Václav Pecina

K základní větě n-rozměrné centrální axonometrie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 81--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117702

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

K ZÁKLADNÍ VĚTĚ n-ROZMĚRNÉ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

(Došlo dne 13. listopadu 1969)

Označme E^n n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor a $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ lineární obal lineárních prostorů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

Definice 1. Nechť k, n jsou přirozená čísla $(2 \leqq k \leqq n, n \geqq 3)$. Konfiguraci navzájem různých bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ nazveme *n-ramenná, k-rozměrná polyedrická konfigurace* a označíme $K_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže:

1. O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je trojice kolineárních bodů, body O, A_i jsou vlastní.
2. Pro přímky $x_i = OA_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{E}^k$.

Definice 2. Konfiguraci $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\}$ nazveme *souřadnicovou*, jestliže:
1. body B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou nevlastní,
2. soustava vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je ortonormální.

Definice 3. Konfigurace $K_q^r \equiv \{O, A_i, B_i\}$ $(2 \leqq q < n, 2 \leqq r \leqq k)$ je *částečnou konfigurací* konfigurace $K_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže body O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ jsou oběma konfiguracím společné; $K_q^r \subset K_n^k$.

Definice 4. Nechť $\mathscr{P}$ je centrální projekce v E^n s basí $[\mathsf{E}^r, \mathsf{E}^k]$ (tj. z centra E^r do prostoru E^k, přičemž $r = n - k - 1$, $2 \leqq k < n$, $\mathsf{E}^r \cap \mathsf{E}^k = \emptyset$). Konfigurace ${}^1K_n^q \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ je centrální projekcí $\mathscr{P}(K_n^p)$ konfigurace $K_n^p \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže ${}^1O = \mathscr{P}(O)$, ${}^1A_i = \mathscr{P}(A_i)$, ${}^1B_i = \mathscr{P}(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 5. Simplex s vrcholy $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$ nazveme n-rozměrný a označíme $S^n(V_1, V_2, \ldots, V_{n+1})$, jestliže $L(V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}) = \mathsf{E}^n$.

Pomocná věta. *Nechť jsou dány konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\}$ *v* E^n $(n \geqq 3)$ *a* ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$ *v* ${}^0\mathsf{E}^{n-1}$. *Nechť* $(OA_iB_i) \neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *a* $S^{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ *popř.* ${}^0S^{n-1}({}^0W_1, {}^0W_2, \ldots, {}^0W_n)$ *je simplex tvořený úběžníky přímek* x_i *popř.* ${}^0x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *v projektivnostech bodových řad* $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nutná a postačující podmínka pro existenci bodu S a prostoru ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ ($S \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n$, $S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1}$), jež tvoří basi $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ centrální projekce $\mathscr{P}$ tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$, je $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$.

Důkaz. a) Nechť $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$. Označme $\mathsf{E}^{n-1} = L(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, kde $x_i = OA_i$. Projektivnosti ${}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \dots) \barwedge x_i(O, A_i, B_i, \dots)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, stanoví projektivní zobrazení $\Pi_1 : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to \mathsf{E}^{n-1}$. Sestrojme

$$\bar{x}_n(O, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \dots) = \Pi_1({}^0x_n({}^0O, {}^0A_n, {}^0B_n, \dots)) \,. \tag{1}$$

Pak je

$$\bar{x}_n(O, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n, \dots) \barwedge x_n(O, A_n, B_n, V_n, W_n^{\infty}, \dots) \,, \tag{2}$$

kde $\bar{V}_n = \Pi_1({}^0V_n^{\infty})$, $\bar{W}_n = \Pi_1({}^0W_n)$ a ${}^0V_n^{\infty}$ je nevlastní bod přímky ${}^0x_n$. Jistě je $L(V_1, V_2, \dots, V_n) = {}^2\mathsf{E}^{n-1}$. Bod O je samodružný v projektivnosti (2) a (2) je tedy perspektivností se středem S, přičemž $S \subset {}^2\mathsf{E}^{n-1}$ je vlastní bod (v opačném případě by byl nevlastní i bod V_n a platilo by $(OA_nB_n) = ({}^0O{}^0A_n{}^0B_n)$). Vezměme nadrovinu ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ rovnoběžnou s ${}^2\mathsf{E}^{n-1}$ ($S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1}$), zvolme $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ za basi centrální projekce $\mathscr{P}$ a sestrojme $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Pak v důsledku perspektivnosti (2) je

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(x_n(O, A_n, B_n, V_n, W_n^{\infty}, \dots)) &= \mathscr{P}(\bar{x}_n(O, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n, \dots)) = \\ &= {}^1x_n({}^1O, {}^1A_n, {}^1B_n, {}^1V_n^{\infty}, {}^1W_n, \dots) \,,\end{aligned} \tag{3}$$

přičemž

$${}^1x_n({}^1O, {}^1A_n, {}^1B_n, {}^1V_n^{\infty}, {}^1W_n, \dots) \barwedge {}^0x_n({}^0O, {}^0A_n, {}^0B_n, {}^0V_n^{\infty}, {}^0W_n, \dots) \,. \tag{4}$$

Dále je $\mathscr{P}(x_i(O, A_i, B_i, V_i, W_i^{\infty}, \dots)) = {}^1x_i({}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i, {}^1V_i^{\infty}, {}^1W_i, \dots)$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, přičemž

$${}^1x_i({}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i, {}^1V_i^{\infty}, {}^1W_i, \dots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, {}^0V_i^{\infty}, {}^0W_i, \dots) \tag{5}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Projektivnosti (5) stanoví projektivní zobrazení $\Pi_2 : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$. Z (1) a (3) plyne ${}^1K_n^{n-1} = \Pi_2({}^0K_n^{n-1})$. V Π_2 si odpovídají nevlastní podprostory ${}^0\mathsf{E}_{\infty}^{n-2}$ a ${}^1\mathsf{E}_{\infty}^{n-2}$ nadrovin ${}^0\mathsf{E}^{n-1}$ a ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ a Π_2 je tedy afinita. Poněvadž simplex ${}^1S^{n-1}({}^1W_1, {}^1W_2, \dots, {}^1W_n)$ je řezem trsu přímek $S(SW_1^{\infty}, SW_2^{\infty}, \dots, SW_n^{\infty})$ nadrovinou ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ a simplex $S^{n-1}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ je řezem trsu přímek $O(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nadrovinou ${}^2\mathsf{E}^{n-1}$, přičemž $SW_i^{\infty} \parallel x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) a ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \parallel {}^2\mathsf{E}^{n-1}$, je $S^{n-1} \sim {}^1S^{n-1}$. Poněvadž ${}^0S^{n-1} \sim S^{n-1}$, je také ${}^0S^{n-1} \sim {}^1S^{n-1}$ a Π_2 je podobnost. Pak je ${}^0K_n^{n-1} \sim {}^1K_n^{n-1}$.

Nabývá-li nadrovina ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ ($S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1}$) všech možných poloh rovnoběžných s nadrovinou ${}^2\mathsf{E}^{n-1}$, jsou při pevném S konfigurace ${}^1K_n^{n-1} = \mathscr{P}(K_n^n)$ homotetické (koeficient homotetie nabývá všech nenulových hodnot) a lze vybrat ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ tak, že ${}^1K_n^{n-1} \cong {}^0K_n^{n-1}$.

b) Nechť ${}^1K_n^{n-1} = \mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$. Pak nevlastní body W_i^{∞} přímek $x_i = OA_i$ se promítají přímkami $S^1W_i \parallel x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Poněvadž simplexy ${}^1S^{n-1}({}^1W_1, {}^1W_2, \dots, {}^1W_n)$, $S^{n-1}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ jsou řezy trsů přímek $O(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $S(S^1W_1,$

$S^1W_2, \ldots, S^1W_n)$ rovnoběžnými nadrovinami, jsou podobné. Z ${}^1K_n^{n-1} \cong {}^0K_n^{n-1}$ pak plyne ${}^0S^{n-1} \sim S^{n-1}$.

Věta 1. *Nechť je v nadrovině* ${}^0\mathsf{E}^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ *dána konfigurace* ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$ *s vlastními body* ${}^0B_i$, *pro něž platí* $\mathsf{L}({}^0B_1, {}^0B_2, \ldots, {}^0B_n) = {}^0\mathsf{E}^{n-1}$; *označme* $\lambda_i = 1 - ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Pak existují prostory* $\mathsf{E}^0 \equiv S \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \subset \mathsf{E}^n$, *jež tvoří basi* $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* E^n *a souřadnicová konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset \mathsf{E}^n$ *tak, že* $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$, *právě tehdy, když hrany* ${}^0B_i{}^0B_j$ *simplexu* ${}^0S^{n-1}({}^0B_1, {}^0B_2, \ldots, {}^0B_n)$ *mají velikosti* ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$; $k > 0$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. a) Nechť existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) \cong \cong {}^0K_n^{n-1}$. Sestrojme úběžníky V_i přímek x_i v projektivnostech bodových řad ${}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots) \barwedge x_i(O, A_i, B_i^\infty, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. V důsledku pomocné věty je $S^{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_n) \sim {}^0S^{n-1}({}^0B_1, {}^0B_2, \ldots, {}^0B_n)$. Z rovnosti dvojpoměrů $({}^0O{}^0A_i{}^0B_i{}^0V_i^\infty) = (OA_iB_i^\infty V_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, postupně plyne

$$({}^0O{}^0A_i{}^0B_i) = \frac{1}{(OA_iV_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$1 - \lambda_i = \frac{\overrightarrow{A_iV_i}}{\overrightarrow{OV_i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Odtud po dosazení $\overrightarrow{A_iV_i} = \overrightarrow{OV_i} - \overrightarrow{OA_i}$ a úpravě obdržíme $\lambda_i = \overrightarrow{OA_i}/\overrightarrow{OV_i}$, $i = = 1, 2, \ldots, n$. Vzhledem k $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$ platí $|\overrightarrow{OV_i}| = 1/|\lambda_i|$. Pak je $V_iV_j = \sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Z $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$ pak plyne ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$.

b) Nechť v ${}^0K_n^{n-1}$ platí ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$ $(k > 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Zvolme libovolně souřadnicovou konfiguraci $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\}$ a sestrojme body V_i na přímkách $x_i = OA_i$ tak, aby $(OA_iV_i) = 1/(1 - \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud analogicky jako v první části důkazu nalezneme $V_iV_j = \sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$ $(i \neq j;\ i, j = = 1, 2, \ldots, n)$, a tedy platí $S^{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_n) \sim {}^0S^{n-1}$. Z

$$(OA_iV_i) = \frac{1}{1 - \lambda_i} = \frac{1}{({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)}$$

plyne $(OA_iV_iB_i^\infty) = ({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^\infty\,{}^0B_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a tedy body $V_i({}^0B_i)$ jsou úběžníky přímek $x_i({}^0x_i)$ v projektivnostech bodových řad ${}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots) \barwedge \barwedge x_i(O, A_i, B_i^\infty, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jistě je $({}^0O\,{}^0A_i{}^0B_i) \neq (OA_iB_i^\infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak podle pomocné věty existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$.

Věta 2. *Nechť v* ${}^0\mathsf{E}^m \subset {}^0\mathsf{E}^n$ $(m \geqq 2,\ n \geqq m + 1)$ *je dána konfigurace* ${}^0K_n^m \equiv \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$ *s vlastními body* ${}^0B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$. *Nechť* $\lambda_i = 1 - - ({}^0O\,{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$ *a* $\mathsf{L}({}^0B_1, {}^0B_2, \ldots, {}^0B_{m+1}) = {}^0\mathsf{E}^m$.

Postačující podmínka pro existenci souřadnicové konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset \subset E^n$ a prostorů $E^{n-m-1} \subset E^n$, ${}^1E^m \subset E^n$, jež tvoří basi $[E^{n-m-1}, {}^1E^m]$ centrální projekce $\mathscr{P}$ v E^n tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^m$ je: strany ${}^0B_i{}^0B_j$ simplexu ${}^0S^m({}^0B_1, {}^0B_2, \ldots$ $\ldots, {}^0B_{m+1})$ mají velikosti ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$, $(k > 0,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m + 1)$.

Důkaz. a) Nechť $n > m + 1$ a platí ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{(1/\lambda_i^2 + 1/\lambda_j^2)}$ $(k > 0,\ i \neq j;$ $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1)$. Zvolme souřadnicovou konfiguraci $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset E^n$ a uvažujme částečné konfigurace $K_{m+1}^{m+1} \subset K_n^n$, ${}^0K_{m+1}^m \subset {}^0K_n^m$. Poněvadž $K_{m+1}^{m+1} \subset \subset E^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$, kde $x_i = OA_i$ a ${}^0K_{m+1}^m \subset {}^0E^m$, existuje podle věty 1 v prostoru $E^{m+1} \subset E^n$ bod S a prostor ${}^1E^m$ tak, že v centrální projekci $\overline{\mathscr{P}}$ s basí $[S, {}^1E^m]$ (v prostoru E^{m+1}) je $\overline{\mathscr{P}}(K_{m+1}^{m+1}) = {}^1K_{m+1}^m \cong {}^0K_{m+1}^m$. Sestrojme nyní v ${}^1E^m$ konfiguraci ${}^1K_n^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ shodnou s ${}^0K_n^m$ tak, aby ${}^1K_{m+1}^m \subset {}^1K_n^m$. Poněvadž dvojice přímek $A_{m+i}{}^1A_{m+i}$, $B_{m+i}{}^1B_{m+i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n - m)$ jsou tvořeny mimoběžnými přímkami, ležícími vždy v témž trojrozměrném prostoru s bodem S, existují jejich příčky q_i $(i = 2, 3, \ldots, n - m)$ procházející bodem S. Zřejmě platí $L(q_2, q_3, \ldots$ $\ldots, q_{n-m}) = E^{n-m-1}$, $E^{n-m-1} \cap {}^1E^m = \emptyset$.

Zvolíme-li nyní $[E^{n-m-1}, {}^1E^m]$ za basi centrální projekce $\mathscr{P}$ v E^n, je $\mathscr{P}(K_{m+1}^{m+1}) = = {}^1K_{m+1}^m$ (je totiž ${}^1A_i = SA_i \cap {}^1E^m$, ${}^1B_i = SB_i \cap {}^1E^m$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$). Označíme-li $A_i^c = q_i \cap A_{m+i}{}^1A_{m+i}$, $B_i^c = q_i \cap B_{m+i}{}^1B_{m+i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n - m)$, je ${}^1A_{m+i} = A_{m+i}A_i^c \cap {}^1E^m$, ${}^1B_{m+i} = B_{m+i}B_i^c \cap {}^1E^m$, $i = 2, 3, \ldots, n - m$. Pak je ovšem $\mathscr{P}(A_i) = {}^1A_i$, $\mathscr{P}(B_i) = {}^1B_i$ pro $i = m + 2, m + 3, \ldots, n$. Je tedy $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^m \cong \cong {}^0K_n^m$.

b) Je-li $n = m + 1$, plyne tvrzení bezprostředně z věty 1.

Literatura

[1] *L. Drs:* O základní větě centrální axonometrie. Časopis pro pěst. mat., *82* (1957).

[2] *L. Drs:* O centrální axonometrii. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958).

[3] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie I, II, III. Matem. fys. čas. SAV *VII*, 2—1957 a *VIII*, 2—1958.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (VŠST).

Zusammenfassung

ZUM FUNDAMENTALSATZ DER n-DIMENSIONALEN ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

In der Arbeit wird zuerst die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Projektion aus einem Punkt in eine Hyperebene (im n-dimensionalen ($n \geqq 3$), ergänzten, euklidischen Raum E^n) gefunden, bei der die Projektion der n-schenkeligen, n-dimensionalen Koordinatenkonfiguration K_n^n mit gegebener n-schenkeliger, $(n-1)$-dimensionaler polyedrischer Konfiguration ${}^0K_n^{n-1}$ kongruent ist. Die hinreichende Bedingung ist dann für den Fall der Zentralprojektion von dem $(n-m-1)$-dimensionalem Zentralraum in den Unterraum $\mathsf{E}^m \subset \mathsf{E}^n$ $(2 \leqq m < n)$ verallgemeinert.