Jiří Brabec

Poznámka k Favardově větě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 1--7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117701`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 96 * PRAHA 17.2.1971 * ČÍSLO 1

POZNÁMKA K FAVARDOVĚ VĚTĚ

JIŘÍ BRABEC, Praha

(Došlo 11. ledna 1966, přepracované 4. září 1968)

V teorii ortogonálních polynomů se dokazuje, že ortogonální polynomy vyhovují rekurentní formuli

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

kde α_{n+1}, λ_n jsou jistá reálná čísla, $\lambda_n > 0$ (pro $n = 0$ klademe $P_{-1} = 0$).

J. FAVARD [1] dokázal v r. 1935 následující větu.

Věta 1. *Nechť $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ je systém polynomů, v němž $P_n(x)$ jest polynom n-tého stupně s koeficientem u nejvyšší mocniny rovným jedné. Platí-li rekurentní vzorec (1), přičemž $\lambda_n > 0$, pak existuje taková neklesající funkce $v(x)$ s nekonečným počtem bodů růstu, že při $i \neq k$ jest*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_i(x) P_k(x) \, dv(x) = 0 ,$$

jinými slovy, že systém $\{P_n(x)\}$ jest ortogonální vzhledem k váze $v(x)$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

V této poznámce dokážeme analogickou větu nezávisle na větě 1 pro libovolný interval (a, b), kde a, b jsou buďto konečná čísla nebo jedno z nich je nevlastní. Vedle podmínky (1) budeme předpokládat, že je splněna ještě následující podmínka

$$\operatorname{sign} P_n(a) = (-1)^n , \quad \operatorname{sign} P_n(b) = 1 \tag{2}$$

pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ Dokážeme pak tuto větu:

Věta 2. *Nechť $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ je systém polynomů, v němž $P_n(x)$ jest polynom n-tého stupně s koeficientem u nejvyšší mocniny rovným jedné. Platí-li rekurentní vzorec (1), kde $\lambda_n > 0$, a platí-li (2), pak existuje na intervalu (a, b) taková* *neklesající funkce $v(x)$ s nekonečným počtem bodů růstu, že při $i \neq k$ jest*

$$\int_a^b P_i(x)\, P_k(x)\, \mathrm{d}v(x) = 0\,, \tag{3}$$

nebo-li systém $\{P_n(x)\}$ je ortogonální vzhledem k váze $v(x)$ na intervalu (a, b).

Poznámka 1. Všude v dalším, kde budeme mluvit o váze $v(x)$, budeme mít na mysli funkci, která je v uvažovaném intervalu neklesající a má v něm nekonečný počet bodů růstu.

Poznámka 2. Podmínka, že je splněno (1) a (2) je ekvivalentní s podmínkou, že je splněno (1) a polynomy $P_n(x)$ mají všechny kořeny v intervalu (a, b).

Poznámka 3. Provedeme-li lineární transformaci $x = kz + q$ $(k \neq 0)$, pak pro polynomy $Q_n(z) = k^{-n} P_n(kz + q)$ budou platit zřejmě vztahy (1), (2). To nám umožňuje omezit se v důkazu věty 2 na intervaly $(0, 1)$ a $(0, +\infty)$. Budeme tedy v dalším předpokládat, že $a = 0$, $b = 1$ resp. $b = +\infty$.

Následující dvě věty uvedeme bez důkazu.

Věta 3. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby na intervalu (a, b) existovala váha $v(x)$, pro niž*

$$\int_a^b x^n\, \mathrm{d}v(x) = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

jest, aby posloupnost $\{\mu_n\}$ byla positivní na intervalu (a, b).

Důkaz viz např. [2].

(Posloupnost reálných čísel $\{\mu_n\}_0^\infty$ se nazývá *positivní* na intervalu (a, b), jestliže pro každý polynom

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

který je nezáporný na (a, b), jest funkcionál

$$\Phi(Q) = a_0 \mu_n + a_1 \mu_{n-1} + \ldots + a_n \mu_0$$

positivní.)

Věta 4. (Lukács) *Nechť $Q(x)$ jest polynom stupně n-tého, nezáporný na intervalu* $(0, 1)$. *Pak $Q(x)$ může být vyjádřen ve tvaru*

$$Q(x) = \begin{cases} A^2(x) + x(1 - x)\, B^2(x)\,, & \text{je-li } n \text{ sudé}\,, \\ x\, C^2(x) + (1 - x)\, D^2(x)\,, & \text{je-li } n \text{ liché}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Přitom $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ jsou takové reálné polynomy, že stupeň výrazů, které stojí v pravé části (5), není vyšší než n.

Je-li $Q(x) \geqq 0$ na intervalu $(0, +\infty)$, pak jej lze vyjádřit ve tvaru

$$Q(x) = A^2(x) + x\,B^2(x)\,. \tag{6}$$

Důkaz viz např. [3].

Lemma 1. *Nechť α_i, λ_i jsou čísla z rekurentního vztahu (1) a nechť platí (2) ($a = 0$, $b = 1$). Pak následující determinanty D_n, D'_n, D''_n jsou vesměs kladné. Je-li $a = 0$, $b = \infty$, pak je kladný determinant D_n.*

(7)

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \lambda_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & \alpha_2, & \lambda_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \alpha_3, & \lambda_3, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0, & \ldots\ldots, & & 1, & \alpha_{n-1}, & \lambda_{n-1} \\ 0, & \ldots\ldots, & & 0, & 1, & \alpha_n \end{vmatrix} \qquad D'_n = \begin{vmatrix} 1 - \alpha_1, & \lambda_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 1 - \alpha_2, & \lambda_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 1 - \alpha_3, & \lambda_3, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & 1, & 1 - \alpha_{n-1}, & \lambda_{n-1} \\ 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & 0, & 1, & 1 - \alpha_n \end{vmatrix}$$

(8)

$$D''_n =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_1^2 - \lambda_1, & 1 - \alpha_1 - \alpha_2, & -1, & 0 & \ldots, 0 \\ \lambda_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2), & \alpha_2 - \alpha_2^2 - \lambda_2 - \lambda_1, & 1 - \alpha_2 - \alpha_3, & -1, & \ldots, 0 \\ -\lambda_1\lambda_2, & \lambda_2(1 - \alpha_2 - \alpha_3), & \alpha_3 - \alpha_3^2 - \lambda_3 - \lambda_2, & 1 - \alpha_3 - \alpha_4, & \ldots, 0 \\ 0, & -\lambda_2\lambda_3, & \lambda_3(1 - \alpha_3 - \alpha_4), & \alpha_4 - \alpha_4^2 - \lambda_4 - \lambda_3, & \ldots, 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, \ldots, & \lambda_{n-2}(1 - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}), & \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2 - \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}, & 1 - \alpha_{n-1} - \alpha_n & \\ 0, \ldots, & -\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}, & \lambda_{n-1}(1 - \alpha_{n-1} - \alpha_n), & \alpha_n - \alpha_n^2 - \lambda_n - \lambda_{n-1} & \end{vmatrix}$$

Důkaz. Ukážeme, že

$$P_n(0) = (-1)^n\,D_n\,, \tag{9}$$

pak bude $D_n > 0$ vzhledem k podmínce (2). Důkaz provedeme úplnou indukcí. Pro $n = 1$ zřejmě platí $P_1(0) = -D_1$, předpokládejme, že (9) platí pro všechna $k \leqq n$. Ukážeme, že (9) platí i pro $k = n + 1$. Rozvedeme-li determinant D_{n+1} podle posledního sloupce a násobíme-li jej $(-1)^{n+1}$ dostaneme $(-1)^{n+1}\,D_{n+1} = (-1)^{n+1}\,.$ $.\,(\alpha_{n+1}D_n - \lambda_n D_{n-1}) = -\alpha_{n+1}(-1)^n\,D_n - \lambda_n(-1)^{n-1}\,D_{n-1} = -\alpha_{n+1}\,P_n(0) -$ $- \lambda_n\,P_{n-1}(0) = P_{n+1}(0)$ (podle (1)).

Zcela analogicky lze ukázat, že $D'_n = P_n(1) > 0$.

Nyní ukážeme, že $D''_n = D_n D'_{n+1} + D'_n D_{n+1} > 0$. Především platí $D_n D'_{n+1} +$ $+ D'_n D_{n+1} = D_n D'_n - \lambda_n(D_{n-1} D'_n + D'_{n-1} D_n)$, což vyplývá okamžitě ze vztahu

$$P_n(0)\,P_{n+1}(1) - P_n(1)\,P_{n+1}(0) = P_n(0)\,P_n(1) + \lambda_n(P_n(1)\,P_{n-1}(0) - P_n(0)\,P_{n-1}(1))\,,$$

který snadno dostaneme z rekurentního vzorce (1). Stačí tedy dokázat platnost vztahu

$$D''_n = D_n D'_n - \lambda_n D''_{n-1}\,,$$

kde položíme $D''_0 = 1$.

Především se snadno ukáže, že

$$D_n D_n' = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_1^2 - \lambda_1, & 1 - \alpha_1 - \alpha_2, & -1, & 0, & \dots, 0 \\ \lambda_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2), & \alpha_2 - \alpha_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2, & 1 - \alpha_2 - \alpha_3, & -1, & \dots, 0 \\ -\lambda_1\lambda_2, & \lambda_2(1 - \alpha_2 - \alpha_3), & \alpha_3 - \alpha_3^2 - \lambda_3 - \lambda_2, & 1 - \alpha_3 - \alpha_4, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, \dots, & \lambda_{n-2}(1 - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}), & \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2 - \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}, & 1 - \alpha_{n-1} - \alpha_n & \\ 0, \dots, & -\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}, & \lambda_{n-1}(1 - \alpha_{n-1} - \alpha_n), & \alpha_n - \alpha_n^2 - \lambda_{n-1} & \end{vmatrix}$$

Odečteme-li od tohoto determinantu

$$\lambda_n D''_{n-1} = \left|\begin{array}{c|c} D''_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0, \dots, 0, -\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}(1 - \alpha_{n-1} - \alpha_n), & \lambda_n \end{array}\right|,$$

dostaneme vskutku determinant D''_n. Lemma je dokázáno.

Definujme nyní posloupnost $\{\mu_n\}_0^\infty$ takto: $\mu_0 = 1$ a je-li

$$P_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n ,$$

položme

$$\mu_n + b_1\mu_{n-1} + \dots + b_n\mu_0 = 0 , \quad (n = 1, 2, \dots) . \tag{10}$$

Rovnice (10) určují posloupnost $\{\mu_n\}$ jednoznačně. Definujme dále aditivní a homogenní funkcionál $\Phi(Q)$ na prostoru všech polynomů takto: Je-li

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} ,$$

položme

$$\Phi(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu_{n-k} .$$

Jest tedy $\Phi(P_n) = 0$ pro všechna $n = 1, 2, \dots$ $\Phi(P_0) = \Phi(1) = \mu_0 = 1$.

Lemma 2. *Pro funkcionál Φ platí tyto vztahy:*

$$\Phi(x^m P_k) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq m \leqq k - 1 \tag{11_1}$$

$$\Phi(x^k P_k) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k \tag{11_2}$$

$$\Phi(x P_{k-1} P_k) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k \tag{11_3}$$

$$\Phi(x P_k^2) = \alpha_{k+1}\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k \tag{11_4}$$

$$\Phi(x(1 - x) P_k^2) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k(\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2 - \lambda_{k+1} - \lambda_k) \tag{11_5}$$

$$\Phi(x(1 - x) P_{k-1} P_k) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k(1 - \alpha_k - \alpha_{k+1}) \tag{11_6}$$

$$\Phi(x(1 - x) P_{k-2} P_k) = -\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_k \tag{11_7}$$

(je-li ve vztazích (11_4), (11_5) $k = 0$, klademe $\lambda_0 = 0$, $\prod_{i=1}^{0} \lambda_i = 1$).

Důkaz. (11_1) se dokáže úplnou indukcí, použijeme-li rekurentní formule (1). Z formule (1) a z aditivnosti a homogennosti funkcionálu Φ plyne

$$\Phi(x^{k-1}P_{k+1}) = \Phi(x^kP_k) - \alpha_{k+1}\,\Phi(x^{k-1}P_k) - \lambda_k\,\Phi(x^{k-1}P_{k-1})$$

neboli

$$\Phi(x^kP_k) = \lambda_k\,\Phi(x^{k-1}P_{k-1})\,,$$

z čehož plyne (11_2). (11_3) dostaneme ihned z (11_1) a z (11_2). Násobme vztah

$$P_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})\,P_k(x) - \lambda_k\,P_{k-1}(x)$$

polynomem $P_k(x)$, dostaneme

$$x\,P_k^2(x) = P_k(x)\,P_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}\,P_k^2(x) + \lambda_k\,P_k(x)\,P_{k-1}(x)\,,$$

odtud

$$\Phi(xP_k^2) = \alpha_{k+1}\,\Phi(P_k^2) = \alpha_{k+1}\,\Phi(x^kP_k) = \alpha_{k+1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\,,$$

což je vztah (11_4). Z (1) dostaneme dále

$$x^2P_k^2 = xP_kP_{k+1} + \alpha_{k+1}xP_k^2 + \lambda_kxP_{k-1}P_k\,,$$

tedy

$$\Phi(x^2P_k^2) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k(\lambda_{k+1} + \alpha_{k+1}^2 + \lambda_k)\,,$$

odtud a z (11_4) dostaneme (11_5). Dále platí

$$x^2P_{k-1}P_k = xP_{k-1}P_{k+1} + \alpha_{k+1}xP_{k-1}P_k + \lambda_kxP_{k-1}^2\,,$$

tedy

$$\Phi(x^2P_{k-1}P_k) = (\alpha_{k+1} + \alpha_k)\,\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\,.$$

Odtud a z (11_3) dostaneme (11_6). Konečně

$$\Phi(x(1 - x)\,P_{k-2}P_k) = -\Phi(x^2P_{k-2}P_k) = -\Phi(x^kP_k) = -\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k\,,$$

což je vztah (11_7). Lemma je dokázáno.

Lemma 3. *Funkcionál Φ je positivní na těchto polynomech*

(12_1)	$Q^2(x)$
(12_2)	$x\,Q^2(x)\ (x \geqq 0)$
(12_3)	$(1 - x)\,Q^2(x)\ (x \leqq 1)$
(12_4)	$x(1 - x)\,Q^2(x)\ (0 \leqq x \leqq 1)$

Důkaz. Nechť $Q(x)$ je polynom n-tého stupně, pak jej můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci polynomů $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$

$$Q(x) = \xi_1\,P_0(x) + \xi_2\,P_1(x) + \ldots + \xi_{n+1}\,P_n(x)\,.$$

Jest

$$Q^2(x) = \sum_{i,k} \xi_i \xi_k \, P_{i-1}(x) \, P_{k-1}(x) \, .$$

(12_1) je zřejmé, neboť

$$\Phi(Q^2) = \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k^2 \, \Phi(P_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{k-1} \xi_k^2 > 0$$

(12_2)

$$\Phi(xQ^2) = \sum_{i,k} \xi_i \xi_k \, \Phi(x P_{i-1} P_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1} \xi_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k \xi_{k+1} \, \xi_k \, .$$

Na pravé straně máme kvadratickou formu v ξ_k, hlavní minory její matice jsou až na kladné činitele rovné determinantům $D_k > 0$, jest tedy podle Sylvestrovy podmínky positivně definitní, tedy $\Phi(xQ^2) > 0$.

(12_3) se dokáže zcela analogicky (minory budou rovné až na kladné faktory determinantům D'_k).

Zcela stejně se přesvědčíme, že kvadratická forma příslušná funkcionálu $\Phi^2[x(1 - x) Q^2]$ má koeficienty, které jsou vyjádřeny vzorci $(11_5)-(11_7)$. Matice této formy má za hlavní minory determinanty, které jsou až na kladné činitele rovné determinantům D''_k, jest tedy tento funkcionál rovněž positivní. Lemma jest dokázáno.

Lemma 4. *Funkcionál Φ je positivní na množině všech polynomů nezáporných v intervalu* $(0, 1)$, *resp.* $(0, +\infty)$.

Důkaz vyplýva okamžitě z lemmatu 3 a z věty 4.

Věta 5. *Existuje váha $v(x)$, která má za posloupnost momentů posloupnost $\{\mu_n\}_0^\infty$, definovanou vztahem* (10).

Důkaz. Podle lemmatu 4 jest posloupnost $\{\mu_n\}$ positivní, dále stačí použít větu 3.

Nyní už můžeme přejít k důkazu věty 2.

Vezměme váhu $v(x)$ z věty 5, jest $\int_a^b x^n \, dv(x) = \mu_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, tedy $\int_a^b Q(x) \, . \, dv(x) = \Phi(Q)$ pro libovolný polynom $Q(x)$. Mějme nyní dva libovolné, různé polynomy P_i, P_k ze systému $\{P_n(x)\}$, nechť např. $i < k$, pak

$$\int_a^b P_i(x) \, P_k(x) \, dv(x) = \Phi(P_i P_k) = \Phi(x^i P_k) = 0$$

(podle (11_1)), tím je důkaz proveden.

Poznamenejme ještě na závěr, že je-li systém $\{P_n(x)\}$ polynomů s koeficientem u nejvyšší mocniny rovným jedné ortogonální na intervalu (a, b), pak jak známo platí (1), (2). Můžeme tedy vyslovit tuto větu:

Věta 2'. *Nutná a postačující podmínka, aby systém $\{P_n(x)\}_0^\infty$ polynomů s koeficientem u nejvyšší mocniny rovným jedné byl ortogonální na intervalu (a, b) (vzhledem k nějaké váze $v(x)$), jest, aby byly splněny podmínky* (1), (2).

Literatura

[1] *Favard J.:* Sur les polynomes de Tchebicheff, Comptes Rendus Acad. Sc. 200 (1935), 2053—3.
[2] *Natanson I. P.:* Konstruktivnaja těorija funkcij, Moskva—Leningrad 1949.
[3] *Szegö G.:* Orthogonal Polynomials, N. York 1959.

Adresa autora: Jiří Brabec, Praha 1, Nerudova 23.

Summary

NOTE TO FAVARD'S THEOREM

JIŘÍ BRABEC, Praha

In literature, the following assertion is usually presented as Favard's theorem: If the system of polynomials $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $P_n(x)$ being a polynomial of the n-th degree with the coefficient at the n-th power equal to one fulfils the recurrent relation (1), then this system is orthogonal on $(-\infty, \infty)$ with some weihgt $\nu(x)$. In the present paper this theorem is proved for an arbitrary interval under the additional assumption that condition (2) is fulfilled. (2) may be replaced by the assumption that all roots of $P_n(x)$ are included in the interval (a, b).