (3,4) als Lösungen von (3,2) auffassen.

Setzen wir voraus, dass die Lösungen von (3,2) und (3,1) unbeschränkt — für wachsende Werte der unabhängigen Variablen — fortsetzbar sind.

Eine unmittelbare Anwendung des Satzes 2,1 gibt die folgende Behauptung:

Sei die Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (3,1) gleichmässig asymptotisch stabil. Dann kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K_2 > 0$ so finden, dass wenn $\|a_k\| \leqq K_2$ und $t_{k+1} - t_k \geqq d > 0$ ist, dann ist der Punkt $y = 0$ ein ε — stabiler Punkt der Gleichung (3,2)

Diese Behauptung gibt also eine gewisse Aussage über die Stabilität bei Impulsstörungen für die gleichmässig asymptotisch stabile Ruhelage $x = 0$ der Gleichung (3,1).

Bemerkung. Ähnlicherweise kann man fortschreiten, wenn man anstatt der Gleichung (3,2) die Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) + g(y, t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i) \tag{3,5}$$

in Betracht nimmt; dabei ist $g(x, t) : G \to E_n$; $\|g(x, t) - g(y, t)\| \leqq K_3\|x - y\|$ für $(x, t), (y, t) \in G$, $g(x, t)$ messbar in t für festes $x \in M$. Nach dem Übergang zu der verallgemeinerten Differentialgleichung, welche der Gleichung (3,5) entspricht (vgl. [3]), bekommt man dann nach dem Satz 2,1 folgendes: wenn $x = 0$ gleichmässig asymptotisch stabil für die Gleichung (3,1) ist, dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ der Punkt $y = 0$ ein ε – stabiler Punkt der Gleichung (3,5), wenn nur K_3 genügend klein ist und $t_{k+1} - t_k \geqq d > 0$ gilt.

Wenn man für die Funktion $g(x, t)$ von (3,5) zusätzlich noch voraussetzt, dass $g(0, t) = 0$ für $t \in E_1$ ist und wenn die Ruhelage der Gleichung (3,1) lokal exponentialstabil ist, dann gibt der Übergang von (3,5) zu der passenden verallgemeinerten Differentialgleichung und der Satz 2,2 die Tatsache, dass die Ruhelage $y = 0$ der Gleichung (3,5) auch lokal exponentialstabil sein wird, wenn die Lipschitzkonstante K_3 der Funktion $g(x, t)$ genügend klein ist und wenn $t_{k+1} - t_k \geqq d > 0$ gilt.

Literaturhinweise

[1] *Kurzweil J.:* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7* (*82*) (1957), 418—449.

[2] *Kurzweil J.:* Generalized ordinary differential equations, Czech Math. J. *8* (*83*) (1958), 360—388.

[3] *Schwabik Š.:* Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen, Czech. Math. J. *19* (*1969*), 398—427.

[4] *Barbašin E. A.:* Einführung in die Stabilitätstheorie, Moskva, (1967) (russisch).

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV v Praze).