Ivan Netuka

Hladké plochy s nekonečnou cyklickou variací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 86--101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117703`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

HLADKÉ PLOCHY S NEKONEČNOU CYKLICKOU VARIACÍ

IVAN NETUKA, Praha

(Došlo dne 25. listopadu 1969)

1. Definice a označení. Pro přirozené číslo k označíme E_k k-rozměrný euklidovský prostor. Symboly $\overline{M}$, M^0, hr M, $|x|$, $x \,.\, y$ znamenají pořadě uzávěr množiny M, vnitřek M, hranici M, euklidovskou normu prvku x, skalární součin x a y v některém prostoru E_k; ze souvislosti bude vždy patrné, o jaký prostor se jedná. Místo $x \,.\, x$ budeme psát x^2. Pro $s \in E_k$, $r > 0$ položíme $\Omega_k(s, r) = \{x; x \in E_k, |x - s| < r\}$ (koule), $\varkappa_k$ buď objem koule $\Omega_k(0, 1)$. Dále buď $K_k = \langle 0, 1 \rangle \times \ldots \times \langle 0, 1 \rangle$ (k-rozměrná krychle). Konvexním tělesem v E_k rozumíme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem. V dalším bude přirozené číslo m pevně zvoleno. Body z E_{m+1} budeme někdy psát ve tvaru $[x, y]$, kde $x \in E_m$, $y \in E_1$. Vnější m-rozměrnou Hausdorffovu míru množiny $M \subset E_{m+1}$ označíme $H(M)$. Místo K_m budeme psát pouze K, dále $\Gamma = \text{hr}\, \Omega_{m+1}(0, 1)$.

Říkáme, že funkce f definovaná na množině $M \subset E_m$ je hölderovsky spojitá na M, jestliže existují kladná čísla A, β tak, že platí $|f(x) - f(y)| \leqq A|x - y|^\beta$, kdykoli $x, y \in M$. Je-li $M \subset E_m$ otevřená a f je funkce na M, znamená $\partial_i f$ parciální derivaci prvního řádu f podle i-té proměnné; symbol grad f má obvyklý význam.

Množinu všech spojitých funkcí na K označíme C. Pro $f \in C$ položíme $\|f\|_C = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Dále označíme C_1 množinu všech funkcí $f \in C$, pro něž $f(0) = 0$ a jejichž parciální derivace prvního řádu jsou stejnoměrně spojité na K^0. Pro $f \in C_1$ položíme $\|f\| = \sup_{x \in K^0} |\text{grad}\, f(x)|$. Zřejmě je $\|\ldots\|_C$ (resp. $\|\ldots\|$) norma na C (resp. C_1) a víme, že C (resp. C_1) s příslušnou normou je Banachův prostor. Buď ještě D množina všech funkcí f v E_{m+1}, pro něž je spt f ($=$ nosič f) kompaktní, které mají derivace všech řádů a pro něž $\sup_{x \in E_{m+1}} |f(x)| \leqq 1$.

Je-li konečně A matice, značí A' matici transponovanou k A. Je-li A čtvercová matice, buď det A její determinant. Symbol J znamená jednotkovou matici.

2. Poznámka. V této poznámce uvedeme některé definice a tvrzení z [5]. Formulujeme je pouze ve tvaru, kterého v dalším užíváme.

Je-li $\emptyset \neq G \subset E_{m+1}$ omezená otevřená množina a $S \subset E_{m+1}$ polopřímka, potom bod $\tilde{z} \in S$ nazýváme nárazem S na G, jestliže množiny $S \cap G \cap \Omega_{m+1}(\tilde{z}, r)$ a $(S - G) \cap \Omega_{m+1}(\tilde{z}, r)$ mají kladnou lineární míru pro každé $r > 0$. Platí:

Tvrzení A. *Buď $\tilde{y} \in E_{m+1}$. Nechť pro $\theta \in \Gamma$ označuje $n^G(\theta, \tilde{y})$ počet všech nárazů polopřímky $\{\tilde{y} + \varrho\theta; \varrho > 0\}$ na G $(0 \leqq n^G(\theta, \tilde{y}) \leqq \infty)$. Potom je $n^G(\theta, \tilde{y})$ baireovská funkce proměnné θ na Γ a integrál*

$$v^G(\tilde{y}) = \int_\Gamma n^G(\theta, \tilde{y})\, \mathrm{d}H(\theta)$$

je roven

$$\sup \left\{ \int_G \operatorname{grad} \psi(\tilde{x}) \cdot \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{|\tilde{y} - \tilde{x}|^{m+1}}\, \mathrm{d}\tilde{x}\ ; \quad \psi \in D\,, \quad \tilde{y} \notin \operatorname{spt} \psi \right\}.$$

Jestliže $\theta \in \Gamma$, položme $\nu(\tilde{y}) = \theta$, když θ je vnější normála G v $\tilde{y}$ ve Federerově smyslu; jinak buď $\nu(\tilde{y}) = 0$.

Tvrzení B. *Je-li G množina s konečným perimetrem, potom pro každé $\tilde{z} \in E_{m+1}$ je*

$$v^G(\tilde{z}) = \int_{\operatorname{hr} G} \frac{|\nu(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y})\,.$$

3. Označení. Budeme se zabývat pouze množinami speciálního tvaru. Pro $f \in C$ označme $\mu_f = \min_{x \in K} f(x)$,

$$G_f = \{[x, t] \in E_{m+1}\ ; \quad x \in K^0\,, \quad \mu_f - 1 < t < f(x)\}\,,$$
$$L_f = \{[x, t] \in E_{m+1}\ ; \quad x \in K^0\,, \quad t = f(x)\}\,.$$

Zřejmě je $L_f \subset \operatorname{hr} G_f$. Položme dále $L_f' = \operatorname{hr} G_f - L_f$. Zřejmě je množina G_f otevřená, L_f' uzavřená a L_f je H-měřitelná. Je-li $z \in K^0$, označme $\tilde{z} = [z, f(z)]$, $G = G_f$ a $v^f(z)$ definujeme rovností $v^f(z) = v^G(\tilde{z})$.

Někdy budeme předpokládat, že $f \in C_1$. Víme, že potom má $\operatorname{hr} G_f$ konečnou Hausdorffovu míru [6], a tedy má G_f konečný perimetr ([2], věta 26). Pro $z \in K^0$ nechť má $\tilde{z}$ stejný význam jako nahoře a definujeme $I(f, z)$ vztahem

$$I(f, z) = \int_{L_f} \frac{|\nu(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y})\,, \tag{1}$$

kde ν má stejný význam jako v odst. 2. Z věty B tohoto odstavce plyne, že pro zmíněná z a f je

$$v^f(z) \geqq I(f, z)\,. \tag{2}$$

4. Lemma. *Buďte $a_1, \ldots, a_m$ reálná čísla. Pro $i, j = 1, \ldots, m$ položme $\alpha_{ij} = a_i a_j$ a buď A matice o prvcích α_{ij}. Potom* $\det(J + A) = 1 + \sum_{i=1}^m a_i^2$.

Důkaz. Pro $\lambda \in E_1$ buď $\chi(\lambda) = \det(\lambda J + A)$. Protože matice A má hodnost nejvýše jedna, existuje $\beta \in E_1$ tak, že $\chi(\lambda) = \lambda^m + \beta\lambda^{m-1}$. Z definice determinantu okamžitě plyne, že $\beta = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ii}$. Je tedy $\det(J + A) = \chi(1) = 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i^2$.

5. Lemma. *Buď $z \in K^0$, $f \in C_1$, $\tilde{z} = [z, f(z)]$ a položme*

$$v(\tilde{z}) = \left[\frac{-\operatorname{grad} f(z)}{(1 + (\operatorname{grad} f(z))^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + (\operatorname{grad} f(z))^2)^{1/2}}\right]. \tag{3}$$

Potom je $v(\tilde{z})$ vnější normála G_f v $\tilde{z}$ ve Federerově smyslu.

Důkaz. Plyne z věty 14 v [8].

6. Lemma. *Buď $z \in K^0$, $f \in C_1$. Potom*

$$I(f, z) = \int_{K^0} \frac{|\operatorname{grad} f(t) \, . \, (t - z) + f(z) - f(t)|}{(|t - z|^2 + (f(z) - f(t))^2)^{(m+1)/2}} \, \mathrm{d}t \, . \tag{4}$$

Důkaz. Definujeme zobrazení $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_{m+1}]$ z K^0 do E_{m+1} takto: $\Phi_i(t) = t_i$ pro $i = 1, \ldots, m$, $\Phi_{m+1}(t) = f(t)$. Zřejmě je Φ prosté zobrazení třídy C_1 množiny K^0 na L_f. Buď $M(t)$ matice typu $(m + 1, m)$ o řádcích $\operatorname{grad} \Phi_i(t)$, $D_\Phi(t) = (\det(M'(t) \, . \, M(t)))^{1/2}$. Snadno zjistíme, že $D_\Phi(t) = (\det(J + A(t)))^{1/2}$, kde $A(t)$ je matice o prvcích $[\partial_i f(t) \, \partial_j f(t)]$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Podle lemmatu 4 je $D_\Phi(t) = (1 + (\operatorname{grad} f(t))^2)^{1/2} > 0$. Nyní vyjádření (4) plyne z (1), (3) a ze známé věty o výpočtu integrálu podle Hausdorffovy míry pomocí Lebesgueova integrálu (např. [6], věta 3.11).

7. Lemma. *Parciální derivace prvního řádu funkce f buďte hölderovsky spojité na K^0. Potom existuje $b_1 > 0$ tak, že pro každé $z \in K^0$ je $I(f, z) \leqq b_1$.*

Důkaz. Buďte A, β taková kladná čísla, že pro každé $i = 1, \ldots, m$ platí $|\partial_i f(x) - \partial_i f(y)| \leqq A|x - y|^\beta$, kdykoli $x, y \in K^0$. Zvolme $z \in K^0$ a buď $t \neq z$. Ze známých vět z diferenciálního počtu plyne, že existuje bod ξ ležící na úsečce s krajními body z, t tak, že

$$\frac{|\operatorname{grad} f(t) \, . \, (t - z) + f(z) - f(t)|}{(|t - z|^2 + (f(z) - f(t))^2)^{(m+1)/2}} \leqq \frac{|\operatorname{grad} f(t) - \operatorname{grad} f(\xi)| \, |t - z|}{|t - z|^{m+1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{A \, m^{1/2} |t - \xi|^\beta}{|t - z|^m} \leqq \frac{A \, m^{1/2}}{|t - z|^{m-\beta}} \, .$$

Odtud již tvrzení plyne.

8. Lemma. *Buď φ spojitá na intervalu $\langle 0, r \rangle$. Potom platí:*

$$\int_{\Omega_k(0,r)} \varphi(|x|) \, \mathrm{d}x = k\varkappa_k \int_0^r t^{k-1} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Důkaz. Např. [7], str. 260.

9. Lemma. *Buď $m > 1$, $r > 0$. Položme*

(5) $$\eta = 2^{-m+1}(m-1)\,\varkappa_{m-1}\int_0^{1/4}\frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{(m+1)/2}}\,.$$

Pro $\alpha > 0$ položíme

$$\psi(\alpha; r) = \int_{\Omega_{m-1}(0,r)}\frac{dx}{(\alpha^2+|x|^2)^{(m+1)/2}}\,,\quad (x \in E_{m-1})\,.$$

Potom existuje $\gamma > 0$ tak, že pro každé $\alpha > 0$ je

(6) $$\psi(\alpha; r) \leqq \gamma\alpha^{-2}\,;$$

dále pro každé $\alpha \in (0, 2)$ platí

(7) $$\psi(\alpha; \tfrac{1}{2}) \geqq 2^{m-1}\eta\alpha^{-2}\,.$$

Důkaz. V lemmatu 8 položíme $k = m - 1$, $\varphi(t) = (\alpha^2 + t^2)^{-(m+1)/2}$. Dostáváme

$$\alpha^2\,\psi(\alpha; r) = (m-1)\,\varkappa_{m-1}\int_0^r\frac{\alpha^2 t^{m-2}\,dt}{(\alpha^2+t^2)^{(m+1)/2}}\,.$$

Po substituci $u = t\alpha^{-1}$ obdržíme

(8) $$\alpha^2\,\psi(\alpha; r) = (m-1)\,\varkappa_{m-1}\int_0^{r\alpha^{-1}}\frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{(m+1)/2}}\,.$$

Odtud plyne, že pro každé $\alpha > 0$ je

$$\psi(\alpha; r) \leqq \alpha^{-2}(m-1)\,\varkappa_{m-1}\int_0^{\infty}\frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{(m+1)/2}}\,.$$

Nyní je zřejmé, jak budeme volit γ. Dokázali jsme (6). Položme v (8) $r = \frac{1}{2}$. Potom je pro každé $\alpha \in (0, 2)$

$$\alpha^2\,\psi(\alpha; \tfrac{1}{2}) \geqq (m-1)\,\varkappa_{m-1}\int_0^{1/4}\frac{u^{m-2}\,du}{(1+u^2)^{(m+1)/2}} = 2^{m-1}\eta\,.$$

Odtud plyne (7).

10. Lemma. *Parciální derivace prvního řádu funkce f buďte hölderovsky spojité na K^0. Potom existuje $b > 0$, tak že pro každé $z \in K^0$ je $v^f(z) \leqq b$.*

Důkaz. Ponecháme označení zavedená v odst. 3; pro $z \in K^0$ je $\tilde{z} = [z, f(z)]$. Podle (1) a lemmatu 7 je pro každé $z \in K^0$

(9) $$\int_{L_f}\frac{|\nu(\tilde{y}) . (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\,dH(\tilde{y}) \leqq b_1\,.$$

Předpokládejme, že $m > 1$. Buď $1 \leqq i \leqq m$, ϑ buď rovno 0 nebo 1. Označme

$$P_i(\vartheta) = \{x \in E_m;\ 0 < x_j < 1,\ j = 1, \ldots, m,\ j \neq i,\ x_i = \vartheta\},$$

$$S_i(\vartheta) = \{\tilde{x};\ \tilde{x} = [x, t] \in E_{m+1},\ x \in P_i(\vartheta),\ \mu_f - 1 < t < f(x)\},$$

$$P_0 \ = \{\tilde{x};\ \tilde{x} = [x, t] \in E_{m+1},\ x \in K^0,\ t = \mu_f - 1\}.$$

Položme $r = \max((m-1)^{1/2}, \|f\|_C + 1)$, $b_0 = (m - 1 + (2\|f\|_C + 1)^2)^{1/2}$. Zvolme nyní $z \in K^0$. Je-li $\tilde{y} \in P_0$, je zřejmě $1 \leqq |\tilde{y} - \tilde{z}| \leqq b_0$. Odtud plyne, že

$$(10) \qquad \int_{P_0} \frac{|v(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y}) \leqq b_0\,.$$

Zvolme $1 \leqq i \leqq m$, $\vartheta \in \{0, 1\}$. Pro každé $\tilde{y} \in S_i(\vartheta)$ je $v(\tilde{y}) = [v_1, \ldots, v_{m+1}]$, kde $v_j = 0$ pro $j \neq i$, $|v_i| = 1$. Označme $\Omega' = \{x;\ x \in E_m,\ \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 < r^2,\ -r < x_m < r\}$. Pro $x \in \Omega'$ položme

$$\Psi(x) = [x_1 + z_1, \ldots, x_{i-1} + z_{i-1}, \vartheta, x_i + z_{i+1}, \ldots, x_{m-1} + z_m, x_m]\,.$$

Potom je Ψ isometrické zobrazení Ω' do E_{m+1} a z definice čísla r snadno plyne, že $S_i(\vartheta) \subset \Psi(\Omega')$. Body $x \in E_m$ budeme psát ve tvaru $x = [\hat{x}, t]$, kde $\hat{x} \in E_{m-1}$, $t \in E_1$. Zřejmě je $\Omega' = \Omega_{m-1}(0, r) \times (-r, r)$. Nyní aplikujeme Fubiniovou větu a lemma 9, vztah (6) (klademe ovšem $\alpha = ((\vartheta - z_i)^2 + (t - f(z))^2)^{1/2} > 0$). Dostáváme

$$(11) \qquad \int_{S_i(\vartheta)} \frac{|v(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y}) \leqq \int_{\Psi(\Omega')} \frac{|\vartheta - z_i|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y}) =$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{|\vartheta - z_i|\, \mathrm{d}x}{|\Psi(x) - \tilde{z}|^{m+1}} = \int_{-r}^{r} \left(\int_{\Omega_{m-1}(0,r)} \frac{|\vartheta - z_i|\, \mathrm{d}\hat{x}}{((\vartheta - z_i)^2 + (t - f(z))^2 + |\hat{x}|^2)^{(m+1)/2}} \right) \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \gamma \int_{-r}^{r} \frac{|\vartheta - z_i|\, \mathrm{d}t}{(\vartheta - z_i)^2 + (t - f(z))^2} \leqq \gamma\pi\,.$$

Položme konečně $P = P_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m} (S_i(0) \cup S_i(1)) \cup L_f$, $b = b_0 + b_1 + 2m\pi\gamma$. Zřejmě $H(\mathrm{hr}\, G_f - P) = 0$ a tedy podle definice $v^f(z)$, podle věty B a podle (9), (10), (11) dostáváme

$$v^f(z) = \int_{\mathrm{hr}G_f} \frac{|v(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \tilde{z})|}{|\tilde{y} - \tilde{z}|^{m+1}}\, \mathrm{d}H(\tilde{y}) \leqq b\,.$$

Pro $m = 1$ přenecháváme důkaz čtenáři.

Lemma je dokázáno.

11. Lemma. *Nechť funkce h má spojitou derivaci druhého řádu v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Buď $x_0 \in (0, 1)$. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, $x \neq x_0$ položme $h_1(x) = (h(x) - h(x_0))/(x - x_0)$, $h_1(x_0) = h'(x_0)$ a pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ položme $h_2(x) = \operatorname{arctg} h_1(x)$. Označme V variaci funkce h_2 na $\langle 0, 1\rangle$. Potom je*

$$V = \int_0^1 \frac{|h'(x)(x - x_0) + h(x_0) - h(x)|}{(x - x_0)^2 + (h(x_0) - h(x))^2}\, dx\,. \tag{12}$$

Buď dále $q \in (0, 1)$, n přirozené a nechť $h((2j - 1)/2n) = 2qn^{-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $h(2j/2n) = 0$ $(j = 0, \ldots, n)$ a nechť pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $0 \leqq h(x) \leqq 2qn^{-1}$. Potom je

$$V \geqq \tfrac{1}{2}q \sum_{s=2}^{n} s^{-1}\,. \tag{13}$$

Důkaz. Nechť $h_1(\langle 0, 1\rangle) \subset \langle \alpha, \beta\rangle$. Snadno zjistíme, že h_1' je omezená v $\langle 0, 1\rangle$ a tedy je h_1 absolutně spojitá v $\langle 0, 1\rangle$. Protože funkce arctg je lipschitzovská na $\langle \alpha, \beta\rangle$, je h_2 absolutně spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ ([9], str. 264). Podle známé věty je $V = \int_0^1 |h_2'(x)|\, dx$. Odtud výpočtem dostaneme (12). Vztah (13) plyne z 3.12, 3.14 v [4].

12. Lemma. *Buď $q \in (0, 1)$, n přirozené. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ položme $h_1^n(x) = 2qn^{-1} \cdot \sin^2 n\pi x$. Dále pro $t = [t_1, \ldots, t_m] \in K$ buď $h_n(t) = h_1^n(t_m)$. Konečně η buď pro $m > 1$ číslo určené vztahem (5), pro $m = 1$ položme $\eta = 1$.*

Potom je $h_n \in C_1$ a pro $z \in K^0$ je

$$I(h_n, z) \geqq \tfrac{1}{2}\eta q \sum_{s=2}^{n} s^{-1}\,. \tag{14}$$

Důkaz. Zřejmě můžeme předpokládat, že $n > 1$. Zřejmě je $h_n \in C_1$. Je-li $m = 1$ plyne (14) ze (4), (12), (13). Buď $m > 1$. Zvolme $z \in K^0$ a buď $t \in K^0$, $t_m \neq z_m$; položme $\hat{z} = [z_1, \ldots, z_{m-1}]$, $\hat{t} = [t_1, \ldots, t_{m-1}]$. Místo h_1^n budeme psát pouze h a položíme $\alpha = ((t_m - z_m)^2 + (h(t_m) - h(z_m))^2)^{1/2}$. Zřejmě je $0 < \alpha < 2$. Nejdříve odhadněme integrál

$$Z = \int_{K_{m-1}} \frac{d\hat{t}}{(|\hat{t} - \hat{z}|^2 + \alpha^2)^{(m+1)/2}}\,.$$

Zřejmě existuje $(m - 1)$-rozměrný krychlový interval $\tilde{K}$ o délce hrany $\frac{1}{2}$, jehož jeden vrchol leží v bodě $\hat{z}$ a $\tilde{K} \subset K_{m-1}$. Potom, použijeme-li lemma 9, vztah (7), dostaneme

$$Z \geqq \int_{\tilde{K}} \frac{d\hat{t}}{(|\hat{t} - \hat{z}|^2 + \alpha^2)^{(m+1)/2}} \geqq \frac{1}{2^{m-1}} \int_{\Omega_{m-1}(\hat{z}, 1/2)} \frac{d\hat{t}}{(|\hat{t} - \hat{z}|^2 + \alpha^2)^{(m+1)/2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \int_{\Omega_{m-1}(0, 1/2)} \frac{d\hat{t}}{(\alpha^2 + |\hat{t}|^2)^{(m+1)/2}} \geqq \eta\alpha^{-2}\,.$$

Nyní postupně z (4), z Fubiniovy věty, z právě dokázaného a z (12), (13) plyne

$$I(h_n, z) = \int_0^1 \left(\int_{K_{m-1}} \frac{|h'(t_m)(t_m - z_m) + h(z_m) - h(t_m)| \,\mathrm{d}\hat{t}}{((t_m - z_m)^2 + (h(z_m) - h(t_m))^2 + |\hat{t} - \hat{z}|^2)^{(m+1)/2}} \right) \mathrm{d}t_m \geqq$$

$$\geqq \eta \int_0^1 \frac{|h'(t_m)(t_m - z_m) + h(z_m) - h(t_m)|}{(t_m - z_m)^2 + (h(z_m) - h(t_m))^2} \,\mathrm{d}t_m \geqq \tfrac{1}{2}\eta q \sum_{s=2}^{n} s^{-1} .$$

Lemma je dokázáno.

13. Lemma. *Buď $z \in K^0$, $f, g \in C_1$ a $I(g, z) < \infty$. Potom je*

$$I(f + g, z) \geqq (2 + 2\|g\|^2)^{-(m+1)/2} I(f, z) - (1 + \|g\|^2)^{(m+1)/2} I(g, z) .$$

Důkaz. Nechť $t \in K^0$. Uvážíme-li, že $|g(t) - g(z)| \leqq \|g\| \, |t - z|$, snadno ověříme následující nerovnosti:

$$(1 + \|g\|^2)^{-1} (|t - z|^2 + (g(t) - g(z))^2) \leqq |t - z|^2 \leqq |t - z|^2 +$$
$$+ (f(z) + g(z) - f(t) - g(t))^2 \leqq |t - z|^2 + 2(f(z) - f(t))^2 +$$
$$+ 2(g(z) - g(t))^2 \leqq (2 + 2\|g\|^2)(|t - z|^2 + (f(z) - f(t))^2) .$$

Nyní důkaz tvrzení snadno dokončíme pomocí vyjádření (4).

14. Označení. Buď $\tilde{z} \in E_{m+1}$; na množině $E_{m+1} - \{\tilde{z}\}$ definujeme zobrazení $\Pi_{\tilde{z}}$ takto:

$$\Pi_{\tilde{z}}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - \tilde{z}}{|\tilde{x} - \tilde{z}|} .$$

Pro každou množinu $M \subset E_{m+1}$, pro niž $\tilde{z} \notin M$, je zřejmě $\Pi_{\tilde{z}}(M) \subset \Gamma$.

15. Lemma. *Buď M konvexní těleso v E_{m+1}, $\tilde{z} \in M^0$. Potom existuje číslo A_2 takové, že pro každé $\tilde{x}, \tilde{y} \in$ hr M platí*

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| \leqq A_2 |\Pi_{\tilde{z}}(\tilde{x}) - \Pi_{\tilde{z}}(\tilde{y})| .$$

Důkaz. Buď $\delta > 0$ takové, že $\Gamma_1 = \mathrm{hr}\, \Omega_{m+1}(\tilde{z}, \delta) \subset M^0$ a buď p projekce množiny Γ_1 z bodu $\tilde{z}$ na množinu hr M. Nejprve dokážeme, že existuje číslo A_3 tak, že pro každé $u, v \in \Gamma_1$ platí

(15) $$|p(u) - p(v)| \leqq A_3 |u - v| .$$

Pro $u, v \in \Gamma_1$ označme $\varphi(u, v)$ neorientovaný úhel vektorů $u - \tilde{z}$, $v - \tilde{z}$. K důkazu (15) stačí zřejmě ověřit, že výraz

$$\frac{|p(u) - p(v)|}{\sin \varphi(u, v)}$$

je omezený pro všechna dostatečně malá kladná $\varphi(u, v)$.

Nechť $T_1(u)$ je plášť tečného kužele opsaného ke Γ_1 z bodu $p(u)$ a $2\omega(u)$ je jeho vrcholový úhel. Pak

$$\min_{u\in\Gamma_1} \omega(u) = \omega_0 > 0\,, \quad \max_{u\in\Gamma_1} \omega(u) = \omega_1 < \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Uvažujeme body $u \neq v \in \Gamma_1$ takové, že $\varphi(u, v) < \min\left(\frac{1}{2}\pi - \omega_1, \omega_0\right)$. Pak polopřímka $\overrightarrow{\tilde{z}v}$ protne $T_1(u)$ v bodě $p_1(v)$, který patří do M, neboť leží na úsečce, jejíž koncové body jsou $p(u)\,(\in M)$ a bod dotyku $\Gamma_1(\subset M)$ s polopřímkou $\overrightarrow{p(u)\,p_1(v)}$. Buď $T_2(u)$ množina souměrná k $T_1(u)$ vzhledem k bodu $p(u)$. Potom $T_1(u)$, $T_2(u)$ jsou odděleny opěrnou nadrovinou k M v $p(u)$. Průsečík $p_2(v)$ polopřímky $\overrightarrow{\tilde{z}v}$ s $T_2(u)$ tedy nepatří do M. Mezi body $p_1(v)$, $p_2(v)$ tedy leží průsečík $p(v)$ polopřímky $\overrightarrow{\tilde{z}v}$ s hr M, takže $|p(v) - p(u)|$ je sevřeno mezi $|p(u) - p_1(v)|$ a $|p(u) - p_2(v)|$. Uvažujme trojúhelník o vrcholech $p(u)$, $p_1(v)$, $p_2(v)$. Úhly při jeho vrcholech jsou pořadě $2\pi - \omega(u)$, $\omega(u) + \varphi(u, v)$, $\omega(u) - \varphi(u, v)$. Je tedy

$$\frac{|p_2(v) - p(u)|}{|p_1(v) - p(u)|} = \frac{\sin(\omega(u) + \varphi(u, v))}{\sin(\omega(u) - \varphi(u, v))} \to 1$$

pro $\varphi(u, v) \to 0+$ a to stejnoměrně vzhledem k $\omega(u) \in \langle\omega_0, \omega_1\rangle$. Stačí tedy odhadnout shora

$$\frac{|p_1(v) - p(u)|}{\sin\varphi(u, v)}$$

pro malá $\varphi(u, v)$. Je ovšem

$$\frac{|p_1(v) - p(u)|}{\sin\varphi(u, v)} = \frac{|p_1(v) - \tilde{z}|}{\sin\omega(u)} \leqq \frac{\operatorname{diam} M}{\sin\omega_0}\,,$$

kde diam M je průměr množiny M. Platí tedy (15).

Nechť nyní $\tilde{x} \in$ hr M. Snadno zjistíme, že $p(\tilde{z} + \delta\Pi_{\tilde{z}}(\tilde{x})) = \tilde{x}$ a tedy podle (15) máme pro každé $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in$ hr M

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| \leqq A_3\delta\,|\Pi_{\tilde{z}}(\tilde{x}) - \Pi_{\tilde{z}}(\tilde{y})|\,.$$

Nyní položíme $A_2 = A_3\delta$.

16. Lemma. *Buď M konvexní těleso v E_{m+1}, $\tilde{z}_0 \in M^0$, L kompaktní podmnožina* hr M. *Místo $\Pi_{\tilde{z}_0}$ budeme psát $\Pi = [\Pi_1, \ldots, \Pi_{m+1}]$. Pro $\tilde{z} \in E_{m+1}$, $\tilde{x} \in E_{m+1}$ položme $T_{\tilde{z}}(\tilde{x}) = \tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0$. Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta)$ je*

$$|H(\Pi(T_{\tilde{z}}(L))) - H(\Pi(L))| \leqq \varepsilon\,.$$

Důkaz. V tomto důkazu označíme ϱ euklidovskou metriku v E_{m+1}. Buď $\zeta \in (0, 1)$, $\delta_0 \in (0, \frac{1}{2}\varrho(\tilde{z}_0, L))$ a označme $L^* = \{\tilde{u};\, \tilde{u} \in E_{m+1},\ \varrho(\tilde{u}, L) \leqq 2\delta_0\}$. Potom je L^*

kompaktní množina a $\tilde{z}_0 \notin L^*$. Existuje (např. [6] věta 3.3) takové číslo A_1, že platí implikace

(16) $$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L^* \Rightarrow |\Pi(\tilde{u}_1) - \Pi(\tilde{u}_2)| \leqq A_1 |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2| .$$

Z lemmatu 15 plyne, že existuje číslo A_2 takové, že platí implikace

(17) $$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L \Rightarrow |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2| \leqq A_2 |\Pi(\tilde{u}_1) - \Pi(\tilde{u}_2)| .$$

Ze stejnoměrné spojitosti zobrazení $\operatorname{grad} \Pi_j$ na L^* plyne, že existuje $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tak, že pro každé $1 \leqq j \leqq m + 1$ platí

(18) $$|\operatorname{grad} \Pi_j(\tilde{u}_1) - \operatorname{grad} \Pi_j(\tilde{u}_2)| \leqq A_2^{-1}(m + 1)^{-1/2} \zeta ,$$

kdykoli $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in L^*$, $|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2| < 2\delta_1$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2}A_1^{-1}A_2^{-1}\delta_1\zeta)$.

Je-li $\tilde{x}, \tilde{y} \in L$, $|\tilde{x} - \tilde{y}| \geqq \delta_1$, $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta)$, je $\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0 \in L^*$, $\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0 \in \in L^*$ a z (16) a (17) dostáváme

(19) $$\frac{|\Pi(\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{x}) + \Pi(\tilde{y})|}{|\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|} \leqq$$
$$\leqq \frac{|\Pi(\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{x})| + |\Pi(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{y})|}{|\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|} \leqq$$
$$\leqq 2|\tilde{z} - \tilde{z}_0| A_1 A_2 \delta_1^{-1} < \zeta .$$

Nechť $\tilde{x}, \tilde{y} \in L$, $0 < |\tilde{x} - \tilde{y}| < \delta_1$, $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta)$, $1 \leqq j \leqq m + 1$. Snadno zjistíme, že potom leží úsečka U_1 (resp. U_2) o koncových bodech $\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0$, $\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0$ (resp. $\tilde{x}$, $\tilde{y}$) ve vnitřku množiny L^* a existují body $\xi_j^1 \in U_1$, $\xi_j^2 \in U_2$ takové, že

(20) $$\Pi_j(\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi_j(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) = \operatorname{grad} \Pi_j(\xi_j^1) . (\tilde{x} - \tilde{y}) ,$$
$$\Pi_j(\tilde{x}) - \Pi_j(\tilde{y}) = \operatorname{grad} \Pi_j(\xi_j^2) . (\tilde{x} - \tilde{y}) .$$

Protože

$$|\xi_j^1 - \xi_j^2| \leqq |\tilde{x} - \tilde{y}| + |\tilde{z} - \tilde{z}_0| < 2\delta_1 ,$$

je podle (20), (18) a (17)

(21) $$\frac{|\Pi(\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{x}) + \Pi(\tilde{y})|}{|\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|} \leqq$$
$$\leqq \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}| \left(\sum_{j=1}^{m+1} |\operatorname{grad} \Pi_j(\xi_j^1) - \operatorname{grad} \Pi_j(\xi_j^2)|^2\right)^{1/2}}{|\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|} \leqq A_2 A_2^{-1} \zeta = \zeta .$$

Označme nyní $\Gamma' = \Pi(L)$, Π^L restrikci zobrazení Π na L a pro $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_0)$ a pro $\tilde{x} \in \Gamma'$ položíme $\varphi_{\tilde{z}}(\tilde{x}) = \Pi(T_{\tilde{z}}(\Pi_{-1}^L(\tilde{x})))$. Zřejmě je $\varphi_{\tilde{z}}$ zobrazení Γ' do Γ.

Buď $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta)$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Gamma'$, $\tilde{u} \neq \tilde{v}$, $\tilde{x} = \Pi^L_{-1}(\tilde{u})$, $\tilde{y} = \Pi^L_{-1}(\tilde{v})$. Potom podle (19) a (21) je

$$\left| \frac{|\varphi_{\tilde{z}}(\tilde{u}) - \varphi_{\tilde{z}}(\tilde{v})| - |\tilde{u} - \tilde{v}|}{|\tilde{u} - \tilde{v}|} \right| \leqq \frac{|\varphi_{\tilde{z}}(\tilde{u}) - \varphi_{\tilde{z}}(\tilde{v}) - \tilde{u} + \tilde{v}|}{|\tilde{u} - \tilde{v}|} =$$

$$= \frac{|\Pi(\tilde{x} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}_0) - \Pi(\tilde{x}) + \Pi(\tilde{y})|}{|\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|} \leqq \zeta .$$

Vidíme tedy, že ke každému $\zeta \in (0, 1)$ existuje $\delta \in (0, \delta_0)$ tak, že platí implikace

$$\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta), \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in \Gamma' \Rightarrow \big||\varphi_{\tilde{z}}(\tilde{u}) - \varphi_{\tilde{z}}(\tilde{v})| - |\tilde{u} - \tilde{v}|\big| \leqq \zeta |\tilde{u} - \tilde{v}| .$$

Odtud a ze známé věty o Hausdorffově míře (např. [6], věta 1.7) plyne, že pro $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta)$ je

$$|H(\varphi_{\tilde{z}}(\Gamma') - H(\Gamma')| \leqq ((1 - \zeta)^{-m} - 1)\, H(\varphi_{\tilde{z}}(\Gamma')) \leqq$$
$$\leqq ((1 - \zeta)^{-m} - 1)\, H(\Gamma) .$$

Odtud a z definice $\varphi_{\tilde{z}}$ tvrzení snadno plyne.

17. Označení. Ponechme označení odst. 2 a 14. Pro $f \in C$, $z \in K^0$ sestrojíme množiny $G = G_f$, L'_f, bod $\tilde{z}$ a čísla μ_f, $v^f(z)$ stejně jako v odst. 3. Pro $\theta \in \Gamma$ buď $n^f(\theta, z) = n^G(\theta, \tilde{z})$. Dále buď $M^z_f = \Pi_{\tilde{z}}(L'_f)$, $p^f(z) = H(M^z_f)$. Konečně je funkce $c^f(\theta, z)$ proměnné $\theta \in \Gamma$ charakteristickou funkcí množiny M^z_f. Ve zřejmém smyslu budeme o $v^f(z)$, $p^f(z)$ mluvit také jako o funkcích na $K^0 \times C$.

18. Lemma. *Funkce $v^f(z)$ je zdola polospojitá na $K^0 \times C$.*

Důkaz. Nechť $z_0 \in K^0$, $f_0 \in C$, $k \in E_1$ a nechť $v^{f_0}(z_0) > k$. Budeme psát $\tilde{z}_0 = [z_0, f(z_0)]$. Z tvrzení A z odst. 2 plyne, že existuje funkce $\psi_0 \in D$ tak, že $\tilde{z}_0 \notin T = \operatorname{spt} \psi_0$ a

$$d = \int_{G_{f_0}} \operatorname{grad} \psi_0(\tilde{x}) \cdot \frac{\tilde{x} - \tilde{z}_0}{|\tilde{x} - \tilde{z}_0|^{m+1}}\, d\tilde{x} > k .$$

Položme $\varepsilon = d - k$; je tedy $\varepsilon > 0$. Pro $f \in C$, $\tilde{z} \in E_{m+1} - T$ položme

$$Q(f, \tilde{z}) = \int_{G_f} \operatorname{grad} \psi_0(\tilde{x}) \cdot \frac{\tilde{x} - \tilde{z}}{|\tilde{x} - \tilde{z}|^{m+1}}\, d\tilde{x} .$$

Užitím známých vět integrálního počtu snadno dokážeme, že existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $f \in C$, $\|f - f_0\|_C < \delta_1$ a $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_1)$ je $\tilde{z} \notin T$ a

(22) $$|Q(f, \tilde{z}) - Q(f_0, \tilde{z}_0)| < \varepsilon .$$

Zřejmě existuje $\delta > 0$ tak, že pro $z \in K^0$ taková, že $|z - z_0| < \delta$, a pro $f \in C$, pro něž $\|f - f_0\|_C < \delta$, platí pro $\tilde{z} = [z, f(z)]$ vztah $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_1)$ a tedy podle (22) je

$$Q(f, \tilde{z}) > Q(f_0, \tilde{z}_0) - \varepsilon = k\,.$$

Podle tvrzení A a z definice $v^f(z)$ máme pro zmíněná f, z

$$v^f(z) \geqq Q(f, \tilde{z}) > k\,.$$

Odtud tvrzení lemmatu plyne.

19. Lemma. *Funkce $p^f(z)$ je spojitá na $K^0 \times C$.*

Důkaz. Buď $z_0 \in K^0$, $f_0 \in C$, $\tilde{z}_0 = [z_0, f_0(z_0)]$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta_1 > 0$ tak, aby $\Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, 2\delta_1) \subset K \times E_1$ a dále určeme $R > 0$ tak, aby pro $f \in C$, pro něž $\|f - f_0\|_C < 1$, bylo $L'_f \subset \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, R)$. Není obtížné ověřit (srv. [6] věta 3.3), že existuje $\beta > 0$ tak, že pro všechna $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_1)$ platí

$$|\Pi_{\tilde{z}}(\tilde{x}) - \Pi_{\tilde{z}}(\tilde{y})| \leqq \beta|\tilde{x} - \tilde{y}|\,,$$

kdykoli $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, R) - \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, 2\delta_1)$. Odtud a ze známých vět o Hausdorffově míře snadno plyne, že existuje $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tak, že pro $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_2)$, $f \in C$, pro něž $\|f - f_0\|_C < \delta_2$, je

$$|H(\Pi_{\tilde{z}}(L'_f) - H(\Pi_{\tilde{z}}(L'_{f_0}))| < \varepsilon\,. \tag{23}$$

Dále budeme místo $\Pi_{\tilde{z}_0}$ psát pouze Π a zobrazení $T_{\tilde{z}}$ budeme definovat stejně jako v lemmatu 16. Potom pro $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_1)$ je zřejmě $\Pi_{\tilde{z}}(L'_{f_0}) = \Pi(T_{\tilde{z}}(L'_{f_0}))$. Předpoklady lemmatu 16 jsou splněny, položíme-li $M = K \times \langle \mu_{f_0} - 1, \max_{x \in K} f_0(x) \rangle$, $L = L'_{f_0}$. Podle tvrzení tohoto lemmatu existuje $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tak, že pro $\tilde{z} \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_3)$ je

$$|H(\Pi_{\tilde{z}}(L'_{f_0})) - H(\Pi(L'_{f_0}))| < \varepsilon\,. \tag{24}$$

Zřejmě existuje $\delta > 0$ tak, že pro $z \in K^0$, pro něž $|z - z_0| < \delta$ a $f \in C$, pro něž $\|f - f_0\|_C < \delta$, je $\tilde{z} = [z, f(z)] \in \Omega_{m+1}(\tilde{z}_0, \delta_3)$ a tedy z definice $p^f(z)$ a ze (23), (24) plyne pro taková f, z

$$|p^f(z) - p^{f_0}(z_0)| \leqq |p^f(z) - p^{f_0}(z)| + |p^{f_0}(z) - p^{f_0}(z_0)| < 2\varepsilon\,.$$

Odtud již tvrzení plyne.

20. Lemma. *Buď $\varepsilon > 0$. Nechť ψ má spojitou derivaci na intervalu $\langle 0, 1 + \varepsilon)$ a nechť $\psi(1) - \psi(0) - \psi'(1) \neq 0$. Pro $t \in E_1$ buď $\omega(t) = t(\psi(1) - \psi(0)) + \psi(0)$. Potom existuje δ, $0 < \delta < \min(1, \varepsilon)$, tak, že pro každé t, pro něž $0 < t < \delta$, je $(\omega(1 + t) - \psi(1 + t))(\omega(1 - t) - \psi(1 - t)) < 0$.*

Důkaz. Pro $t \in \langle 0, 1 + \varepsilon)$ položme $\varrho(t) = \omega(t) - \psi(t)$. Zřejmě $\varrho'(1) = \psi(1) - \psi(0) - \psi'(1)$. Vidíme, že $\varrho(1) = 0$ a že funkce ϱ je v bodě $t = 1$ buď rostoucí nebo klesající. Odtud naše tvrzení plyne.

21. Označení. Buď $z \in K^0$, $f \in C_1$, $\tilde{z} = [z, f(z)]$. Pro $t \in K^0 - \{z\}$ položme $\Phi(t) = \Pi_{\tilde{z}}([t, f(t)])$. Potom je zřejmě $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_{m+1}]$ zobrazení třídy C_1 množiny $K^0 - \{z\}$ do Γ. Označme $M_\Phi(t)$ matici typu $(m + 1, m)$ o řádcích grad $\Phi_i(t)$, dále buď $D_\Phi(t) = (\det (M'_\Phi(t)\, M_\Phi(t)))^{1/2}$.

22. Lemma. *Buď $t \in K^0 - \{z\}$, $\theta = \Phi(t)$ a předpokládejme, že $D_\Phi(t) \neq 0$. Označme $\tilde{t} = [t, f(t)]$. Potom je $\tilde{t}$ naráz polopřímky $\{\tilde{z} + \varrho\theta;\ \varrho > 0\}$ na G_f.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby pro $\tau \in \langle 0, 1 + \varepsilon)$ bylo $z + \tau(t - z) \in K^0$. Pro tato τ položíme $\varphi(\tau) = z + \tau(t - z)$, $\Psi(\tau) = \Phi(\varphi(\tau))$, $\psi(\tau) = f(\varphi(\tau))$. Snadno zjistíme, že $\Psi'(1) = M_\Phi(t)\,(t - z)$. Protože $D_\Phi(t) \neq 0$, má matice $M_\Phi(t)$ hodnost m a tedy $|\Psi'(1)| \neq 0$. Přímým výpočtem ověříme, že

$$|\Psi'(1)| = \frac{|t - z|\,|f(t) - f(z) - \operatorname{grad} f(t)\,.\,(t - z)|}{|t - z|^2 + (f(t) - f(z))^2}\,.$$

Všimněme si, že $f(t) = \psi(1)$, $f(z) = \psi(0)$, $\operatorname{grad} f(t)\,.\,(t - z) = \psi'(1)$, a protože $|\Psi'(1)| \neq 0$, je $\psi(1) - \psi(0) - \psi'(1) \neq 0$. Nyní tvrzení lemmatu plyne z definice G_f, definice nárazu a z lemmatu 20.

23. Lemma. *Je-li $B \subset E_{m+1}$ uzavřená, $\tilde{z} \in E_{m+1}$, $\theta \in \Gamma$, pak označíme $N(\theta)$ počet prvků množiny $B_\theta = B \cap \{\tilde{z} + \varrho\theta;\ \varrho > 0\}$ $(0 \leqq N(\theta) \leqq \infty)$. Potom je $N(\theta)$ baireovská funkce proměnné θ na Γ.*

Důkaz. Položme $\Omega_{m+1}(\tilde{z}, 0) = \{\tilde{z}\}$ a pro přirozená n, k označme $\omega_n^k = \overline{\Omega_{m+1}(\tilde{z}, k\,.\,2^{-n})} - \Omega_{m+1}(\tilde{z}, (k - 1)\,.\,2^{-n})$. Buď χ_n^k charakteristická funkce množiny $\{\theta, \theta \in \Gamma, B_\theta \cap \omega_n^k \neq \emptyset\}$. Snadno zjistíme, že tato množina je typu F_σ, tedy funkce χ_n^k je baireovská, takže totéž platí o funkci $l_n = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_n^k$. Není obtížné nahlédnout, že pro každé $\theta \in \Gamma$ je $l_n(\theta)$ rovno počtu těch ω_n^k (k přirozené), které obsahují aspoň jeden bod množiny B_θ. Odtud snadno plyne, že $\{l_n(\theta)\}$ je neklesající posloupnost s limitou $N(\theta)$. Protože l_n jsou baireovské funkce proměnné θ, platí totéž i o funkci $N = \lim_{n \to \infty} l_n$.

24. Definice. Pro $f \in C$ položme

$$B_f = \{[x, t] \in E_{m+1};\ x \in K,\ t = f(x)\}$$

(graf funkce f na množině K). Buď $z \in K^0$, $\tilde{z} = [\tilde{z}, f(z)]$. Pro $\theta \in \Gamma$ nechť $N^f(\theta, z)$ znamená počet prvků množiny $B_f \cap \{\tilde{z} + \varrho\theta;\ \varrho > 0\}$ $(0 \leqq N^f(\theta, z) \leqq \infty)$. Podle lemmatu 23 je $N^f(\theta, z)$ baireovskou funkcí proměnné θ na Γ. Definujeme

$$V^f(z) = \int_\Gamma N^f(\theta, z)\, \mathrm{d}H(\theta)\,.$$

Číslo $V^f(z)$ nazveme *cyklickou variací funkce* $f \in C$ v bodě $z \in K^0$. Pro pevné f považujeme V^f také ve zřejmém smyslu za funkci na K^0.

25. Lemma. *Ponechme označení zavedená v odst.* 17, 24. *Buď* $f \in C_1$, $z \in K^0$. *Potom existuje množina* $\Lambda \subset \Gamma$ *taková, že* $H(\Lambda) = 0$ *a pro každé* $\theta \in \Gamma - \Lambda$ *je*

$$n^f(\theta, z) = N^f(\theta, z) + c^f(\theta, z) . \tag{25}$$

Důkaz. Označme $\Lambda_1 = \Pi_{\tilde{z}}(B_f - L_f)$ $(\tilde{z} = [z, f(z)])$. Zřejmě $H(B_f - L_f) = 0$, tedy také $H(\Lambda_1) = 0$. Buď $Z = \{t;\ t \in K^0,\ D_\Phi(t) = 0\}$ (viz odst. 21), $\Lambda_2 = \Phi(Z)$. Podle Sardovy věty (viz [6], věta 3.14) je $H(\Lambda_2) = 0$. Položíme-li $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, je $\Lambda \subset \Gamma$ a $H(\Lambda) = 0$. Buď nyní $\theta \in \Gamma - \Lambda$ a označme $S = \{\tilde{z} + \varrho\theta;\ \varrho > 0\}$. Dále označme Q_1 množinu všech bodů z S, které jsou nárazem S na G_f, $Q_2 = \text{hr } G_f \cap S$, $Q_3 = (\text{hr } G_f - B_f) \cap S$. Snadno nahlédneme, že $Q_1 \subset Q_2$ a že množina Q_3 je nejvýše jednobodová. Zřejmě $Q_2 = (B_f \cap S) \cup Q_3$, kde sjednocení vpravo je disjunktní. Nechť $\tilde{t} \in Q_2$. Je-li $\tilde{t} \in Q_3$, pak je $\tilde{t}$ zřejmě nárazem S na G_f. Je-li $\tilde{t} \in B_f \cap S$, je $\tilde{t} = [t, f(t)]$, kde $t \in K^0$ neboť $\theta \notin \Lambda_1$. Protože $\theta \notin \Lambda_2$, je $D_\Phi(t) \neq 0$. Z lemmatu 22 plyne, že $\tilde{t}$ je nárazem S na G_f. Dokázali jsme, že $Q_1 = Q_2$. Protože $\theta \notin \Lambda_1$, je zřejmě $c^f(\theta, z) = 1$ právě když $Q_3 \neq \emptyset$. Nyní (25) plyne z našich definic.

Lemma je dokázáno.

26. Lemma. *Pro* $f \in C$, $z \in K^0$ *definujeme*

$$w^f(z) = v^f(z) - p^f(z) . \tag{26}$$

Potom je funkce $w^f(z)$ *zdola polospojitá na* $K^0 \times C$ *a platí*

$$v^f(z) - \sigma \leqq w^f(z) \leqq v^f(z) , \tag{27}$$

kde $\sigma = H(\Gamma)$.

Je-li $f \in C_1$, *potom*

$$w^f(z) = V^f(z) . \tag{28}$$

Důkaz. První tvrzení plyne z lemmat 18, 19. Z definice $p^f(z)$ plyne, že $0 \leqq p^f(z) \leqq \sigma$. Odtud a z (26) vztah (27) okamžitě plyne. Rovnost (28) plyne z (25), (26) a z našich definic.

27. Věta. *Předpokládejme, že parciální derivace prvního řádu funkce* f *jsou hölderovsky spojité na* K^0. *Potom je funkce* V^f *omezená na* K^0.

Důkaz. Plyne z (28), (27) a z lemmatu 10.

28. Označení. Pro přirozené r buď K^r m-rozměrný uzavřený krychlový interval o délce hrany $1 - (r + 1)^{-1}$ a o středu společném s K. Zřejmě $K^0 = \bigcup_{r=1}^{\infty} K^r$. Dále pro $f \in C$ buď $F_r(f) = \inf_{z \in K^r} w^f(z)$. Pro přirozené r, k označíme

$$A_{r,k} = \{f; f \in C,\ F_r(f) \leqq k\} .$$

29. Lemma. *Buďte r, k přirozená. Potom je množina $A_{r,k}$ uzavřená v C.*

Důkaz. Dokážeme, že funkce F_r je zdola polospojitá na C. Odtud naše tvrzení vyplyne podle známé věty. Buď $f_0 \in C$, $c \in E_1$, $c < F_r(f_0)$. Podle lemmatu 26 je funkce $w^f(z)$ zdola polospojitá na $K^0 \times C$ a tedy ke každému $z \in K^r$ existuje okolí $U(z)$ bodu z v K^0 a okolí $R(z)$ prvku f_0 v C tak, že $w^f(x) > c$, kdykoli $x \in U(z)$, $f \in R(z)$. Protože K^r je kompaktní, lze vybrat z $\{U(z)\}_{z \in K^r}$ konečné podpokrytí $\{U(z_i)\}_{i=1}^s$ krychle K^r. Uvědomíme-li si, že zdola polospojitá funkce nabývá na kompaktní množině svého minima, vidíme, že pro $f \in \bigcap_{i=1}^{s} R(z_i)$ je $F_r(f) > c$. Je tedy F_r zdola polospojitá v bodě $f_0 \in C$.

Lemma je dokázáno.

30. Lemma. *Buďte r, k přirozená. Potom je množina $A_{r,k} \cap C_1$ uzavřená a řídká v C_1.*

Důkaz. Protože pro $f \in C_1$ je $\|f\|_C \leqq m^{1/2}\|f\|$, plyne z lemmatu 29, že $A_{r,k} \cap C_1$ je uzavřená v C_1. Stačí tedy dokázat, že $C_1 - A_{r,k}$ je hustá v C_1.

Buď tedy $f \in C_1$ a $\varepsilon > 0$. Víme, že existuje funkce $\hat{f}$ mající spojité parciální derivace prvního řádu v E_m, pro niž $\hat{f} = f$ na K (např. [1], str. 50). Odtud snadno plyne, že existuje funkce $g \in C$, která má omezené parciální derivace druhého řádu v K^0 a pro niž $g(0) = 0$ a $\|g - f\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Z lemmatu 7 plyne, že existuje $b_1 > 0$ tak, že pro každé $z \in K^0$ je $I(g, z) \leqq b_1$. Zvolme q_0 tak, aby bylo

$$0 < q_0 < \min(1, \varepsilon/8\pi)\,. \tag{29}$$

Pro toto $q = q_0$ buď h_n (n přirozené) funkce definovaná v lemmatu 12. Z (2) a lemmatu 13 plyne, že pro každé $z \in K^0$ je

$$\begin{aligned} v^{h_n+g}(z) &\geqq I(h_n + g, z) \geqq (2 + 2\|g\|^2)^{-(m+1)/2}\, I(h_n, z) - \\ &- (1 + \|g\|^2)^{(m+1)/2}\, I(g, z) \geqq (2 + 2\|g\|^2)^{-(m+1)/2}\, I(h_n, z) - b_1(1 + \|g\|^2)^{(m+1)/2}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Buď, jako dříve, η číslo určené vztahem (5) pro $m > 1$, pro $m = 1$ buď $\eta = 1$, σ buď číslo z lemmatu 26. Zvolme n_0 tak velké, aby

$$(2 + 2\|g\|^2)^{-(m+1)/2}\, \eta\, \tfrac{1}{2} q_0 \sum_{s=2}^{n_0} s^{-1} - b_1(1 + \|g\|^2)^{(m+1)/2} - \sigma \geqq k + 1\,. \tag{31}$$

Položme $h = h_{n_0}$, $f_1 = h + g$. Zřejmě $f_1 \in C_1$ a z definice funkce h snadno plyne, že $\|h\| \leqq 4q_0\pi$. Dále plyne z (29) a z volby g, že $\|f - f_1\| \leqq \|h\| + \|g - f\| < \varepsilon$. Dále z (30), (14), (27) a (31) plyne, že pro každé $z \in K^0$ je $w^{f_1}(z) \geqq k + 1$ a tedy $F_r(f_1) > k$. Platí $f_1 \notin A_{r,k}$ a tedy je množina $C_1 - A_{r,k}$ hustá v C_1.

31. Věta. *Množina všech funkcí z C_1 majících nekonečnou cyklickou variaci v každém bodě intervalu K^0 je residuální v C_1.*

Důkaz. Zmíněnou množinu označme R. Buď $f \in C_1$. Předpokládejme, že existuje bod $z \in K^0$ tak, že $V^f(z) < \infty$. Potom pro dostatečně velká přirozená čísla r, k je $z \in K^r$, $V^f(z) \leqq k$ a podle (28) také $w^f(z) \leqq k$, tedy $f \in C_1 \cap A_{r,k}$. Vidíme, že $C_1 - R = \bigcup_{r,k=1}^{\infty} (A_{r,k} \cap C_1)$. Z lemmatu (30) plyne, že množina $C_1 - R$ je první kategorie v C_1.

Věta je dokázána.

32. Poznámky. 1. Postup důkazu věty 31 je zčásti shodný s postupem užitým v článku [3]. Pro $m = 1$ plyne tvrzení věty 31 z výsledku uvedeného v [3].

2. Z věty 31 plyne, že existují funkce z C_1, pro něž $V^f = \infty$ identicky na K^0. Buď f taková funkce a sestrojme množiny $G = G_f$, $L = L_f$ podle odst. 3. V souvislosti s některými otázkami teorie potenciálu [5] hraje důležitou roli konečnost (resp. omezenost) funkce v^G (viz odst. 2) na hr G. Právě sestrojená otevřená množina G má po částech hladkou hranici, a přesto, jak plyne z (28) a (27), je $v^G(\tilde{z}) = \infty$ dokonce pro všechna $\tilde{z} \in L$. Odtud a z výsledků [5] např. plyne, že ani požadavek, aby otevřená množina měla po částech hladkou hranici, nezaručí spojitou prodloužitelnost potenciálu dvojvrstvy pro každou spojitou hustotu.

3. Z věty 31 plyne, že v jistém smyslu „většina" funkcí z C_1 má identicky nekonečnou cyklickou variaci. Zároveň však z věty 27 vidíme, že pokud požadujeme, aby funkce f měla nekonečnou cyklickou variaci aspoň v některých bodech z K^0, nelze předpoklad o hladkosti f podstatně zesílit.

Literatura

[1] *W. H. Fleming:* Functions of Several Variables, Addison-Wesley Publ. Comp., INC., 1965.

[2] *K. Karták, J. Mařík:* A non-absolutely convergent integral in E_m and the theorem of Gauss, Czech. Math. J., *15 (90)*, 1965, 253—259.

[3] *J. Král:* Hladké funkce s nekonečnou cyklickou variací, Časopis pro pěst. mat., *93* (1968), 178—185.

[4] *J. Král:* Non-tangential limits of the logarithmic potential, Czech. Math J., *14 (89)*, 1964, 455—482.

[5] *J. Král:* The Fredholm method in potential theory, Trans. Amer. Math. Soc., *125* (1966), 511—547.

[6] *J. Král, J. Mařík:* Integrace podle Hausdorffovy míry na hladké ploše, Časopis pro pěst. mat., *89* (1964), 433—448.

[7] *J. Mařík:* Dirichletova úloha, Časopis pro pěst. mat., *82* (1957), 257—282.

[8] *J. Matyska:* Approximate differential and Federer normal, Czech. Math. J., *17 (92)*, 1967, 97—107.

[9] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной, Москва 1957.

Adresa autora: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

SMOOTH SURFACES WITH INFINITE CYCLIC VARIATION

IVAN NETUKA, Praha

Let $K = \prod_{i=1}^{m} \langle 0, 1 \rangle$ be the unit interval in E_m, the Euclidean m-space. Let f be a continuous function on K, $z \in K^0$ (= the interior of K), $\theta \in \Gamma = \{\theta;\ \theta \in E_{m+1}, |\theta| = 1\}$ and $\tilde{z} = [z, f(z)] \in E_{m+1}$. Write $N^f(\theta, z)$ for the number of points at which the graph of f meets the half-line $\{\tilde{z} + \varrho\theta;\ \varrho > 0\}$. Since $N^f(\theta, z)$ is a Baire function of the variable θ on Γ, one may introduce the cyclic variation $V^f(z)$ of f at z by setting

$$V^f(z) = \int_\Gamma N^f(\theta, z)\, \mathrm{d}H(\theta)$$

where H stands for the m-dimensional Hausdorff measure. In terms of similar quantities some results of potential theory have been formulated [5]. Let us denote by C_1 the set of all continuous functions f on K with $f(0) = 0$, the partial derivatives of the first order of which are uniformly continuous on K^0. Considering C_1 as a Banach space with the norm $\|f\| = \sup_{x \in K^0} |\operatorname{grad} f(x)|$, the existence of smooth functions having nowhere finite cyclic variation follows from the following theorem: The set of all $f \in C_1$ having $V^f(z) < \infty$ for at least one $z \in K^0$ is of the first category in C_1. In connection with this result it is interesting to note that $V^f(z)$ is bounded on K^0 provided the partial derivatives of the first order of f are Hölder-continuous on K^0.