Časopis pro pěstování matematiky

Jaromír Krys

Rovinné konfigurace typu $(3n_n,\, n_3^2)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 66--70

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117685`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ROVINNÉ KONFIGURACE TYPU $(3n_n\ n_3^2)$

JAROMÍR KRYS, Olomouc

(Došlo dne 3. února 1969)

Tento článek věnuji památce svého nezapomenutelného učitele akademika BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO.

Tento článek bezprostředně navazuje na článek [1]. Všechny problémy budeme řešit v euklidovské rovině, která je rozšířena o nevlastní a komplexní elementy.

Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Zvolme $O \in k$, $O \notin p$. Dva body kuželosečky k sečteme tak, že průsečík jejich spojnice s přímkou p spojíme s O a druhý průsečík této přímky s kuželosečkou je součtem daných bodů. Přičemž zřejmě spojnice dvou totožných bodů je tečna kuželosečky v tomto bodě.

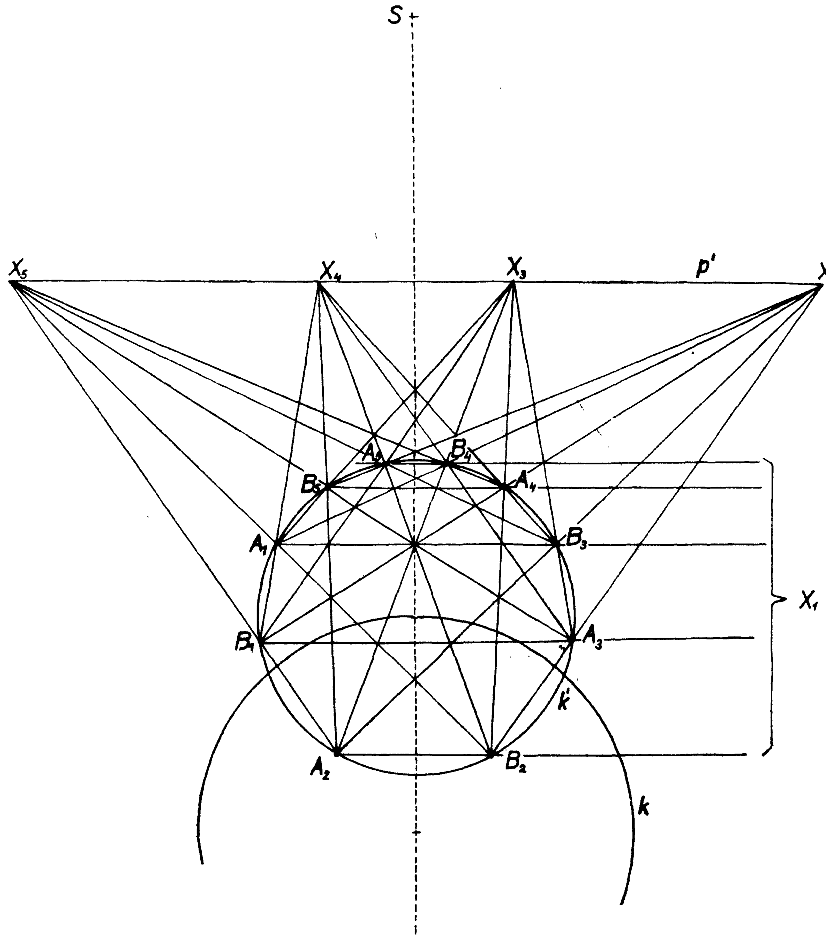
Věta 1. *Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Potom množina bodů kuželosečky k, které jsou regulárními body kubiky C tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání komutativní grupu H.*

Tato věta je i s důkazem uvedena v článku [1] a proto ji nebudeme dokazovat.

Věta 2. *Nechť reálné body $A_1, \ldots, A_n$, $n \geqq 3$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka. Zvolme kuželosečkou k z věty 1 kružnici opsanou tomuto n-úhelníku, přímkou p nevlastní přímku a bodem O některý z vrcholů A_i tohoto n-úhelníka. Potom množina vrcholů tohoto n-úhelníka je vzhledem k uvažovanému sčítání podgrupou G grupy H bodů kružnice k.*

Důkaz. Nechť vrcholy jsou číslovány obvyklým způsobem, tj. v jednom směru se index pravidelně zvětšuje. Zvolme např. $A_1 \equiv 0$. Nejdříve dokážeme, že spojnice A_iA_j, tj. spojnice dvou libovolných vrcholů pravidelného n-úhelníka je rovnoběžná s právě jednou přímkou A_1A_m, kde $m = 1, \ldots, n$. Zřejmě je přímka $A_{i+1}A_{j-1}$ při $i > j$ rovnoběžná s A_iA_j, neboť $\sphericalangle A_{i+1}A_jA_i \equiv \sphericalangle A_{j-1}A_{i+1}A_j$. Tyto úhly přísluší totiž obloukům o stejné délce. Toto platí i v případě, když $A_{i+1} \equiv A_{j-1} \equiv A_1$ a přímka $A_{i+1}A_{j-1}$ je tečnou kružnice k v A_1. Podobně přímka $A_{i+2}A_{j-2}$ je rovnoběžná s přímkou $A_{i+1}A_{j-1}$, a tedy i s přímkou A_iA_j. Nechť nyní pro i' je $A_{i+i'} \equiv A_1$. Potom přímka A_iA_j je rovnoběžná s přímkou $A_1A_{|j-i'|}$. Tím jsme dokázali, že množina vrcholů pravidelného n-úhelníka je vzhledem k danému sčítání uzavřená, tj. je semigrupou. Zřejmě však A_1 je nulový prvek a ke každému vrcholu A_i existuje jediný A_j takový, že přímka A_iA_j je rovnoběžná s tečnou v bodě A_1. Existuje tedy ke každému bodu bod opačný. Tím je důkaz proveden.

Věta 3. *Nechť* $\{B\} = \{B_1, \dots, B_n\}$, $\{C\} = \{C_1, \dots, C_n\}$ *jsou dva různé prvky grupy* H/G, $\{B + C\} = \{D_1, \dots, D_n\}$. *Nechť* X_i *je nevlastní bod přímky* OD_i, *potom platí: Body* $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n, X_1, \dots, X_n$ *jsou body rovinné konfigurace typu* $(3n_n\, n_3^2)$, *kde* n *je přirozené číslo větší než dvě.*

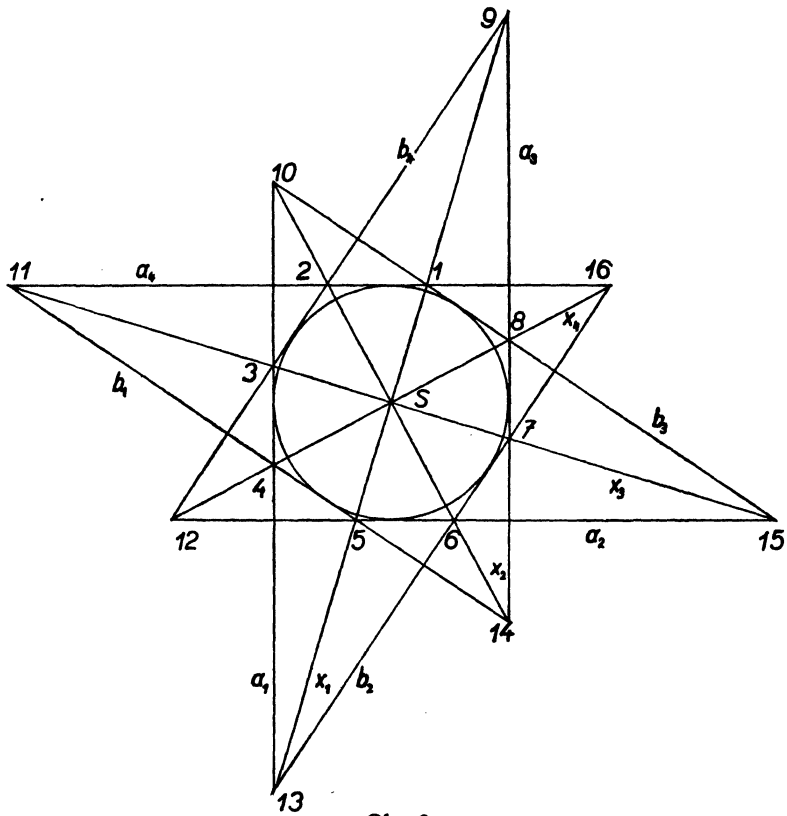


Obr. 1.

Důkaz. Přímky této konfigurace jsou B_iC_j, kde $i, j = 1, \dots, n$. Těchto přímek je zřejmě právě n^2. Dále zřejmě na každé této přímce leží právě jeden bod X_i, a tedy na každé této přímce leží právě tři body dané konfigurace. Bodů X_i je právě n, neboť

$\{B + C\}$ má právě n bodů. Bodů konfigurace je právě $3n$. Dále je zřejmé, že každým bodem $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n$ prochází právě n přímek. Bodem X_i nemůže procházet více přímek než n, neboť jinak by aspoň na jedné z nich leželo méně bodů než tři, a protože přímek konfigurace je právě n^2, musí každým bodem X_i procházet právě n přímek. Tím je věta 3 dokázána.

Poznámka 1. Ve větě 3 prvky (třídy) grupy H/G mohou obsahovat buď vesměs reálné body, nebo vesměs imaginární body. Zřejmě platí, že body konfigurace jsou: 1) vesměs reálné, 2) vesměs imaginární, 3) n bodů je reálných a $2n$ imaginárních.



Obr. 2.

Bezprostředním důsledkem věty 3, je:

Věta 4. *V rovině existují konfigurace typu $(3n_n\ n_3^2)$, kde n je přirozené číslo větší než dvě.*

Poznámka 2. Je zřejmé, že centrální kolineací se vztahy, které jsme odvodili, nezmění. Jako příklad je sestrojena konfigurace $(15_5\ 25_3)$, kde však jsou všechny body této konfigurace vlastní.

Dosud uvažované vztahy se dají dualizovat, tj. dá se zavést sčítání tečen duálním způsobem. Tedy dualisací věty 3 dostaneme také konfiguraci duální ke konfiguraci z věty 3. Platí tedy:

Věta 5. *V rovině existují konfigurace typu $(n_3^2\ 3n_n)$, kde n je přirozené číslo větší než dvě.*

Jako příklad je na obr. 2 zobrazena konfigurace $(16_3\ 12_4)$. Na obr. 2 je zobrazena jenom kružnice a daná konfigurace. Konstrukce prvků H/G není provedena. Čtenář však snadno uváží, že v případě kružnice k a nevlastní přímky p jsou prvky H/G pravidelné n-úhelníky. V duálním případě pro tečny kružnice a bod P totožný se středem kružnice jsou prvky H/G tečny ve vrcholech pravidelného n-úhelníka. Pro obr. 2 jsme sestrojili dva různé čtverce vepsané dané kružnici.

Poznámka 3. Mějme konfiguraci z věty 3. Jistě lze zvolit střed centrální kolineace tak, aby neležel na žádné spojnici bodů konfigurace z věty 3. Podobně lze zvolit osu této kolineace tak, aby neprocházela žádným z bodů dané konfigurace. Zvolme nyní dvě různé kolineace K a K' s daným středem a s danou osou. Dá se snadno dokázat, že touto kolineací přejde daná konfigurace opět v konfiguraci stejného typu a navíc na přímce procházející středem kolineace a bodem původní konfigurace leží právě po jednom z bodů konfigurací odvozených kolineacemi K a K'. Platí tedy:

Věta 6. *V rovině existují konfigurace typu $(9n_{n+1}\ n(n+3)_3)$, kde n je přirozené číslo větší než dvě.*

Závěrečná poznámka. V tomto článku jsme hlavně chtěli dokázat existenci uvedených konfigurací, a proto nezkoumáme další zajímavé vlastnosti uvedených grup a podgrup. Dále je ještě zajímavá otázka, zda grupa bodů kuželosečky, které jsou regulárními body kubiky C složené z této kuželosečky a vlastní přímky, má vždy vlastnost grupy z věty 2, tj. zda existují všechny její podgrupy řádu n. Lze dokázat, že je-li přímka nesečnou kuželosečky resp. přímkou, která má s kuželosečkou společné dva komplexně sdružené body, tak tuto vlastnost má. Dá se vždy najít taková kolineace, která převádí tuto kuželosečku v kružnici a danou přímku v nevlastní přímku roviny. Dále uvažujme jenom reálné body kružnice k. Zvolíme Gaussovu rovinu tak, že střed kružnice je totožný s průsečíkem reálné a imaginární osy, bod O je totožný s obrazem čísla jedna a měřítka na obou osách jsou stejná. Potom každý bod dané kružnice je obrazem komplexní jednotky. Uvažujeme-li pro sčítání bodů této kružnice nevlastní přímku, potom toto sčítání je shodné s násobením komplexních jednotek. Takže speciálním případem uvedeného sčítání je násobení komplexních jednotek. Dále podgrupy n-tého řádu jsou tvořeny obrazy příslušných n-tých odmocnin z jedničky.

Literatura

[1] *Jaromír Krys:* Konfigurace bodů rovinné kubiky. „Čas. pro pěst. mat." *94* (1969), 282—289.

Adresa autora: Olomouc, Leninova 26 (Palackého universita).

Zusammenfassung

DIE EBENEN-KONFIGURATIONEN VOM TYPUS $(3n_n\ n_3^2)$

JAROMÍR KRYS, Olomouc

In diesem Artikel wird bewiesen, dass es ebene Konfigurationen vom Typus $(3n_n, n_3^2)$, $(n_3^2, 3n_n)$ und $(9n_{n+1}, n(n + 3)_3)$ gibt, wo n eine natürliche Zahl grösser als 2 ist. Die Existenz solcher Konfigurationen wird mittels folgenden Grundsatzes bewiesen: Die Menge der Scheitel eines regelmässigen n-Verecks ist in bezug auf eine passend definierte Addition die Untergruppe einer diesem n-Viereck umschriebenen Kreispunkten-Gruppe.