Časopis pro pěstování matematiky

Luděk Zajíček
Poznámky k teorii integrálu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 242--247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117694

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

POZNÁMKA K TEORII INTEGRÁLU

LUDĚK ZAJÍČEK, Praha

(Došlo dne 4. června 1968)

V článku je na základě postupu práce [1] dokázáno několik vět pro jistý abstraktní integrál, z nichž jednoduše plynou některé věty o Riemannovu integrálu.

Připomeňme některé definice a tvrzení práce [1]:

Definujme systém $\hat{Z}$ takto: Funkce f patří do $\hat{Z}$, právě když existují reálná čísla $0 = y_0 < \ldots < y_n < +\infty$ a čísla $0 \leqq a_n \leqq \ldots \leqq a_1 \leqq +\infty$ taková, že $f(x) = 0$ pro $x > y_n$, $f(x) = a_{i+1}$ pro $x \in (y_i, y_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Funkce ze systému $\hat{Z}$ jsou tedy definovány na intervalu $(0, +\infty)$.

Systém Z buď množina všech nerostoucích nezáporných funkcí na intervalu $(0, +\infty)$. Zřejmě $\hat{Z} \subset Z$.

Soustavu intervalů $\{I\}$ nazveme dělením D intervalu $(0, \infty)$, jestliže intervaly I jsou kompaktní, leží v $(0, \infty)$, nepřekrývají se, pokrývají $(0, \infty)$ a krajní body intervalů I (dělicí body dělení D) nemají v $(0, \infty)$ hromadný bod. Je-li I uzavřený interval, označme a_I (resp. b_I) jeho levý (resp. pravý) koncový bod. Buď $f \in Z$, D dělení intervalu $(0, \infty)$. Označme $S(f, D) = \sum_{I \in D} d(I) f(a_I)$, $s(f, D) = \sum_{I \in D} d(I) f(b_I)$, kde $d(I)$ značí délku intervalu I. V [1] je dokázáno, že $\inf_D S(f, D) = \sup_D s(f, D)$, tuto společnou hodnotu značíme Af. Z vlastností funkcionálu A dokázaných v [1] budeme dále potřebovat:

(1) Nechť $f, g \in Z$ a nechť množina $\{x \in (0, \infty), f(x) = g(x)\}$ je hustá v $(0, \infty)$. Potom $Af = Ag$.

(2) Je-li $f \in \hat{Z}$ konečná, je $Af = \sum_{k=1}^{n} a_k(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} y_k(a_k - a_{k+1})$, kde čísla $a_1, \ldots, a_{n+1}, y_0, \ldots, y_n$ mají týž význam jako v definici systému $\hat{Z}$.

(3) $f, g \in Z$, $f \leqq g \Rightarrow Af \leqq Ag$.

Dále budeme potřebovat ještě toto tvrzení:

Lemma 1. *Buďte $f, g \in Z$, $f \leqq g$, $Ag < +\infty$. Potom je $Af = Ag$ právě tehdy, když $f(x) = g(x)$ pro $x \in (0, \infty) \setminus S$, kde S je spočetná množina.*

Důkaz. 1. Doplněk spočetné množiny v $(0, \infty)$ je v $(0, \infty)$ hustý, můžeme proto použít (1).

2. Nechť existuje nespočetná množina bodů x, v kterých $f(x) < g(x)$. Funkce f i g jsou nerostoucí, tedy až na spočetně mnoho bodů v $(0, \infty)$ spojité, takže existuje bod x_0, že $f(x_0) < g(x_0)$ a f i g jsou v x_0 spojité. Existuje tedy interval $I \subset (0, \infty)$ a číslo $\varepsilon > 0$, že $f(x) + \varepsilon < g(x)$ v I. Z definice funkcionálu A je pak vidět, že $Af < Ag$, a to je spor.

V dalším buď X pevně zvolená, neprázdná množina. Je-li $M \subset X$, pak nechť C_M označuje charakteristickou funkci množiny M, tj. $C_M(x) = 0$ pro $x \in X \setminus M$, $C_M(x) = 1$ pro $x \in M$. Je-li f funkce definovaná na množině X, pak klademe $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Je tedy $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Definice 1. Systém $\mathscr{S}$ podmnožin množiny X nazveme *tělesem*, jestliže:

1. $X \in \mathscr{S}$.
2. $A \in \mathscr{S},\ B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{S}$.
3. $A \in \mathscr{S},\ B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{S}$.

Tělesem s mírou nazveme dvojici $(\mathscr{S}, \mu)$, jestliže μ je nezáporná konečná aditivní funkce definovaná na $\mathscr{S}$, tj.:

1. $A \in \mathscr{S} \Rightarrow 0 \leqq \mu(A) < +\infty$.
2. $A \in \mathscr{S},\ B \in \mathscr{S},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

V dalším buď na X dáno těleso s mírou $(\mathscr{S}, \mu)$.

Definice 2. Pro $M \subset X$ buď $\bar{\mu}(M) = \inf\limits_{A \supset M, A \in \mathscr{S}} \mu(A)$, $\underline{\mu}M = \sup\limits_{A \subset M, A \in \mathscr{S}} \mu(A)$.

Poznámka. Zřejmě je $0 \leqq \bar{\mu}(A) \leqq \bar{\mu}(B) < \infty$, $0 \leqq \underline{\mu}(A) \leqq \underline{\mu}(B) < \infty$ pro $A \subset B \subset X$. Zřejmě $\bar{\mu}(A) \geqq \underline{\mu}(A)$. Je-li $A \in \mathscr{S}$, je $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Definice 3. Funkci f definovanou na X nazveme *jednoduchou*, existují-li $A_i \in \mathscr{S}$, $y_i \in E_1$ $(i = 1, \ldots, n)$ takové, že $f = \sum_{i=1}^{n} y_i C_{A_i}$. Systém jednoduchých funkcí na X označme T.

Poznámka. Je-li $\sum_{i=1}^{n} y_i C_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} y'_i C_{A'_i}$, kde $A_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $A'_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, \ldots, k)$, je zřejmě $\sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} y'_i\, \mu(A'_i)$.

Definice 4. Pro $f \in T$, $f = \sum_{i=1}^{n} y_i C_{A_i}$, $A_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, \ldots, n)$, buď $Rf = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(A_i)$.

Poznámka. Je-li $f \in T$, $c \in E_1$, je $|f| \in T$, $cf \in T$ a $R(cf) = cR(f)$. Jsou-li $f_1, f_2 \in T$, je $f_1 + f_2 \in T$ a $R(f_1 + f_2) = Rf_1 + Rf_2$. Je-li $f_1 \leqq f_2$, je $Rf_1 \leqq Rf_2$.

Definice 5. Buď f omezená funkce na X. Položme $\bar{R}f = \inf_{\varphi \in T, \varphi \geqq f} R\varphi$, $\underline{R}f = \sup_{\varphi \in T, \varphi \leqq f} R\varphi$.

Poznámka. Je-li $f \in T$, je $Rf = \bar{R}f = \underline{R}f$. To umožňuje následující definici.

Definice 6. Jestliže $\bar{R}f = \underline{R}f$, označme $\bar{R}f = \underline{R}f = Rf$ a říkejme, že Rf existuje.

Poznámka. Jsou-li g, h omezené funkce na X, jest zřejmě:

$-\infty < \underline{R}h \leqq \bar{R}h < +\infty$, $\bar{R}(g + h) \leqq \bar{R}g + \bar{R}h$, $\underline{R}(g + h) \geqq \underline{R}g + \underline{R}h$. Existují-li tedy Rg a Rh, existuje i $R(g + h) = Rg + Rh$.

Lemma 2. *Buď f omezená funkce na X. Pak $\bar{R}f = \bar{R}f^+ - \underline{R}f^-$, $\underline{R}f = \underline{R}f^+ - \bar{R}f^-$.*

Důkaz. 1. Nechť $\varphi \in T$, $\varphi \geqq f$. Pak $\varphi^+ \in T$, $\varphi^- \in T$, $R\varphi^+ \geqq \bar{R}f^+$, $R\varphi^- \leqq \underline{R}f^-$. Jest $R\varphi = R\varphi^+ - R\varphi^- \geqq \bar{R}f^+ - \underline{R}f^-$ a tedy $\bar{R}f \geqq \bar{R}f^+ - \underline{R}f^-$.

2. Buď $\varepsilon > 0$, $\varphi_1 \in T$, $\varphi_2 \in T$, $\varphi_1 \leqq f^-$, $\varphi_2 \geqq f^+$, $R\varphi_1 \leqq \underline{R}f^- \leqq R\varphi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, $R\varphi_2 \geqq \bar{R}f^+ \geqq R\varphi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom $\varphi_2 - \varphi_1 \geqq f$ a $R\varphi_2 - R\varphi_1 \geqq \bar{R}f$, tedy $\bar{R}f^+ - \underline{R}f^- + \varepsilon > \bar{R}f$, takže $\bar{R}f^+ - \underline{R}f^- \geqq \bar{R}f$. Druhou rovnost lze dokázat analogicky.

Poznámka. *Buď f omezená funkce na X. Pak platí:*

1. *Jestliže $c \geqq 0$, pak je $\bar{R}(cf) = c\bar{R}f$ a $\underline{R}(cf) = c\underline{R}(f)$.*
2. $\bar{R}(-f) = -\underline{R}f$, $\underline{R}(-f) = -\bar{R}f$.
3. *Existuje-li Rf, pak existuje $R(cf) = cRf$ pro $c \in E_1$ libovolné a také existuje $R(|f|)$.*

Důkaz.

1. Plyne přímo z definice $\bar{R}f$ a $\underline{R}f$.
2. Plyne rovněž z definice nebo z lemmatu 2.
3. První část plyne z bodů 1. a 2. Druhá část: Existuje-li Rf, pak lemma 2 snadno dává, že existuje Rf^+ i Rf^-. Protože $|f| = f^+ + f^-$, existuje tedy i $R(|f|)$.

Poznámka. Označme $\mathscr{S}^*$ systém množin $M \subset X$, pro které $\underline{\mu}M = \bar{\mu}M$. Pro $M \in \mathscr{S}^*$ položme $\mu^*(M) = \underline{\mu}M = \bar{\mu}M$. Pro $M \subset X$ lze snadno dokázat, že $\bar{\mu}M = \bar{R}C_M$, $\underline{\mu}M = \underline{R}C_M$. Je tedy $M \in \mathscr{S}^*$ právě když existuje RC_M. Z již dokázaných vlastností funkcionálu R snadno plyne, že $(\mathscr{S}^*, \mu^*)$ je na X tělesem s mírou a je $(\mathscr{S}^*, \mu^*)$ rozšířením $(\mathscr{S}, \mu)$, tj. $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}^*$ a pro $Y \in \mathscr{S}$ je $\mu(Y) = \mu^*(Y)$.

Dále lze snadno dokázat, že je-li $(\mathscr{S}, \mu)$ σ-aditivní těleso se σ-aditivní mírou, je rovněž $(\mathscr{S}^*, \mu^*)$ σ-aditivní těleso se σ-aditivní mírou.

Definice 7. Buď f funkce na X. Označme $E_f^x = \{y \in X, f(y) > x\}$, ${}^*E_f^x = \{y \in X, f(y) \geqq x\}$. Pro $x \in (0, \infty)$ definujme $\bar{h}_f(x) = \bar{\mu}(E_f^x)$, $\underline{h}_f(x) = \underline{\mu}(E_f^x)$, ${}^*\bar{h}_f(x) = \bar{\mu}({}^*E_f^x)$, ${}^*\underline{h}_f(x) = \underline{\mu}({}^*E_f^x)$. Funkce $\bar{h}_f(x)$, $\underline{h}_f(x)$, ${}^*\bar{h}_f(x)$, ${}^*\underline{h}_f(x)$ jsou zřejmě ze Z. Pro nezápornou f na X položme $\bar{L}f = A\bar{h}_f$, $\underline{L}f = A\underline{h}f$.

Poznámka. Jest zřejmě $\bar{h}_f(x) \leqq {}^*\bar{h}_f(x)$, $\underline{h}_f(x) \leqq {}^*\underline{h}_f(x)$, $\underline{h}_f(x) \leqq \bar{h}_f(x)$, ${}^*\underline{h}_f(x) \leqq {}^*\bar{h}_f(x)$.

Lemma 3. *Jest* $^*\bar{h}_f(x) = \bar{h}_f(x)$ *v* $(0, \infty) \setminus S$, *kde* S *je spočetná množina. Stejné tvrzení platí pro* $^*\underline{h}_f$ *a* $\underline{h}_f$.

Důkaz. Dokážeme jen první část. Nechť $\bar{h}_f(x) < {}^*\bar{h}_f(x)$ pro nespočetně mnoho x. Funkce $\bar{h}_f$, $^*\bar{h}_f$ jsou nerostoucí, tedy spojité až na spočetně mnoho bodů. Tedy existuje x_0, že $\bar{h}_f(x_0) < {}^*\bar{h}_f(x_0)$ a $\bar{h}_f$ i $^*\bar{h}_f$ jsou v x_0 spojité. Tedy existuje $x_1 > x_0$, že $^*\bar{h}_f(x_1) > \bar{h}_f(x_0)$, tj. $\bar{\mu}(^*E_f^{x_1}) > \bar{\mu}(E_f^{x_0})$. Ale $^*E_f^{x_1} \subset E_f^{x_0}$, což je spor.

Poznámka. Je-li $0 \leqq f \in T$, je $Rf = \bar{L}f = \underline{L}f$. Je totiž $\bar{h}_f = \underline{h}_f$, $^*\bar{h}_f = {}^*\underline{h}_f$, tedy $\bar{L}f = \underline{L}f$. Lemma 3 a lemma 1 dávají $\bar{L}f = A\bar{h}_f = A^*\bar{h}_f$. Zřejmě $^*\bar{h}_f \in \hat{Z}$ a použijeme-li vlastnost (2) funkcionálu A, snadno dostaneme $Rf = A^*\bar{h}_f$.

Věta 1. *Budiž* f *omezená nezáporná funkce na* X. *Potom* $\bar{L}f = \bar{R}f$ *a* $\underline{L}f = \underline{R}f$.

Důkaz. Dokážeme první rovnost, druhou lze dokázat obdobně.

1. Nechť $\varphi \in T$, $\varphi \geqq f \geqq 0$. Pak $\bar{h}_\varphi \geqq \bar{h}_f$, tedy $\bar{L}\varphi \geqq \bar{L}f$. Platí $\bar{L}\varphi = R\varphi$, takže $R\varphi \geqq \bar{L}f$. Přechod k infimu dává $\bar{R}f \geqq \bar{L}f$.

2. Mějme dělení D intervalu $(0, \infty)$ dáno soustavou intervalů $\{I\}$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje dělící bod y_0 dělení D, že $y_0 < \varepsilon$. Označme $y_1 < y_2 < \dots$ ostatní dělící body větší než y_0. Potom je $\left|S(\bar{h}_f, D) - \sum_{i=0}^{\infty} (y_{i+1} - y_i)\, \bar{h}_f(y_i)\right| < \varepsilon\mu X$.

Existuje $k > 0$, že $E_f^{y_k} = \emptyset$ pro $i \geqq k$. Je dále $E_f^{y_0} \supset \dots \supset E_f^{y_k} = \emptyset$. Existují $M_i \in \mathscr{S}$, $M_i \supset E_f^{y_i}$, $\mu M_i - \bar{\mu} E_f^{y_i} < \varepsilon$, $i = 0, \dots, k$. Definujme $N_i = \bigcap_{l=0}^{i} M_l$, $i = 0, \dots, k - 1$, $N_k = \emptyset$.

Je pak $\mu N_i - \bar{\mu} E_f^{y_i} < \varepsilon$, $E_f^{y_i} \subset N_i$, $i = 0, \dots, k$; $N_i \supset N_{i+1}$, $i = 0, \dots, k - 1$. Pro jednoduchou funkci $g = \sum_{i=0}^{k-1} y_{i+1} C_{N_i \setminus N_{i+1}} + y_0 C_{X \setminus N_0}$ platí $g \geqq f$ a je $\left|Rg - \sum_{i=0}^{k-1} y_{i+1}(\mu N_i - \mu N_{i+1})\right| < \varepsilon \,.\, \mu X$. Dále platí $\left|\sum_{i=0}^{k-1} (y_{i+1} - y_i)\, \mu N_i - \sum_{i=0}^{k-1} y_{i+1}(\mu N_i - \mu N_{i+1})\right| = |y_0\, \mu(N_0) - y_k\, \mu(N_k)| < \varepsilon \,.\, \mu X$. Protože je $\left|\sum_{i=0}^{k-1} (y_{i+1} - y_i)\, \bar{\mu} E_f^{y_i} - \sum_{i=0}^{k-1} (y_{i+1} - y_i)\, \mu N_i\right| < y_k \,.\, \varepsilon$ a $\sum_{i=0}^{\infty} (y_{i+1} - y_i)\, \bar{h}_f(y_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (y_{i+1} - y_i)\, \bar{\mu} E_f^{y_i}$, dostáváme srovnáním nerovností $|S(h_f, D) - Rg| < \varepsilon(3\mu X + y_k)$. Z libovolnosti ε plyne $S(\bar{h}_f, D) \geqq \bar{R}f$ a tedy $\bar{L}f \geqq \bar{R}f$.

Poznámka. Buď X kompaktní interval v E_r. Vezměme za $\mathscr{S}$ systém těch $Y \subset X$, pro které platí $Y = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, kde $D_k = I_{k1} \times \dots \times I_{kr}$, $k = 1, \dots, n$, D_k disjunktní, přičemž $I_{kl} \subset E_1$ jsou souvislé množiny. Pro takto vyjádřené $Y \in \mathscr{S}$ položme $\mu(Y) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{r} d(I_{kl})$ kde $d(I)$ značí délku I, je-li I interval a $d(I) = 0$, je-li I množina jednobodová nebo prázdná. Potom je $(\mathscr{S}, \mu)$ na X tělesem s mírou, příslušný Rf je Riemannův integrál, $\bar{\mu}$ a $\underline{\mu}$ je horní a dolní Jordanova míra.

Nyní již snadno dokážeme větu, která je zobecněním jedné nutné a postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu, která je dokázána např. v práci [2].

Věta 2. *Nechť f je omezená funkce na X. Potom existuje Rf právě tehdy, když $E_f^x \in \mathscr{S}^*$ pro $x \in E_1 \setminus S$, kde S je spočetná množina.*

Důkaz. Z lemmatu 2 snadno plyne, že Rf existuje, právě když existuje Rf^+ i Rf^-. Rf^+ existuje, právě když $\bar{L}f^+ = \underline{L}f^+$, tj. $A\bar{h}_{f^+} = A\underline{h}_{f^+}$, což nastane podle lemmatu 1 právě tehdy, když $\bar{h}_{f^+}(x) = \underline{h}_{f^+}(x)$, tj. $E_{f^+}(x) = E_f(x) \in \mathscr{S}^*$ pro $x \in \in (0, \infty) \setminus S'$, kde S' je spočetná.

Podobně Rf^- existuje právě tehdy, když $\underline{h}f^-(x) = \bar{h}f^-(x)$ pro $x \in (0, \infty) \setminus S''$, kde S'' je spočetná, což je podle lemmatu 3 ekvivalentní s rovností $^*\underline{h}f^-(x) = {}^*\bar{h}f^-(x)$ pro $x \in (0, \infty) \setminus S'''$, kde S''' je spočetná, tj. že $^*E_f^x \in \mathscr{S}^*$ pro $x \in (0, \infty) \setminus S'''$. Platí ale $^*E_{f^-}^x = X \setminus E_f^{-x}$ pro $x > 0$. Tedy $^*E_{f^-}^x \in \mathscr{S}^* \Leftrightarrow E_f^{-x} \in \mathscr{S}^*$, takže existence Rf^- je ekvivalentní s tím, že $E_f^x \in \mathscr{S}^*$ pro $x \in (-\infty, 0) \setminus S''''$, kde S'''' jest spočetná. Tím je důkaz proveden.

Věta 3. *Nechť $\mathscr{S}$ je σ-těleso a μ nezáporná σ-aditivní míra. Nechť existuje Rf. Pak $E_f^x \in \mathscr{S}^*$, $^*E_f^x \in \mathscr{S}^*$ pro všechna $x \in E_1$.*

Důkaz. Buď $x_0 \in E_1$. Z věty 2 plyne, že existuje v $(-\infty, x_0)$, (resp. v $(x_0, +\infty)$) tam hustá množina bodů x_i (resp. y_i), $i = 1, 2, \ldots$, taková, že $E_f^{x_i} \in \mathscr{S}^*$ (resp. $^*E_f^{y_i} \in \mathscr{S}^*$). Pak je $^*E_f^{x_0} = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_f^{x_i}$ (resp. $E_f^{x_0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^*E_f^{y_i}$). Ze σ-aditivity $\mathscr{S}^*$ pak plyne naše tvrzení.

Jestliže R značí Riemannův integrál na kompaktním intervalu $I \subset E_r$, pak platí, jak známo, tato věta (Arzelàova):

(A) *Nechť $c \in E_1$, nechť existují Rf a Rf_n a nechť $|f_n| \leqq c$, $(n = 1, 2, \ldots)$ $f_n \to f$. Pak $Rf_n \to Rf$.*

V obecném případě věta (A) platit nemusí, jak ukazuje následující tvrzení.

Věta 4. *Tvrzení (A) platí právě když těleso s mírou $(\mathscr{S}, \mu)$, kterým je R na X určen, lze doplnit na σ-aditivní těleso se σ-aditivní mírou $(\mathscr{S}', \mu')$, tj. $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$ a $\mu A = \mu' A$ pro $A \in \mathscr{S}$.*

Důkaz. 1. Nechť $(\mathscr{S}, \mu)$ je doplněno na $(\mathscr{S}', \mu')$. Existuje-li $Rf = Rf^+ - Rf^- = Lf^+ - Lf^-$, je $Rf = Lf$, kde L nyní značí funkcionál vybudovaný nad $(\mathscr{S}', \mu')$ ve smyslu práce [1]. Je tedy (A) zvláštním případem věty 6.3 z [1].

2. Nechť platí tvrzení (A). V práci [3] je provedeno rozšíření systému Z funkcí na X a funkcionálu J definovaného na Z, jestliže platí:

(a) Z je lineární prostor;

(b) $f \in Z$, $c \in E_1$, $c \geqq 0 \Rightarrow \min(c, f) \in Z$;

(c) J je lineární nezáporný funkcionál na Z;

(d) $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0$;

Na základě tohoto rozšíření je ve [3] dokázáno, že existuje σ-aditivní těleso se σ-aditivní mírou $(\mathscr{S}', \mu')$ takové, že je-li $C_M \in Z$, je $M \in \mathscr{S}'$ a je $\mu' M = J(C_M)$.

Systém T s funkcionálem R splňuje zřejmě podmínky (a)–(c). Podmínka (d) pak plyne z předpokladu platnosti (A). Příslušné $(\mathcal{S}', \mu')$ je zřejmě žádaným rozšířením.

Poznámka. V [4] je dokázáno, že $(\mathcal{S}, \mu)$ lze výše uvedeným způsobem rozšířit, právě když μ je v $\emptyset$ spojitá, tj. jestliže platí toto: $A_i \in \mathcal{S}$, $A_i \supset A_{i+1}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = 0$. Platí tedy tato věta:

Věta 4'. *Tvrzení* (A) *platí právě když je μ v $\emptyset$ spojitá.*

Literatura

[1] *J. Lukeš:* Lebesgueův integrál, Časopis pro pěstování matematiky, *91* (1966), 371–383.
[2] *J. Ridder:* Über das Riemannsche Integral, Nieuw archief woor wiskunde, 1928.
[3] *J. Mařík:* Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěstování matematiky *76* (1951), 175–194.
[4] *M. Лоев:* Теория вероятностей, Москва, 1962.

Adresa autora: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

A NOTE ON THE THEORY OF INTEGRAL

LUDĚK ZAJÍČEK, Praha

In the article [1], a functional A is introduced on the class Z of all non-negative, non-increasing functions on $(0, \infty)$. Let $(X, \mathcal{S}, \mu)$ be a measure space where μ is non-negative, finite and additive, but not necessarily σ-additive. Then we define $\bar{\mu}$ and $\underline{\mu}$. For simple functions in the form $f = \sum_{i=1}^{n} y_i C_{A_i}$ we define the integral $Rf = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$. For a bounded function on X we define $\bar{R}f = \inf_{\varphi \geqq f} R\varphi$, $\underline{R}f = \sup_{\varphi \leqq f} R\varphi$, where φ is a simple function.

Let f be a non-negative function on X. We define $\bar{h}_f(x) = \bar{\mu}\{y \in X, f(y) > x\}$, $\underline{h}_f(x) = \underline{\mu}\{y \in X, f(y) > x\}$. Then we define $\bar{L}f = A\bar{h}_f$, $\underline{L}f = A\underline{h}_f$. In the paper it is proved that $\bar{L}f = \bar{R}f$ and $\underline{L}f = \underline{R}f$. From this result the main theorem of the paper follows: *Let f be a bounded function on X. Then $\bar{R}f = \underline{R}f$ if and only if there exists a denumerable set S such that* $\bar{\mu}\{y, f(y) > x\} = \underline{\mu}\{y, f(y) > x\}$ for $x \in E_1 \setminus S$.