Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Bartoš
O prolongabilných riešeniach optickej rovnice

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 278--289

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117699

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

O PROLONGABILNÝCH RIEŠENIACH OPTICKEJ ROVNICE

PAVEL BARTOŠ Bratislava

(Došlo dňa 12. decembra 1968)

Autor venuje tuto prácu s vďakou všetkým, ktorí boli k nemu v živote dobrí.

Ako je známe, má diofantická rovnica

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = 1\,, \quad n \geqq 1 \tag{1}$$

tzv. optická rovnica, pre každé n konečný počet riešení (aspoň jedno) v prirodzených číslach. Medzi nimi je význačné riešenie

$$x_1 = \alpha_1\,, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}\,, \quad x_n = \alpha_n - 1\,, \tag{2}$$

kde postupnosť $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ je definovaná takto

$$\alpha_1 = 2\,, \quad \alpha_{j+1} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j + 1\,, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Riešenie (2)–(3) rovnice (1) v prirodzených číslach má tú vlastnosť, že pre $n > 2$ platí $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, a nazýva sa jej extrémnym riešením, lebo ak je $x'_1 < < x'_2 < \ldots < x'_n$ ľubovoľné iné jej riešenie v rôznych prirodzených číslach, platí $x'_n < x_n$ (pozri [1] veta 3).

V tejto práci sa budeme zaoberať riešením všeobecnejšej rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{1}{a_0}\,, \quad n \geqq 1\,, \tag{4}$$

kde a_0 je dané prirodzené číslo a budeme hľadať všetky také jej riešenia v prirodzených číslach, ktoré možno vyjadriť obdobne ako riešenie (2) rovnice (1). Číslo n bude znamenať vždy počet neznámych v rovnici (4). V dodatku potom dosiahnuté výsledky zovšeobecníme pre rovnicu $\sum_{j=1}^{n} 1/x_1 = b/a_0$ (b, a_0 nesúdelné prirodzené čísla).

Definícia 1. Nech existujú také dve postupnosti prirodzených čísel $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ [1]), že pre každé prirodzené číslo n má rovnica (4) (kde a_0 je dané prirodzené číslo) v obore prirodzených čísel riešenie tvaru

$$(2') \qquad x_1 = \alpha_1\,, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}\,, \quad x_n = \alpha_n - k_{n-1}\,.$$

Potom pre každé prirodzené číslo n nazývame riešenie (2′) *prolongabilným* riešením rovnice (4).

Poznámka. Riešenie (2) rovnice (1) je podľa toho prolongabilným riešením rovnice (4), kde $a_0 = 1$, postupnosť $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ je určená predpisom (3) a $k_j = 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Zavedenie pojmu prolongabilného riešenia rovnice (4) je odôvodnené tým, že – ako uvidíme na konkrétnom príklade – značný počet jej riešení v prirodzených číslach se dá určiť istým algoritmom podľa vety 2 pre všetky prirodzené čísla n. Okrem toho prolongabilné riešenia majú aj iné diofantické rovnice. Napr. jednoducho sa dokáže matematickou indukciou, že rovnica

$$a_0 + a_1x_1^2 + a_2x_1^2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^2x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 = x_1x_2 \ldots x_n\,, \quad n = 2, 3, \ldots$$

má riešenie (2′), pričom $\alpha_1 = a_0$, $\alpha_{j+1} = a_j\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j + 1$, $j = 1, 2, \ldots$ a $k_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Konečne môže mať tento pojem význam aj v iných množinách (pozri poznámku 2 za vetou 11).

Veta 1. *V postupnostiach* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ *z definície* 1 *platí*

$$(5) \qquad \alpha_1 = a_0 + k_0\,.$$

Dôkaz. Podľa def. 1 pre $n = 1$ platí $x_1 = \alpha_1 - k_0$. Keďže v tomto prípade $x_1 = a_0$, (5) skutočne platí.

Definícia 2. Pomocou postupností $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ z def. 1 definujeme postupnosť prirodzených čísel[2]) $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ takto

$$\alpha_j = a_{j-1} + k_{j-1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

V postupnosti $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ je člen a_0 podľa (5) totožný s koeficientom a_0 v rovnici (4).

Definícia 1 prolongabilného riešenia rovnice (4) je potom ekvivalentná tejto:

Definícia 3. Nech existujú také dve postupnosti prirodzených čísel $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, že pre každé prirodzené číslo n má rovnica (4), v ktorej koeficient a_0 je členom postupnosti $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ pre $j = 0$, v obore prirodzených čísel riešenie tvaru

$$(2'') \qquad x_1 = a_0 + k_0\,, \quad x_2 = a_1 + k_1, \ldots, x_{n-1} = a_{n-2} + k_{k-2}\,, \quad x_n = a_{n-1}\,.$$

---

[1]) Uvidíme i taký príklad, že $k_j = 0, j = 0, 1, 2 \ldots$; pre rovnicu (4) je to vylúčené.

[2]) Podľa (2′) je $k_j < \alpha_{j+1}, j = 0, 1, 2, \ldots$ preto $a_j > 0$.

Potom pre každé prirodzené číslo n nazývame (2″) *prolongabilným* riešením rovnice (4).

Veta 2. *Čísla a_j, k_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, sú členmi postupností $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ z def. 1 a 2 práve vtedy, keď pre $j = 1, 2, \ldots$ platí*

$$(6) \qquad a_j = a_{j-1} + \frac{a_{j-1}^2}{k_{j-1}}, \quad k_{j-1} | a_{j-1}^2 .$$

Dôkaz. Predpokladajme, že čísla a_j, k_j sú členy postupností $\{a_j\}$, $\{k_j\}$ z def. 1 a 2. Potom pre všetky prirodzené čísla n platí podľa definície 3 a rovnice (4)

$$(7) \qquad \frac{1}{a_0 + k_0} + \frac{1}{a_1 + k_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2} + k_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_0}$$

a tiež

$$(7') \quad \frac{1}{a_0 + k_0} + \frac{1}{a_1 + k_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2} + k_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1} + k_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} .$$

Z rovníc (7) a (7′) máme

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1} + k_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

odkiaľ po malej úprave vyplýva prvá podmienka (6), a keďže čísla a_j sú prirodzené, platí tiež $k_{n-1} \mid a_{n-1}^2$; podmienky (6) sú nutné.

Teraz predpokládajme, že máme postupnosti $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ prirodzených čísel, ktoré spĺňujú podmienky (6). Dokážme, že majú vlastnosť z def. 3, teda že z nich utvorené čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podľa (2″) sú riešením rovnice (4) pre každé prirodzené číslo n.

To platí keď $n = 1$, lebo vtedy podľa (2″) je $x_1 = a_0$ a toto skutočne je riešenie rovnice $1/x_1 = 1/a_0$. Ak platí tvrdenie pre určité $n \geqq 1$, potom teda platí

$$\frac{1}{a_0 + k_0} + \frac{1}{a_1 + k_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2} + k_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_0} .$$

Vtedy však

$$\frac{1}{a_0 + k_0} + \frac{1}{a_1 + k_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2} + k_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1} + k_{n-1}} + \frac{1}{a_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_0 + k_0} + \frac{1}{a_1 + k_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2} + k_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} + k_{n-1}}\right) = \frac{1}{a_0} + \frac{-a_{n-1} - k_{n-1} + a_{n-1} + k_{n-1}}{a_{n-1}(a_{n-1} + k_{n-1})} = \frac{1}{a_0}$$

čiže (2″) je riešením rovnice (4) v prirodzených číslach aj pre $n + 1$. Podmienky (6) sú teda aj dostačujúce. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 1. Pri daných prirodzených číslach a_0 a n je minimálny počet rôznych trojíc konečných postupností $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{k_j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$ 3^{n-1} (ak je $a_0 > 1$) a 3^{n-2} (ak je $a_0 = 1$). Vzhľadom na (6) totiž pre $j = 1, 2, \ldots$ platí $a_j > 1$, a tak sú aspoň tri možnosti voľby k_j, totiž $1, a_j, a_j^2$. Tak je tomu i pri voľbe k_0, ak je $a_0 > 1$, pri $a_0 = 1$ je však iba možnosť $k_0 = 1$.

Poznámka 2. Nie každé riešenie rovnice (4) pri určitom $n > 1$ je prolongabilné. Napr. $1/5 + 1/10 + 1/30 = 1/3$, ale rovnica $1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 = 1/3$ nemá prolongabilné riešenie, v ktorom by x_1 malo niektorú z hodnôt 5, 10, 30. Je totižto $k_0 = 5 - 3 = 2$, alebo $10 - 3 = 7$, alebo $30 - 3 = 27$, avšak žiadna z týchto hodnôt nie je deliteľom čísla $a_0^2 = 9$.

Veta 3. *V postupnostiach* $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *z def.* 1 *a* 2 *platia tieto vzťahy*

(8) $$\alpha_{j+1} = \frac{a_{j+1}}{a_j} k_j\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

(9) $$a_{j+1} = \frac{a_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{j+1}}{k_0k_1 \ldots k_j}\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

(10) $$\alpha_{j+1} = \frac{a_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j}{k_0k_1 \ldots k_{j-1}} + k_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Dôkaz. Pre $j = 0, 1, 2, \ldots$ podľa (6)

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} k_j = \frac{a_j + (a_j^2/k_j)}{a_j} k_j = a_j + k_j = \alpha_{j+1}$$

takže (8) platí. Podľa (8) potom

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{j+1} = \frac{a_1}{a_0} k_0 \,.\, \frac{a_2}{a_1} k_1 \ldots \frac{a_{j+1}}{a_j} k_j = \frac{a_{j+1}}{a_0} k_0k_1 \ldots k_j\,,$$

odkiaľ vyplýva (9). Konečne podľa def. 2 z (9) vyplýva (10).

Veta 4. *Postupnosť* $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ *je rastúca.*

Dôkaz. Podľa (6) pre $j = 0, 1, 2, \ldots$ platí $a_{j+1} > a_j$, čím je veta dokázaná.

Poznámka. O postupnostiach $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ to vždy neplatí.

Veta 5. *Nech* a_0 *a* l *sú pevné (ináč ľubovoľné) prirodzené čísla. Uvažujme všetky postupnosti* $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, *ktoré podľa def.* 2 *pri danom čísle* a_0 *možno vytvoriť. V množine* *čísel a_l, ktoré sme takto získali je najväčšie to číslo a_l, ku ktorému viedli hodnoty $k_0 = k_1 = \ldots = k_{l-1} = 1$.*

Dôkaz. Podľa (6) pri danom čísle a_0 získame najväčšie číslo a_1 voľbou $k_0 = 1$, ktorá je prípustná; ak veta platí pre určité $l \geqq 1$, potom podľa (6) $a_{l+1} = a_l + a_l^2/k_l$ je najväčšie práve vtedy, keď je najväčšie a_l a k_l najmenšie, teda keď – podľa indukčného predpokladu – $k_0 = k_1 = \ldots = k_{l-1} = 1$ a tiež $k_l = 1$. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. *Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sú dve prolongabilné riešenia rovnice* (4), *z ktorých prvé bolo získané voľbou $k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 1$, potom platí $x'_n \leqq x_n$ a rovnosť platí práve vtedy, keď sú obe riešenia totožné (čiže aj druhé bolo získané voľbou $k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 1$).*

Definícia 4. Prolongabilné riešenie rovnice (4) určené hodnotami $k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = 1$ nazývame *prolongabilným extrémnym* riešením tejto rovnice.

Veta 6. *Nech $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ je prolongabilné extrémne riešenie rovnice*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{1}{a'_0}$$

a nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je prolongabilné extrémne riešenie rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{1}{a_0}.$$

Nech $a'_0 > a_0$. Potom platí $x'_j > x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ pre všetky prirodzené čísla n.

Dôkaz. Označme $\{a'_j\}$ postupnosť vytvorenú podľa (6) z čísla a'_0 a čísel $k_0 = k_1 = \ldots = 1$ a $\{a_j\}$ postupnosť vytvorenú obdobne z čísla a_0. Dokážeme, že pre $l = 0, 1, 2, \ldots$ platí $a'_l > a_l$. To platí pre $l = 0$ podľa predpokladu. Ak to platí pre určité $l \geqq 0$, potom $a'_{l+1} = a'_l + a'^2_l > a_l + a_l^2 = a_{l+1}$, čiže to platí aj pre $l + 1$. Avšak $x'_j = a'_{j-1} + k'_{j-1} = a'_{j-1} + 1$, $x_j = a_{j-1} + 1$, a teda $x'_j > x_j$ platí pre všetky $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Keďže $x'_n = a'_{n-1}$, $x_n = a_{n-1}$, platí aj $x'_n > x_n$. Tým je veta dokázaná.

Veta 7. *Ak je $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $n \geqq 2$, prolongabilné riešenie rovnice* (4) *príslušné k postupnostiam $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, potom*

$$x_{n-1} < x_n \tag{11}$$

práve keď platí

$$k_{n-2} < a_{n-2}\,. \tag{12}$$

Dôkaz. Keďže $x_{n-1} = a_{n-2} + k_{n-2}$, $x_n = a_{n-1}$ je

$$x_n - x_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} - k_{n-2} = a_{n-2} + \frac{a_{n-2}^2}{k_{n-2}} - a_{n-2} - k_{n-2} = \frac{a_{n-2}^2 - k_{n-2}^2}{k_{n-2}},$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Veta 8. *Ak je $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $n > 2$, prolongabilné riešenie rovnice (4) príslušné k postupnostiam $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, potom*

$$(13) \qquad x_i < x_{i+1}$$

pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n - 2$ platí práve vtedy, keď pre všetky i platí

$$(14) \qquad a_{i-1}^2 - k_{i-1}^2 + k_{i-1}k_i > 0\,.$$

Dôkaz. Pre všetky predmetné i platí

$$x_{i+1} - x_i = a_i + k_i - a_{i-1} - k_{i-1} =$$
$$= a_{i-1} + \frac{a_{i-1}^2}{k_{i-1}} + k_i - a_{i-1} - k_{i-1} = \frac{a_{i-1}^2 - k_{i-1}^2 + k_{i-1}k_i}{k_{i-1}}$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Veta 9. *Prolongabilné riešenie rovnice (4) príslušné k postupnostiam $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ splňuje pre každé $n \geqq 2$ podmienku*

$$(15) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

vtedy a len vtedy, keď

$$(16) \qquad k_j < a_j$$

pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots$

Dôkaz. Pretože pro všetky $n \geqq 2$ má platiť $x_{n-1} < x_n$, je platnosť (16) pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots$ podľa vety 7 nutnou podmienkou k platnosti (15) pre všetky $n \geqq 2$.
Podmienka (16) pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots$ je podľa viet 7 a 8 aj postačujúcou podmienkou k platnosti (15) pre všetky $n \geqq 2$.

Poznámka 1. Z viet 7–9 vyplýva, že $x_1 < x_2 < \ldots x_n$ nemôže platiť v žiadnom prolongabilnom riešení rovnice (4) jedine vtedy, keď $a_0 = 1$, $n = 2$. Vtedy totiž podmienka $k_0 < a_0$ je nesplniteľná. Pre extrémne prolongabilné riešenie však platí $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ vždy, keď v rovnici je počet neznámych $n > 2$. Vtedy totiž $k_j = 1 < a_j$ pre $j = 1, 2, \ldots$, takže podľa vety 7 platí pre $n > 2$, $x_{n-1} < x_n$. Keďže však $k_j = 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, sú splnené podmienky platnosti vety 8 a platí aj $x_1 < < x_2 < \ldots < x_{n-1}$.

Poznámka 2. Z dôkazu vety 7 vyplýva, že pre všetky $n \geqq 2$ platí $x_n = x_{n-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow k_{n-2} = a_{n-2}$; $x_n < x_{n-1} \Leftrightarrow k_{n-2} > a_{n-2}$.

Veta 10. *Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n - k_{n-1}$ je prolongabilné riešenie rovnice (4) v prirodzených číslach. Označme*

$$s_n = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n-1}}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{a_0}.$$

Dôkaz. Kedže ide o prolongabilné riešenie rovnice (1), platí pre každé prirodzené číslo n

$$s_n = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{\alpha_n - k_{n-1}} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Podľa vety 4 je postupnosť $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ rastúca a kedže jej členy sú čísla prirodzené, platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \infty$. Odtiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Teraz uvedieme niektoré aplikácie dokázaných viet.

Príklad. Určiť všetky prolongabilné riešenia rovnice (4) v prirodzených číslach pre $a_0 = 3$ a $n = 3$. Riešenie je obsažené v následujúcej schéme:

$a_0 = 3,\ k_0 \mid a_0^2$

k_0	1	3	9
$a_1 = a_0 + a_0^2/k_0$	12	6	4

$k_0 = 1,\ a_1 = 12,\ k_1 \mid a_1^2$

k_1	1	2	3	4	6	8	9	12
$a_2 = a_1 + (a_1^2/k_1)$	156	84	60	48	36	30	28	24

$k_0 = 3,\ a_1 = 6,\ k_1 \mid a_1^2$, $k_0 = 9,\ a_1 = 4,\ k_1 \mid a_1^2$

k_1	1	2	3	4	6	1	2	4
$a_2 = a_1 + (a_1^2/k_1)$	42	24	18	15	12	20	12	8

$x_1 = a_0 + k_0$	4	4	4	4	4	4	4	4
$x_2 = a_1 + k_1$	13	14	15	16	18	20	21	24
$x_3 = a_2$	156	84	60	48	36	30	28	24

$x_1 = a_0 + k_0$	6	6	6	6	6	12	12	12
$x_2 = a_1 + k_1$	7	8	9	10	12	5	6	8
$x_3 = a_2$	42	24	18	15	12	20	12	8

Pri počítaní a_{n-1} (v príklade a_2) netreba hľadieť na tie hodnoty $k_{n-2}(k_1)$, pre ktoré platí $k_{n-2} > a_{n-2}$. K takým hodnotám existuje totiž $k'_{n-2} = a^2_{n-2}/k_{n-2} < a_{n-2}$. Potom máme pre k_{n-2}

$$x_{n-1} = a_{n-2} + k_{n-2}\,, \quad x_n = a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{a^2_{n-2}}{k_{n-2}}$$

a pre k'_{n-2}

$$x'_{n-1} = a_{n-2} + k'_{n-2} = a_{n-2} + \frac{a^2_{n-2}}{k_{n-2}} = x_n\,,$$

$$x'_n = a'_{n-1} = a_{n-2} + \frac{a^2_{n-2}}{k'_{n-2}} = a_{n-2} + k_{n-2} = x_{n-1}\,.$$

Keďže korene možno ľubovoľne permutovať, nezáleží nám na ich poradí a netreba tieto dve riešenia rozlišovať. Ak by sme však riešili rovnicu $\sum_{j=1}^{4} 1/x_j = 1/a_0$, museli by sme brať do počtu všetky možné k_0, k_1, ale opäť len tie k_2, pre ktorá platí $k_2 \leqq a_2$.

Týmto postupom môžeme určiť všetky prolongabilné riešenia rovnice (4) pre ľubovoľné n. Zrejme počet týchto riešení s rastúcim n prudko rastie.

Medzi prolongabilnými riešeniami v danom príklade nie sú obsažené iba tieto zo všetkých riešení rovnice (4) pre $a_0 = n = 3$:

x_1	5	5	5	5	7	9
x_2	8	9	10	15	7	9
x_3	120	45	30	15	21	9

Teraz ukážeme príklady prolongabilných riešení rovnice (4), ktoré sa dostanú ak hodnoty k_j volíme jedným z troch vždy prípustných spôsobov: $1, a_j, a_j^2$. Riešenia uvedieme vo forme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, a_{n-1}$ podľa (2') a (2'').

Veta 11. Nech a_0, n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Potom platí

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_0},$$

kde

1. $\alpha_1 = a_0 + 1, \alpha_{j+1} = a_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j + 1, j = 1, 2, \ldots, a_{n-1} = \alpha_n - 1,$

2. $\alpha_1 = 2a_0, \alpha_{j+1} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j + 1, j = 1, 2, \ldots, a_{n-1} = \alpha_n - 1,$

3. $\alpha_1 = a_0(a_0 + 1), \alpha_{j+1} = (1/a_0)\,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_j + 1, j = 1, 2, \ldots, a_{n-1} = \alpha_n - 1,$

4. $\alpha_1 = 2a_0, \alpha_2 = 2^2 a_0, \ldots, \alpha_{n-1} = a_{n-1} = 2^{n-1} a_0,$

5. $\alpha_1 = a_0(a_0 + 1), \alpha_2 = (a_0 + 1)(a_0 + 2), \ldots, \alpha_{n-1} = (a_0 + n - 2)(a_0 + n - 1);$
   $a_{n-1} = a_0 + n - 1.$

Dôkaz. 1. Podľa (9) a (10), keď položíme $k_j = 1, j = 0, 1, 2, \ldots$

2. Obdobne pri voľbe $k_0 = a_0$, $k_j = 1, j = 1, 2, \ldots$

3. Obdobne pri voľbe $k_0 = a_0^2$, $k_j = 1, j = 1, 2, \ldots$

4. Pri voľbe $k_j = a_j, j = 0, 1, 2, \ldots$, je $\alpha_1 = a_0 + k_0 = 2a_0$, ďalej podľa (6) $a_{j+1} = a_j + k_j = 2a_j$ a podľa def. 2 $\alpha_{j+1} = 2a_j$. Postupnosti $\{a_j\}, \{\alpha_j\}$ sú geometrické s kvocientom 2.

5. Pri voľbe $k_j = a_j^2$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, je $\alpha_1 = a_0 + k_0 = a_0 + a_0^2 = a_0(a_0 + 1)$, $\alpha_2 = a_1 + a_1 = a_1(a_1 + 1), \ldots$ Kedže $a_{j+1} = a_j + a_j^2/k_j = a_j + 1$, je postupnosť $\{a_j\}$ aritmetická s diferenciou 1. Z toho vyplýva 5.

Poznámka 1. Riešenie (2)—(3) rovnice (1) dostaneme z riešenia 1.—3. položiac $a_0 = 1$.

Poznámka 2. Ak si všimneme dôkazu vety 2 a definícií 1—3, vidíme, že všetko podstatné, čo bolo dokázané o prolongabilných riešeniach rovnice (4) v prirodzených číslach, platí v ľubovoľných množinách, v ktorých sú definované štyri základné počtové výkony. Tak je tomu napr. v množine všetkých kladných racionálnych, všetkých kladných reálnych čísel, ale tiež v telese čísel racionálnych, čísel reálnych, čísel komplexných a tiež v množine všetkých Gaussových čísel (s respektovaním deliteľnosti $k_j \mid a_j^2$) a pod.

DODATOK

V tomto dodatku sa predošlé úvahy zovšeobecnia pre rovnicu

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{\xi_n} = \frac{b}{a_0}, \tag{4'}$$

$n \geqq 2$, a_0, b nesúdelné prirodzené čísla.

Veta 12. *Ak je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ľubovoľné riešenie rovnice (4) v prirodzených číslach a ak $b \mid x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom*

$$\xi_1 = \frac{x_1}{b}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{x_n}{b}$$

je riešenie rovnice (4′) v prirodzených číslach a obrátene, ak je $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ riešenie rovnice (4′) v prirodzených číslach, je $x_1 = b\xi_1$, $x_2 = b\xi_2, \ldots, x_n = b\xi_n$ vždy riešením rovnice (4) v prirodzených číslach.

Dôkaz. Rovnica (4′) je ekvivalentná rovnici

$$\frac{1}{b\xi_1} + \frac{1}{b\xi_2} + \ldots + \frac{1}{b\xi_n} = \frac{1}{a_0},$$

ktorá je totožná s rovnicou (4), ak položíme $x_i = b\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Odtiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Definícia 5. Ak riešenie rovnice (4′) v prirodzených číslach je podľa vety 12 odvodené z prolongabilného riešenia rovnice (4), teda ak ide o riešenie rovnice (4′) v prirodzených číslach, ktoré pre každé $n \geqq 2$ možno utvoriť z postupností $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, určených podmienkami (6), vo forme

(2*)

$$\xi_1 = \frac{a_0 + k_0}{b}, \quad \xi_2 = \frac{a_1 + k_1}{b}, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1} = \frac{a_{n-2} + k_{n-2}}{b}, \quad \xi_n = \frac{a_{n-1}}{b},$$

potom toto riešenie nazývame prolongabilným riešením rovnice (4′) pre každé $n \geqq 2$.

Poznámka 1. Pre $n = 1$ riešenie rovnice (4′) nemusí byť prirodzené číslo.

Poznámka 2. Pre prolongabilné riešenia rovnice (4′) podľa (2*) platí $b \mid a_{n-1}$ pre $n \geqq 2$, teda $b \mid a_j$ a potom aj $b \mid k_j$ pre $j \geqq 1$.

Poznámka 3. Z vety 12 a definície 5 vyplýva, že všetky vlastnosti odvodené pre $n \geqq 2$ pre prolongabilné riešenia rovnice (4), platia aj pre prolongabilné riešenia rovnice (4′), keďže postupnosti $\{a_j\}$, $\{k_j\}$ sú pre obe riešenia totožné.

Pre extrémne riešenie rovnice (4') by muselo platiť pre každé $j = 0, 1, 2, \ldots$, $b \mid a_j + 1$, $b \mid a_{j+1}$, teda pre $j = 1, 2, \ldots$ súčasne $b \mid a_j + 1$ i $b \mid a_j$, odkiaľ vyplýva $b = 1$. Extrémne riešenie existuje teda len, keď $b = 1$, teda len pre rovnicu (4).

Nie každá rovnica (4') má prolongabilné riešenie. Napr. rovnica

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{3}{7}$$

nemá prolongabilného riešenia, lebo k_0 môže mať niektorú z hodnôt 1, 7, 49, avšak $3 \nmid a_0 + k_0 = 8, 14, 56$.

Ľahko sa presvedčíme, že napr. identity

$$\sum_{j=1}^{n-1} 1/2^{j-1}a_0 + 1/2^{n-2}a_0 = \frac{2}{a_0}$$

a

$$\sum_{j=1}^{n-1} 1\Big/\frac{(a_0+1)^j}{2} + 1\Big/\frac{a_0(a_0+1)^{n-1}}{2} = \frac{2}{a_0}$$

kde a_0 je nepárne prirodzené číslo, značia prolongabilné riešenia rovnice (4'), v ktorej $b = 2$. V prvom $k_j = a_j = 2^j a_0$ a v druhom $k_j = (a_0 + 1)^j$, $a_j = a_0(a_0 + 1)^j$ pre $j = 0, 1, 2, \ldots$

Veta 13. *V prípade, že známe všetky riešenia rovnice (4) v obore prirodzených čísel, môžeme postupom uvedeným vo vete 12 získať všetky riešenia rovnice (4') v obore prirodzených čísel a obdobne dostaneme zo všetkých prolongabilných riešení rovnice (4) všetky prolongabilné riešenia rovnice (4').*

Vyplýva z vety 12 a z definície 5 prolongabilných riešení rovnice (4').

Podľa vety 13 snadno určíme z riešení rovnice

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{3}$$

v prirodzených číslach, uvedených v príklade na strane 285 všetky riešenia rovnice

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{3}$$

v prirodzených číslach. Tak dostaneme riešenia, o ktorých sa potom podľa vety 13 ľahko presvedčíme, že sú všetky prolongabilné v tom poradí, ako sú uvedené:

x_1	2	2	2	2	2	3	3	6	6
x_2	7	8	9	10	12	4	6	3	4
x_3	42	24	18	15	12	12	6	6	4

Literatúra

[1] *Erdös P.:* Az $1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egészszámú megoldásairól. Mat. lapok I. 192—210, Budapest.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ÜBER PROLONGABILE LÖSUNGEN DER OPTISCHEN GLEICHUNG

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Im Artikel werden die sog. prolongabilen Lösungen der Gleichung (4) in natürlichen Zahlen definiert. Es werden einige deren Eigenschaften untersucht und es wird angedeutet, dass dieser Begriff auch in anderen Mengen sinnvoll sein kann. Zusätzlich werden die erreichten Ergebnisse für die Gleichung (4') verallgemeinert.