Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ÜBER GEWISSE EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE AUF DEN IRREDUZIBLEN KURVEN DRITTER ORDNUNG ENDLICHE GRUPPOIDE BILDEN UND ÜBER DIE KONFIGURATIONEN C_{12}

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Eingegangen am 5. Februar 1968)

(Dem Andenken an Prof. Dr. BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, *gewidment)*

EINLEITUNG

In dem Artikel [4] hat J. METELKA den Arbeitsplan aufgestellt, der alle Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ in der Projektionsebene über dem Körper der Komplexzahlen festzustellen ermöglicht. Die vorliegende Arbeit bildet einen Bestandteil dieses Planes.

Das systematische Heraussuchen der Konfigurationen nimmt gewisse Klassifikation der Konfigurationspunkte in Anspruch und meiner Ansicht nach wäre es zweckmäsig diese Klassifikation wenigstens in Kürze zu beschreiben. In gleicher Weise erlaube ich mir, (für leichtere Orientation des Lesers), einige Grundbegriffe und Definitionen zu rekapitulieren.

Bezeichne man zwölf Konfigurationspunkte als *1, 2, ..., 12.* Wenn zwei von diesen Punkten (z. B. *1* und *2*) auf einer der Konfigurationsgeraden liegen, dann sagen wir, dass diese zwei Punkte verbunden sind und eine solche Relation bezeichnen wir kurz als $1-2$. Widrigenfalls sind die Punkte *1* und *2* getrennt, was mit $1:2$ bezeichnet ist.

Liegen drei Punkte (z. B. *5, 6, 7*) auf einer der Konfigurationesgeraden, dann schreiben wir kurz $5-6-7$. Im Falle, dass diese drei Punkte zwar auf der Geraden (aber nicht auf der Konfigurationsgeraden) liegen, bezeichnen wir diese zufällige Inzidenz als *567* und eine solche Gerade als fremde Gerade aufgefasst ist. So ist die Bezeichnung $5-6-7$ ausdrücklich für Konfigurationsgeraden reserwiert.

Jeder Konfigurationspunt inzidiert mit vier Konfigurationsgeraden und auf jeder von diesen Geraden liegen noch weitere zwei Konfigurationspunkte. Daraus ist ersichtlich, dass jeder Konfigurationspunkt mit acht anderen verbunden und genau von drei Punkten getrennt ist.

Definition 1. Sei *4* : *1*, *2*, *3*, d. h. der Punkt *4* ist von den Punkten *1*, *2*, *3* getrennt. Der Punkt *4* ist vom Typ

A, wenn *1* : *2*, *1* : *3*, *2* : *3* ist;

B, wenn *1* – *2*, *1* – *3*, *2* – *3*, aber nicht *1* – *2* – *3* ist;

C, wenn nur zwei von den Punkten *1*, *2*, *3* getrennt sind;

D, wenn nur zwei von den Punkten *1*, *2*, *3* verbunden sind und

E, wenn *1* – *2* – *3* ist.

Leicht stellen wir fest, dass andere Möglichkeiten nicht entstehen können.

Beschreiben wir auf diese Art alle sechzehn Konfigurationsgeraden, so bekommen wir das sogenante Schema der Konfiguration, man muss natürlich noch beweisen, dass es wirklich realisierbar ist, d. h., dass es eine Konfiguration representiert. Zu jedem realisierbaren Schema gehört eine Konfiguration, nicht aber umgekehrt. Wir können doch freiwillig die Zahlen *1*, *2*, ..., *12* permutieren. Infolgedessen ist es zweckmäsig die folgende Definition herzustellen:

Definition 2. Zwei Schemas gehören dann und nur dann zur gleichen Klasse, wenn soeine Permutation der Elemente *1*, *2*, ..., *12* existiert, die eins der Schemas auf das andere bringt.

Zwei Konfigurationen sind dann und nur dann verschieden, wenn deren Schemas zur verschiedenen Klassen gehören.

Im Jahre 1955 hat J. Metelka Schemas von allen Konfigurationen, die mindenstens einen A-Punkt enthalten, gefunden und hat auch bewiesen, dass alle realisierbar sind. Die Ergebnisse dieser Arbeit waren im Artikel [4] veröfentlicht. Zwei Jahre nachher, habe ich im Artikel [5] alle Konfigurationen mit D-Punkten beschreiben.

Seit dieser Zeit sind die Konfigurationen systematisch nicht gesucht worden, trotz alledem waren schon einige Ergebnisse bekannt, die man zur weiteren Forschung benützen kann. So habe ich im Artikel [6] darauf hingewiesen, dass die Konfigurationen mit zwölf E-Punkten (kurz E_{12} – Konfigurationen) nicht existieren und ausserdem habe ich alle Konfigurationen vom Type E_iC_{12-i}, $i > 0$ gefunden.

Daraus ist ersichtlich, dass nur die Konfigurationen C_{12} und die mit B-Punkten zum systematischen Suchen bleiben.

Über ebene Konfigurationen C_{12} habe ich auch in der Arbeit [6] kurz gesprochen und ihre Anzahl abgeschätzt (siehe die Bemerkung am Ende des achten Kapitels, Seite 301). Das umfangreiche Program der Arbeit [6] verhinderte damals diese Frage ausführlicher zu bearbeiten.

Den Beweis der Existenz von vier Konfigurationen C_{12} gebe ich in dieser Arbeit. Zunächst aber noch einige Bemerkungen.

Die Elementarklassifikation der Konfigurationspunkte auf A, B, C, D, E – Typen genügt manchmal nicht, besonders wenn es sich um die Frage handelt, ob zwei

Schemas zu den verschiedenen, oder gleichen Klassen gehören. Auch bei der Konstruktion der Schemas kann man bald sehen, dass eine weitere und noch mehr kontrastvolle Klassifikation wünschenswert ist.

Manche Methoden, auf welche Weise diese Klassifikation erreicht werden kann, wurden schon früher in anderen Arbeiten beschrieben und es ist nicht nötig alle da zu wiederholen.

Da wird nur die Methode der weiteren Klassifikation der C-Punkte gebracht, nachdem gerade mit diesen Punkten wir uns weiter hauptsächlich befassen werden.

Sei *4* ein C-Punkt, der von den Punkten *1*, *2*, *3* getrennt ist. Der Definition D.1. nach können wir voraussetzen, dass $2-3$, $1-2$, $1:3$ ist. Leicht können wir uns überzeugen, dass die Punkte *1*, *2*, *3*, *4* mit vierzehn Konfigurationsgeraden inzidieren und daraus folgt, dass sie auf genau zwei Konfigurationsgeraden nicht liegen. Wir bezeichnen diese Geraden p, q.

Definition 3. Der Konfigurationspunkt *4* ist vom Typ C^1, wenn die Geraden p, q sich in einem Konfigurationspunkte schneiden. Im anderen Fall ist der Punkt *4* vom Typ C^2.

Wie schon vorher gesagt wurde, einer der Ziele dieser Arbeit ist, alle Konfigurationen mit zwölf C-Punkten zu finden. Ausserdem wird auf einige interessante Eigenschaften der Konfigurationen aus der Arbeit [6] hingewiesen. Die Punkte dieser Konfigurationen bilden namentlich auf der Kurven dritter Ordnung endliche Gruppoide, deren Eigenschaften noch nicht in der Literatur beschreiben worden sind.

PROGRAMM

a) Das erste Kapitel ist den Konfigurationen aus der Arbeit [6] gewidmet. Wir werden die Beziehungen zwischen diesen Konfigurationen und zwei Konfigurationen von J. de Vries erforschen und die Gruppoide auf den kubischen Kurven definieren.

b) Im zweiten Kapitel wird bewiesen, dass höchstens fünf Schemas C_{12} von verschiedenen Klassen, die wenigstens einen C^1-Punkt behalten, existieren können.

c) Dem Beweis, dass die Konfigurationen mit zwölf C-Punkten mindestens einen C^1-Punkt enthalten müssen, ist das dritte Kapitel gewidmet.

d) In dem letzten Kapitel bleibt es übrig zu beweisen, dass wirklich die Schemas aus dem zweiten Kapitel zu verschiedenen Klassen gehören und vier von ihnen realisierbar sind.

Endlich am Schluss jedes Kapitels fassen wir die Ergebnisse übersichtlich zusammen.

In diesem Kapitel studieren wir dem Programm nach gewisse Eigenschaften der Schemas S_1, S_2, S_3, S_4 aus der Arbeit [6]. Wir wenden unser Interesse zuerst zu dem Schema S_3. Dieses Schema kann man in der folgenden Form ausdrücken:

$$
\begin{array}{llllll}
 & \underline{\overline{M}} & \underline{\overline{X}} & \underline{\overline{N}} & \underline{\overline{O}} & \\
S_3 & N\,R\,Q\,P & P\,Q\,W\,U & R\,V\,P & S\,V\,P & R-T-V \\
 & O\,U\,T\,W & S\,R\,T\,V & S\,W\,Q & T\,Q\,U & S-U-W.
\end{array}
$$

Dazu ist es zu bemerken, dass auf das ursprüngliche Schema aus der Arbeit [6] die Permutation

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X \end{pmatrix}
$$

durchgeführt wurde.

Wir wissen schon, dass die Punkte dieser Konfiguration mit der elliptischen Kurve dritter Ordnung inzidieren. Das benützen wir zum Ausdrücken der Koordinaten ihrer Punkte und sei t ein elliptischer Parameter des Punktes T.

Nehmen wir die, aus den bekannten Bedingungen für drei Punkte auf der Geraden folgenden, Identitäten (Modd. Per.) in Betracht, dann können wir folgendes schrieben:

$$
\begin{aligned}
&(x + p + s) + (o + s + t) + (s + u + w) - (o + p + u) - (x + w + t) \equiv \\
&\quad \equiv 3s \equiv 0\,, \\
&(m + q + t) + (r + t + v) + (o + p + u) - (o + v + q) - (m + r + u) - \\
&\quad - (x + p + s) \equiv 2t - s - x \equiv 0\,, \\
&(x + w + t) - (s + u + w) \equiv x + t - s - u \equiv 0\,, \\
&(r + t + v) - (x + u + v) \equiv r + t - x - u \equiv 0\,, \\
&(m + r + u) + (r + t + v) + (x + q + r) - (x + u + v) - (m + q + t) \equiv \\
&\quad \equiv 3r \equiv 0\,.
\end{aligned}
$$

Aus der ersten Identität ist ersichtlich, dass der Punkt S ein Inflexionspunkt der kubischen Kurve ist und man kann also $s \equiv 0$ wählen. Fortlaufend bekommen wir aus den weitere Identitäten die Beziehungen: $x \equiv 2t$, $u \equiv 3t$, $r \equiv 4t$, $12t \equiv 0$ (Modd. Per.). Daraus folgt schon, dass man die übrigen Konfigurationspunkte in der Form

$$
\begin{array}{ll}
S_3 & t \equiv t\,,\quad x \equiv 2t\,,\quad u \equiv 3t\,,\quad r \equiv 4t\,,\quad m \equiv 5t\,,\quad q \equiv 6t\,,\quad v \equiv 7t\,, \\
 & n \equiv 8t\,,\quad w \equiv 9t\,,\quad p \equiv 10t\,,\quad o \equiv 11t\,,\quad s \equiv 0\,,\quad t \equiv \omega_1 : 6
\end{array}
$$

ausdrücken können.

Auf der Kurve dritter Ordnung (ohned Singularpunkte) kann man den folgenden Gruppoid definieren.

Definition 4. Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge der Punkte auf der Kurve dritter Ordnung, die keine Singularpunkte enthält und A, B zwei Elemente aus $\mathfrak{M}$. Die Gerade AB schneidet diese Kurve zum drittenmal im Punkte C. Offensichtlich C gehört zu $\mathfrak{M}$ und wir schreiben

$$AB = C\,.$$

Wenn $B \equiv A$ ist, dann ist die Gerade AB eine Tangente des Punktes A $(AA = C)$ und nur im Falle, dass A ein Inflexionspunkt ist, bekommen wir die Beziehung $AA = A$.

Dieser Gruppoid enthält allgemein eine unendliche Anzahl der Elemente.

Leicht können wir uns überzeugen, dass zwölf Konfigurationspunkte aus s_3 einen endlichen Subgruppoid von diesen Gruppoid bilden. Aus den Relationen s_3 folgt nämlich

$$MM = X\,,\quad NN = N\,,\quad OO = X\,,\quad PP = R\,,\quad QQ = S\,,\quad RR = R\,,$$
$$SS = S\,,\quad TT = P\,,\quad UU = Q\,,\quad VV = P\,,\quad WW = Q\,,\quad XX = N\,,$$
$$MS = V,\quad NT = U\,,\quad RO = W.$$

Zu diesen fünfzehn Relationen muss man noch analogisch die Beziehungen zwischen den Punkten auf den Konfigurationsgeraden aus S_3 hinfügen. Einer besseren Übersicht über diesen Gruppoid halber, schliessen wir die folgende und offensichtlich wohlverständliche Tabelle 1 an:

Tabelle 1

T. 1

	M	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*
M	*X*	*O*	*N*	*W*	*T*	*U*	*V*	*Q*	*R*	*S*	*P*	*M*
N	*O*	*N*	*M*	*Q*	*P*	*S*	*R*	*U*	*T*	*W*	*V*	*X*
O	*N*	*M*	*X*	*U*	*V*	*W*	*T*	*S*	*P*	*Q*	*R*	*O*
P	*W*	*Q*	*U*	*R*	*N*	*P*	*X*	*T*	*O*	*V*	*M*	*S*
Q	*T*	*P*	*V*	*N*	*S*	*X*	*Q*	*M*	*U*	*O*	*W*	*X*
R	*U*	*S*	*W*	*P*	*X*	*R*	*N*	*V*	*M*	*T*	*O*	*Q*
S	*V*	*R*	*T*	*X*	*Q*	*N*	*S*	*O*	*W*	*M*	*U*	*P*
T	*Q*	*U*	*S*	*T*	*M*	*V*	*O*	*P*	*N*	*R*	*X*	*W*
U	*R*	*T*	*P*	*O*	*U*	*M*	*W*	*N*	*Q*	*X*	*S*	*V*
V	*S*	*W*	*Q*	*V*	*O*	*T*	*M*	*R*	*X*	*P*	*N*	*U*
W	*P*	*V*	*R*	*M*	*W*	*O*	*U*	*X*	*S*	*N*	*Q*	*T*
X	*M*	*X*	*O*	*S*	*R*	*Q*	*P*	*W*	*V*	*U*	*T*	*N*

Aus der Tabelle sehen wir, dass in der Konfiguration drei fremde Geraden (MSV, NTU, ROW) vorkommen und es entsteht die natürliche Frage, ob der Gruppoid aus der Tabelle 1. für die Konfiguration S_3 charakteristisch ist, oder ob auch eine andere Konfiguration existiert, die diesen Gruppoid bildet. Das Schema dieser anderen Konfiguration muss natürlich zu einer anderen Klasse, als S_3, gehören.

In der Tabelle 1 treten neunzehn Geraden (daraus sechzehn Konfigurations- und drei Fremdgeraden) ein. Man bezeichnet drei von diesen Geraden als fremde und die übrigen als neue Konfigurationsgeraden.

Man schreibt zuerst die Geraden, welche bedingungslos Konfigurationsgeraden sein müssen. Aus Tabelle ersehen wir, dass nur die Punkte X, P, Q die Eigenschaft haben, dass durch jeden von denen genau vier Geraden gehen. Man muss unbedingt also diese Geraden als Konfigurationsgeraden bezeichnen. Also

$$\begin{array}{c} X \\ \hline P\ Q\ W\ U \\ S\ R\ T\ V \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \\ \hline W\ Q\ O \\ M\ N\ U \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q \\ \hline M\ V \\ T\ O \end{array}$$

sind neue Konfigurationsgeraden und drei Geraden der Menge

$$\begin{array}{c} N \\ \hline T\ R\ V\ O \\ U\ S\ W\ M \end{array} \qquad \begin{array}{c} S \\ \hline T\ U\ M \\ O\ W\ V \end{array} \qquad \begin{array}{c} R \\ \hline T\ O\ U \\ V\ W\ M \end{array}$$

müssen fremd sein.

Beinahe augenblicklich überzeugen wir uns, dass auch die Gerade $N-R-S$ konfigurationell ist (und deswegen habe ich diese schon in der Form $N-R-S$ ausgedrückt). Es bleiben also nur die folgende drei Möglichkeiten übrig:

a) NTU, SMV, ROW; b) NVW, STO, RUM; c) NOM, SUW, RTV.

Den Fall a) können wir sofort eliminieren, nachdem er zur Konfiguration S_3 führt. Im Falle b) bekommt man das Schema

$$\begin{array}{c} M \\ \hline S\ N\ Q\ P \\ V\ O\ T\ W \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \hline P\ Q\ W\ U \\ S\ R\ T\ V \end{array} \qquad \begin{array}{c} N \\ \hline R\ P\ T \\ S\ Q\ W \end{array} \qquad \begin{array}{c} O \\ \hline V\ P\ R \\ Q\ U\ W \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ R-T-V \\ S-U-W, \end{array}$$

die der Permutation (MO), (TV), (UW) nach, mit der Konfiguration S_3 äquivalent ist.

Es bleibt nur die Möglichkeit c) übrig, welche tatsächlich zu einer anderen Konfiguration führt. Es ist das Schema

$$\text{A II} \qquad \begin{array}{c} M \\ \hline R\ Q\ P\ S \\ U\ T\ W\ V \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \hline P\ Q\ W\ U \\ S\ R\ T\ V \end{array} \qquad \begin{array}{c} N \\ \hline R\ V\ P\ T \\ S\ W\ Q\ U \end{array} \qquad \begin{array}{c} O \\ \hline S\ V\ P\ R \\ T\ Q\ U\ W. \end{array}$$

Dieses Schema ist realisierbar und definiert eine bekannte Konfiguration von J. de Vries die in der Literatur als A II bezeichnet wird.

Bemerkung. Zu diesem Ergebniss bemerken wir ausdrücklich, dass die Konfiguration A II allgemein keinen Gruppoid T. 1 bildet, nachdem sie auch allgemein keine fremde Geraden (MNO, SUW, RTV) enthält. Das wird übrigens bald zu sehen sein.

Die Koordinaten der Konfigurationspunkte A II können mit Hilfe der elliptischen Parametern folgendermassen ausgedrückt werden:

$$m \equiv c - a - b, \quad n \equiv -a - b, \quad o \equiv -a - b - c, \quad p \equiv a + 2c,$$

$$\mathrm{a}_2 \quad q \equiv b + 2c, \quad r \equiv a, \quad s \equiv b, \quad t \equiv a + c, \quad u \equiv b - c, \quad v \equiv a - c,$$

$$w \equiv b + c, \quad x \equiv 2c - a - b,$$

wo $2c \equiv 3\omega_1$ (Modd. Per.) ist.

Daraus ist ersichtlich, dass die Konfiguration A II drei fremde Geraden MNO, SUW, RTV nur in dem Falle enthält, wenn $3b \equiv 0$, $3a \equiv 0$ (Modd. Per.) ist. S und R sind dann Inflexionspunkte der Kurve und in geeigneter Weise ($b \equiv 0$, $3a \equiv 2\omega_1$) kann man das Zusammentreffen der Beziehungen a_2 mit s_3 erreichen. Die Konfiguration A II mit diesem Zusatz von drei fremden Geraden bildet schon den Gruppoid der Tabelle 1.

Mit dieser Konfiguration und Tabelle 1 werden wir uns noch später beschäftigen. Zuerst stellen wir uns auf das Schema S_4 der Arbeit [6] ein. Wir benützen die Permutation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X \end{pmatrix},$$

und die Konfiguration wird in der Form

$$\mathrm{S}_4 \qquad \begin{array}{c} X \\ \hline Q\,R\,T\,U \\ P\,S\,W\,V \end{array} \quad \begin{array}{c} M \\ \hline N\,R\,P\,Q \\ O\,U\,T\,W \end{array} \quad \begin{array}{c} N \\ \hline Q\,V\,P \\ R\,W\,S \end{array} \quad \begin{array}{c} O \\ \hline S\,V\,P \\ T\,Q\,U \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ R-T-V \\ S-U-W \end{array}$$

dargestellt.

Die Berechnung der Koordinaten werde ich auch hier ausführlich erbringen um zu beweisen, dass zwölf Konfigurationspunkte stets den Gruppoid bilden. Vor allem aus der Beziehung $(x + r + s) + (x + t + w) + (x + u + v) - (r + t + v) - (s + u + w) \equiv 3x \equiv 0$ (Modd. Per.) folgt, dass X ein Inflexionspunkt der kubischen Kurve ist und man kann also $x \equiv 0$ wählen. Auf diese Weise bekommt man aus den Relationen

$$(o + s + t) + (s + u + w) + (x + q + p) - (o + p + u) - (x + t + w) \equiv$$
$$\equiv 2s + q \equiv 0$$

$$(o + v + q) + (n + q + r) + (m + q + t) - (r + t + v) - (m + n + o) \equiv$$
$$\equiv 3q \equiv 0$$

$6s \equiv 0$, $q \equiv 4s$ und endlich aus

$$(m + n + o) + (m + r + u) + (x + q + p) - (n + q + r) - (o + p + u) \equiv$$
$$\equiv 2m + x \equiv 0$$

folgt $2m \equiv 0$.

Bezeichnet man $s \equiv b$, $m \equiv a$, dann ist

S_4
$$m \equiv a\,, \quad n \equiv 3b\,, \quad o \equiv a + 3b\,, \quad p \equiv 2b\,, \quad q \equiv 4b\,, \quad r \equiv 5b\,,$$
$$s \equiv b\,, \quad t \equiv a + 2b\,, \quad u \equiv a + b\,, \quad v \equiv a + 5b\,, \quad w \equiv a + 4b\,, \quad x \equiv 0$$
$$(\text{Modd. Per.})\,,$$

wo $a \equiv \omega_1$, $b \equiv \omega_2 : 3$ ist.

Augenblicklich können wir uns überzeigen, dass zwölf Punkte dieser Konfiguration immer den folgenden Gruppoid bilden:

Tabelle 2

T. 2

	M	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*
M	*X*	*O*	*N*	*W*	*T*	*U*	*V*	*Q*	*R*	*S*	*P*	*M*
N	*O*	*X*	*M*	*S*	*R*	*Q*	*P*	*U*	*T*	*W*	*V*	*N*
O	*N*	*M*	*X*	*U*	*V*	*W*	*T*	*S*	*P*	*Q*	*R*	*O*
P	*W*	*S*	*U*	*P*	*X*	*R*	*N*	*T*	*O*	*V*	*M*	*Q*
Q	*T*	*R*	*V*	*X*	*Q*	*N*	*S*	*M*	*U*	*O*	*W*	*P*
R	*U*	*Q*	*W*	*R*	*N*	*P*	*X*	*V*	*M*	*T*	*O*	*S*
S	*V*	*P*	*T*	*N*	*S*	*X*	*Q*	*O*	*W*	*M*	*U*	*R*
T	*Q*	*U*	*S*	*T*	*M*	*V*	*O*	*P*	*N*	*R*	*X*	*W*
U	*R*	*T*	*P*	*O*	*U*	*M*	*W*	*N*	*Q*	*X*	*S*	*V*
V	*S*	*W*	*Q*	*V*	*O*	*T*	*M*	*R*	*X*	*P*	*N*	*U*
W	*P*	*V*	*R*	*M*	*W*	*O*	*U*	*X*	*S*	*N*	*Q*	*T*
X	*M*	*N*	*O*	*Q*	*P*	*S*	*R*	*W*	*V*	*U*	*T*	*X*

In der Konfiguration existieren also drei fremde Geraden *MSV, NTU, ORW*. Diese Konfiguration hat die analogische Beziehung zur bekannten Konfiguration A I von J. de Vries, wie die Konfiguration S_3 zu A II.

Im Sinne dieser Analogie setzen wir zur Konfiguration S_4 drei fremde Geraden *MSV, NTU, ORW* zu und eliminieren drei ursprüngliche Konfigurationsgeraden derart, dass eine neue Konfiguration $(12_4, 16_3)$ entsteht. Wir sehen sofort, dass diese Operation nur auf zweierlei Art verläuft.

Entweder eliminiert man aus der Konfiguration die Geraden $M-R-U$, $O-S-T$, $N-V-W$ und so bekommt man das Schema S'_4:

$$
S'_4 \qquad
\begin{array}{c}
X \\ \hline
Q\ R\ T\ U \\
P\ S\ W\ V
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
M \\ \hline
N\ S\ Q\ P \\
O\ V\ T\ W
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
N \\ \hline
Q\ T\ P \\
R\ U\ S
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
O \\ \hline
V\ R\ P \\
Q\ W\ U
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\
R-T-V \\
S-U-W,
\end{array}
$$

oder die Geraden $M-N-O$, $S-U-W$, $R-T-V$ und entsteht die Konfiguration A I:

$$
\text{A I} \qquad
\begin{array}{c}
X \\ \hline
Q\ R\ T\ U \\
P\ S\ W\ V
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
M \\ \hline
S\ R\ Q\ P \\
V\ U\ T\ W
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
N \\ \hline
T\ Q\ V\ P \\
U\ R\ W\ S
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
O \\ \hline
R\ S\ V\ P \\
W\ T\ Q\ U\,.
\end{array}
$$

Der Permutation (MO), (TV), (UW) halber ist das Schema S'_4 dem Schema S_4 äquivalent. Wie schon vorher gesagt wurde gehört das Schema A I zur gleichen Klasse wie das Schema der Konfiguration von J. de Vries.

Und wieder, wie im vorhergehenden Falle ist es nötig zu bemerken, dass auch die Konfiguration A I allgemein nicht den Gruppoid T. 2 bildet, weil diese allgemein nicht die fremde Geraden MNO, SUW, RTV enthält. Das sehen wir gleich aus den folgenden Koordinaten (Modd. Per.) der Konfigurationspunkte:

$$
\begin{gathered}
m \equiv a + c\,, \quad n \equiv c + 3b\,, \quad o \equiv a + c + 3b\,, \quad p \equiv 3b - d - c\,, \\
\mathrm{a}_1 \qquad q \equiv 3b + d\,, \quad r \equiv -c - d\,, \quad s \equiv d\,, \quad t \equiv a + 3b - c - d\,, \\
u \equiv a + d\,, \quad v \equiv a - c - d\,, \quad w \equiv a + d - 3b\,, \quad x \equiv c\,,
\end{gathered}
$$

wo $a \equiv \omega_1$, $b \equiv \omega_2 : 3$ ist.

Nur im Falle, dass gleichzeitig $3c \equiv 0$ und $3b - 3d \equiv 0$ ist, gehören zu dieser Konfiguration auch drei fremde Geraden MNO, SUW, RTV. Daraus aber folgt, dass die Punkte X, P, Q Inflexionspunkte auf der kubischen Kurve sind und man kann $b \equiv d$, $c \equiv 0$ wählen. Leicht überzeugen wir uns, dass in diesem Falle die Koordinaten a_1 mit s_4 zusammenfallen.

Jetzt kommen wir auf die Tabelle 1 und Konfiguration A II noch auf eine Weile zurück.

Wie schon vorher gesagt wurde, kann die Konfiguration A II allgemein keine fremde Gerade enthalten. Andererseits ist ersichtlich, dass bei der Spezialwahl der Parameter in der Konfiguration fremde Geraden vorkommen.

Je nachdem, wie die Konfigurationspunkte miteinander getrennt sind ist es leicht zu erwägen, dass nur folgende drei Möglichkeiten für fremde Geraden entstehen können.

$$\underset{\text{I.}}{(MNO, MNX, MOX, NOX)}, \quad \underset{\text{II.}}{(TPR, TPV, TRV, PRV)}, \quad \underset{\text{III.}}{(WQS, WQU, WSU, QSU)}$$

Es ensteht die natürliche Frage, ob es nicht möglich ist, eine neue Konfiguration $(12_4, 16_3)$ einer anderen Klasse als A II, aus A II bekommen und zwar mit dergleichen Operation, wie wir schon früher aus S_3 die Konfiguration A II bekamen. So werden wir uns weiter bemühen drei ursprüngliche Konfigurationsgeraden aus A II eliminieren und andererseits drei ursprüngliche fremde Geraden hinzufügen.

M. 1. Wir setzen zuerst voraus, dass in A II wenigstens eine fremde Gerade existiert.

Zugleich ist es zu bedenken, dass sich bei der Benützung der Permutationen

$$P_1 = (MN), (SU), (TV), (WQ), (OX)\,; \quad P_2 = (MX), (NO), (VR), (QS), (PT)\,;$$
$$P_3 = (VT), (WU), (MO)$$

die Konfiguration A II nicht ändert.

Den Permutationen P_1 und P_2 nach ist es gleichgültig, welche von den Geraden der Menge (I) wir als fremde Gerade wählen. Eine analogische Erwägung ist für die Menge (II) – den Permutationen P_2 und P_3 halber – und auch für die Menge (III) den P_1 und P_3 nach, gültig.

Ohne Einschänkung können wir weiter voraussetzen, dass unsere fremde Gerade zur Trippel (MNO, TPR, SUW) gehört. Die zulässige Permutation $(MW), (NS), (QX), (OU)$ zeigt, dass man die fremde Gerade aus dem Paar (TPR, SUW) wählen kann und endlich die Permutation $(ST), (PU), (RW), (NX), (VQ)$ lässt die Wahl zwischen TPR und SUW zu.

Gehört also die fremde Gerade zur Konfiguration A II, dann können wir diese, ohne Einschränkung, eben als SUW-Gerade wählen. Bei dieser Wahl nehmen die Parametern die folgende Form an:

$$\bar{a}_2 \qquad m \equiv c - a\,, \quad n \equiv -a\,, \quad o \equiv -a - c\,, \quad p \equiv a + 2c\,, \quad q \equiv 2c\,,$$
$$r \equiv a\,, \quad s \equiv 0\,, \quad v \equiv a - c\,, \quad w \equiv c\,, \quad x \equiv 2c - a\,,$$

wo $2c \equiv 3.\,\omega_1$(Modd. Per.) ist.

Bemerkung. Aus der Bedingung der Existenz SUW folgt, dass $3b \equiv 0$ ist und also muss S ein Inflexionspunkt der Kurve sein.

P. 1 Weiter setzen wir voraus, dass die Konfiguration A II wenigstens zwei fremde Geraden enthält (und gleichzeitig $\bar{a}_2$ ist).

Leicht überzeugen wir uns, dass die letztgenannte Gerade nicht mehr zur Menge (III) gehören kann.

Nehmen wir an, dass MNO die letztgenannte fremde Gerade wäre, dann ist $3a \equiv 0$ und daraus folgt, dass in der Konfiguration auch die dritte fremde Gerade (TRV) auftritt. Umgekehrt, wenn die Konfiguration die Gerade TRV enthält, dann enthält sie auch die Gerade MNO. Dieser Fall aber fürht zum Gruppoid T. 1, der schon oben durchgenommen worden ist und wir können ihn aus den weiteren Erwägungen ausschliessen.

Ein analogisches Paar (unter der Voraussetzung der Existenz SUW), bilden auch die Geraden NOX, TPR $(c \equiv 3a)$; MNX, $PRV(3a \equiv 3c)$ und MOX, $TPV(2c \equiv 3a)$.

Die Konfiguration A II kann also nicht nur zwei fremde Geraden enthalten und ausserdem sehen wir, dass mehr als drei Geraden in A II nicht vorkommen.

Wir treten zum näheren Studium dieser Möglichkeiten heran. Angenommen, dass A II fremde Geraden SUW, NOX, TPR enthält, bekommt man aus dieser verbreiteten Konfiguration der Permutation $(MX), (NO), (PV), (RT), (UW)$ halber, die bekannte Konfiguration S_3 mit den fremden Geraden MSV, NTU, ROW.

Diese Möglichkeit führt also zum Gruppoid aus der Tabelle 1. Eine analogische Erwägung gilt auch für die zwei übrige Möglichkeiten, wo wir zu A II die Trippel (SUW, MNX, PRV), resp. (SUW, MOX, ROW) setzen.

Im ersten dieser Fälle nützen wir die Permutation $(VT), (WU), (MO)$ und im zweiten die Permutation $(RX), (PN), (TM), (UW), (VO)$ aus.

Man kann also einen Hilfsatz aussprechen:

Lemma 1. *Enthält die Konfiguration* A II *mindestens zwei fremde Geraden, dann bilden ihre Punkte den Gruppoid, der zur gleichen Klasse wie* T. 1 *gehört.*

Folgerung. *Die Variationsmethode der fremden Geraden für die Konfigurationsgerade führt bei* A II *entweder wieder zur Konfiguration* A II, *oder zur Konfiguration* S_3.

Eine analogische Erwägung (und Beweis) gilt auch für die Konfiguration A I und den Gruppoid aus der Tabelle 2. Deswegen geben wir da ohne Beweis:

Lemma 2. *Enthält die Konfiguration* A I *mindenstens zwei fremde Geraden, dann bilden ihre Punkte einen Gruppoid, der zur gleichen Klasse wie* T. 2 *gehört.*

In diesem Kapitel wenden wir uns noch an die Schemas S_1 und S_2 aus der Arbeit [6], auf welche wir zuerst die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X \end{pmatrix}$$

benützen, so dass sich die Konfigurationen in die folgende Form transformieren:

	M	N	O	P	S	
S_1	$Q\ S\ R\ T$	$X\ R\ O\ P$	$V\ X\ P$	$W\ X$	$R\ T$	$U-V-Q$,
	$X\ V\ U\ W$	$W\ T\ U\ V$	$W\ S\ T$	$Q\ R$	$Q\ U$	

	M	N	O	P	V	
S_2	$V\ W\ Q\ S$	$T\ X\ O\ P$	$U\ W\ P$	$Q\ X$	$Q\ R$	$W-T-U$.
	$X\ R\ T\ U$	$V\ R\ S\ U$	$Q\ X\ T$	$R\ S$	$W\ S$	

Für die Koordinaten der Konfigurationspunkte bekommt man:

s_1
$$x \equiv a\,,\quad q \equiv 3a\,,\quad s \equiv 4a\,,\quad w \equiv 5a\,,\quad p \equiv 6a\,,\quad r \equiv 7a\,,$$
$$n \equiv 8a\,,\quad o \equiv 9a\,,\quad m \equiv 10a\,,\quad u \equiv 11a\,,\quad t \equiv 13a\,,\quad v \equiv 0\,,$$

wo $7a \equiv \omega_1$ ist.

s_2
$$x \equiv a\,,\quad r \equiv 2a\,,\quad w \equiv 3a\,,\quad v \equiv 4a\,,\quad p \equiv 5a\,,\quad q \equiv 6a\,,$$
$$s \equiv 7a\,,\quad m \equiv 8a\,,\quad o \equiv 9a\,,\quad n \equiv 10a\,,\quad u \equiv 11a\,,\quad t \equiv 12a\,,$$

wo $13a \equiv 2 . \omega_1$ ist.

Die Punkte der Konfiguration S_1 bilden zwar auf der kubischen Kurve keinen Gruppoid mit zwölf Elementen, aber trotzdem können wir einen endlichen Gruppoid mit vierzehn Elementen bekommen, wenn wir zur Menge der Konfigurationspunkte noch zwei andere (nicht konfigurationelle) Punkte Y und Z zufügen. Es genügt, dass diese zwei Punkte die elliptischen Parameter $y \equiv 2a$, $z \equiv 12a$ haben.

Diesen Gruppoid schreiben wir, der besseren Übersicht wegen in die Tabelle 3

Tabelle 3

T. 3

	M	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
M	*N*	*M*	*O*	*Z*	*X*	*U*	*V*	*W*	*R*	*S*	*T*	*Q*	*Y*	*P*
N	*M*	*Z*	*U*	*V*	*Q*	*T*	*Y*	*R*	*O*	*P*	*X*	*W*	*S*	*N*
O	*O*	*U*	*M*	*T*	*Y*	*Z*	*X*	*P*	*N*	*W*	*V*	*S*	*Q*	*R*
P	*Z*	*V*	*T*	*Y*	*W*	*X*	*S*	*O*	*U*	*N*	*Q*	*R*	*P*	*M*
Q	*X*	*Q*	*Y*	*W*	*N*	*S*	*R*	*Z*	*V*	*U*	*P*	*M*	*O*	*T*
R	*U*	*T*	*Z*	*X*	*S*	*V*	*Q*	*N*	*M*	*R*	*Y*	*P*	*W*	*O*
S	*V*	*Y*	*X*	*S*	*R*	*Q*	*P*	*U*	*T*	*M*	*W*	*O*	*N*	*Z*
T	*W*	*R*	*P*	*O*	*Z*	*N*	*U*	*Y*	*S*	*X*	*M*	*V*	*T*	*Q*
U	*R*	*O*	*N*	*U*	*V*	*M*	*T*	*S*	*P*	*Q*	*Z*	*Y*	*X*	*W*
V	*S*	*P*	*W*	*N*	*U*	*R*	*M*	*X*	*Q*	*V*	*O*	*T*	*Z*	*Y*
W	*T*	*X*	*V*	*Q*	*P*	*Y*	*W*	*M*	*Z*	*O*	*S*	*N*	*R*	*U*
X	*Q*	*W*	*S*	*R*	*M*	*P*	*O*	*V*	*Y*	*T*	*N*	*Z*	*U*	*X*
Y	*Y*	*S*	*Q*	*P*	*O*	*W*	*N*	*T*	*X*	*Z*	*R*	*U*	*M*	*V*
Z	*P*	*N*	*R*	*M*	*T*	*O*	*Z*	*Q*	*W*	*Y*	*U*	*X*	*V*	*S*

Aus der Tabelle ersehen wir, dass ausser den sechzehn Konfigurationsgeraden sich in diesem Gruppoid auch neun Geraden, die mit den Punkten Y und Z inzidieren und eine fremde Gerade TVX befinden. Wir schreiben diese sechsundzwanzig Geraden noch einmal übersichtlich folgendermassen:

	Y	Z	M	N	P
(I)	$S\ O\ R\ U\ V$	$P\ O\ T\ U$	$Q\ R\ S\ T$	$O\ P\ R\ W$	$O\ R\ Q$
	$N\ Q\ W\ X\ Z$	$M\ R\ Q\ W$	$X\ U\ V\ W$	$U\ V\ T\ X$	$T\ X\ W$

T	O	Q
$V\ S$	$S\ V$	$R\ U$
$X\ U$	$X\ W$	$S\ V$.

Analogisch, wie bei den Gruppoiden T. 1 und T. 2 versuchen wir auch hier aus diesen sechsundzwanzig Geraden die Konfiguration $(12_4, 16_3)$ einer anderen Klasse als S_1 zu konstruiren.

Bald ersehen wir, dass es diesmal nicht möglich ist.

Diese Behauptung ist allerding nicht offensichtlich und deswegen werde ich weiter einen ausführlichen Beweis durchführen.

Vor allem ersehen wir leicht, dass wenigstens ein der Punkte Y, Z ein neuer Konfigurationspunkt sein muss. So kann man drei Möglichkeiten erwägen:

(a) Sei Y ein neuer Konfigurationspunkt und Z ein fremder Punkt.

Aus (II) ersehen wir, dass auch S, O, R, U, N, Q, W, X neue Konfigurationspunkte sind und den weiteren fremden Punkt müssen wir in der Menge (T, V, M, P) suchen. Leicht aber sehen wir, dass soein Punkt weder T, noch V ist. (Widrigenfalls gehen durch den Punkt M nur drei Geraden). So kommt nur die Möglichkeit M, oder P in Betracht.

(a_M) Nehmen wir an, dass M und Z zwei fremde Punkte sind und schliessen aus (I) alle fremde Geraden aus, die durch diese zwei Punkte gehen. Dann besteht gar kein Zweifel, dass siebzehn Geraden übrigbleiben und man muss noch eine von ihnen für eine fremde Gerade halten. Die Gerade muss notwendig mit den Punkten N und O inzidieren, weil widrigenfalls jeden der Punkte N, O fünf Konfigurationsgeraden schneiden. Es handelt sich um die Gerade NOU (siehe I), die also eine fremde Gerade ist. Dann stossen wir aber auf einen Widerspruch, weil der Punkt U nur mit drei Konfigurationsgeraden inzidiert.

(a_P) Es bleibt noch vorauszusetzen, dass Z und P fremde Punkte sind. Eliminieren wir die fremden Geraden, bleiben in (I) nur siebzehn Geraden übrig und eine von ihnen ist noch die fremde Gerade. Es muss (aus analogischen Gründen, wie oben) eben die Gerade SXO sein. Dann aber nur drei Konfigurationsgeraden den Punkt O schneiden.

(b) In dem zweiten Falle setzt man voraus, dass Z ein neuer Konfigurations- und Y ein Fremdpunkt ist. Analogisch, wie im Falle (a) stellen wir fest, dass der übrige fremde Punkt in der Menge (V, X, N, S) zu suchen ist. Wir benützen wieder die Bemerkung (I) und in analogischer Weise, wie bereits oben erwährt, können wir feststellen, dass auch diese Möglichkeit zu keiner neuen Konfiguration führt.

Wir müssen noch den übriggebliebenen und verwickelten Fall untersuchen.

(c) Y und Z sind neue Konfigurationspunkte.

Sind diese zwei Punkte miteinander getrennt, dann augenblicklich (der Notitz I halber) ersehen wir, dass nur V als fremder Punkt in Betracht kommt, was zu einem Widerspruch führt, weil die Konfiguration keine dreizehn Punkte enthalten kann.

Seien also Y und Z neue Konfigurationspunkte und zugleich $Y - Z$. Es ist also auch V ein Konfigurationspunkt. Daraus folgt, dass das Paar der fremden Punkten in der Menge $(M, N, O, P, Q, R, S, T, U, W, X)$ zu suchen ist. Man kann natürlich gleich irgendwelche Möglichkeiten ausschliessen. Wäre z. B. O ein fremder Punkt, dann (der Bemerkung I nach) entweder den Konfigurationspunkt Z, oder Y schneiden nur drei Geraden.

Eine analogische Erwägung gilt auch für die Punkte R und W.

Weil jeder der Konfigurationspunkten genau mit vier Geraden inzidieren muss, kommen nur folgende Paare der fremden Punkten (welche in drei Mengen getrennt werden) in Betracht:

$$\underset{\text{A}}{(MS, NP)}, \quad \underset{\text{B}}{(NT, QT, MX, MN)}, \quad \underset{\text{C}}{(PS, PX, ST, TX, UX)}$$

Der besseren Übersicht wegen, geben wir noch einmal alle Geraden, die durch die Punkte N, P, V gehen an. Also:

N	P	V
$S\ O\ P\ R\ W$	$Z\ V\ R\ O\ Q$	$Z\ S\ P\ X\ O\ Q$
$Y\ U\ V\ T\ X$	$M\ N\ X\ T\ W$	$Y\ M\ N\ T\ W\ U$.

Tritt eine der Möglichkeiten B, oder C auf, dann können offensichtlich den Punkt P, oder N nur drei Konfigurationsgeraden schneiden. Entsteht endlich die letzte Möglichkeit A, inzidiert der Punkt V mit fünf Konfigurationsgeraden.

In jedem Falle stossen wir also auf einen Widerspruch. So kann man behaupten, dass sechsundzwanzig Geraden der Tabelle 3 nur eine Konfiguration (namentlich S_1) bilden. Die Schemas der anderen Konfigurationen müssen zur gleichen Klasse wie S_1 gehören.

Wir werden uns im Weiteren mit der Konfiguration S_2 beschäftigen, und ihre gewisse interessanten Eigenschaften beschreiben. In erster Reihe müssen wir konstatieren, dass auch diese Konfiguration keinen Gruppoid mit zwölf Elementen auf der Kurve dritter Ordnung bildet. Es genügt aber zur Menge der Konfigurationspunkte noch einen Punkt Y mit dem Parameter $y \equiv 0$ (siehe s_2) hinzufügen um einen Gruppoid mit dreizehn Elementen zu bekommen.

Der fremde Punkt Y ist ein Inflexionspunkt auf der Kurve. Der besseren Übersicht halber wird auch dieser Gruppoid in der Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4

T. 4

	M	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*
M	*N*	*M*	*O*	*Y*	*T*	*W*	*U*	*Q*	*S*	*X*	*R*	*V*	*P*
N	*M*	*Q*	*S*	*U*	*N*	*X*	*O*	*V*	*P*	*T*	*Y*	*R*	*W*
O	*O*	*S*	*M*	*T*	*U*	*R*	*N*	*P*	*Q*	*Y*	*X*	*W*	*V*
P	*Y*	*U*	*T*	*W*	*R*	*Q*	*X*	*O*	*N*	*V*	*P*	*S*	*M*
Q	*T*	*N*	*U*	*R*	*X*	*P*	*Y*	*M*	*O*	*W*	*V*	*Q*	*S*
R	*W*	*X*	*R*	*Q*	*P*	*O*	*V*	*T*	*Y*	*S*	*M*	*N*	*U*
S	*U*	*O*	*N*	*X*	*Y*	*V*	*T*	*S*	*M*	*R*	*W*	*P*	*Q*
T	*Q*	*V*	*P*	*O*	*M*	*T*	*S*	*R*	*W*	*N*	*U*	*Y*	*X*
U	*S*	*P*	*Q*	*N*	*O*	*Y*	*M*	*W*	*V*	*U*	*T*	*X*	*R*
V	*X*	*T*	*Y*	*V*	*W*	*S*	*R*	*N*	*U*	*P*	*Q*	*M*	*O*
W	*R*	*Y*	*X*	*P*	*V*	*M*	*W*	*U*	*T*	*Q*	*S*	*O*	*N*
X	*V*	*R*	*W*	*S*	*Q*	*N*	*P*	*Y*	*X*	*M*	*O*	*U*	*T*
Y	*P*	*W*	*V*	*M*	*S*	*U*	*Q*	*X*	*R*	*O*	*N*	*T*	*Y*

.

Die Konfiguration S_2 enthält keine fremde Gerade. Wir schreiben aus der Tabelle alle sechzehn Konfigurationsgeraden und sechs Geraden, die den Punkt Y schneiden, aus:

$$\text{(II)}\qquad \frac{Y}{\begin{matrix} T\,R\,W\,V\,P\,Q \\ X\,U\,N\,O\,M\,S \end{matrix}} \qquad \frac{M}{\begin{matrix} V\,W\,Q\,S \\ X\,R\,T\,U \end{matrix}} \qquad \frac{N}{\begin{matrix} T\,X\,O\,P \\ V\,R\,S\,U \end{matrix}} \qquad \frac{O}{\begin{matrix} U\,P \\ Q\,T \end{matrix}}$$

$$\frac{P}{\begin{matrix} Q\,X \\ R\,S \end{matrix}} \qquad \frac{W}{\begin{matrix} T\,O \\ U\,X \end{matrix}} \qquad \frac{V}{\begin{matrix} Q\,R \\ W\,S \end{matrix}}.$$

Wir versuchen wieder aus dieser Menge von zwanzig Geraden eine neue Konfiguration $(12_4, 16_3)$ zu konstruieren. Solche Konfiguration muss selbstverständlich zu einer anderen Klasse als S_2 gehören.

Y ist ein neuer Konfigurationspunkt und inzidiert genau mit sechs Geraden (alle andere Punkte nur mit fünf Geraden). Daraus folgt, dass zwei Geraden (z. B. p und q), die sich im Punkte Y schneiden, fremde Geraden sind. Auf den übriggebliebenen vier Geraden (y_1, y_2, y_3, y_4) liegen nur schon Konfigurationspunkte. Der einzige Fremdpunkt (F) inzidiert also mit einer der Geraden p, q. Die übrigen Geraden

(f_1, f_2, f_3, f_4), die durch den fremden Punkt F gehen, halten wir selbstverständlich auch für fremde Geraden. So bekommt man die Menge von sechs fremden Geraden. Nehmen wir die – auf den Geraden (y_1, y_2, y_3, y_4) liegenden – Konfigurationspunkte in Betracht, so sehen wir, dass diese Punkte zugleich auf fremden Geraden (f_1, f_2, f_3, f_4) liegen müssen, weil widrigenfalls soein Konfigurationspunkt mit wenigstens fünf Geraden inzidiert.

Kurz gesagt: Die Menge (II) bildet eine neue Konfiguration nur im Falle, wenn acht Punkte existieren, die auf den Geraden $(y_1, y_2, y_3, y_4, f_1, f_2, f_3, f_4)$ liegen.

Leicht können wir uns überzeugen, dass soeine Menge von acht Punkten nicht existieren kann. Daraus ist ersichtlich, dass auch der Gruppoid der Tabelle 4 für die Konfiguration S_2 charakteristisch ist, d. h., dass man aus der Menge (II) allein die Konfiguration S_2 konstruieren kann.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Elemente der Gruppoide bloss aus den Punkten der elliptischen Kurve dritter Ordnung gebildet sind.

Es entsteht die natürliche Frage, ob einige dieser vier Gruppoide eventuell auf den anderen, irreduziblen, kubischen Kurven entstehen können. Es ist allerding notwendig die ursprüngliche Definition D. 4 des Gruppoides verallgemeinern.

Definition D.4'. Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge der Regularpunkte auf der irreduziblen Kurve dritter Ordnung und A, B zwei Elemente aus $\mathfrak{M}$. Die Gerade AB schneidet diese Kurve zum drittemal im Punkte C. Offensichtlich C gehört zur $\mathfrak{M}$ und wir schreiben

$$AB = C .$$

Wenn $B \equiv A$ ist, dann ist die Gerade AB eine Tangente des Punktes A $(AA = C)$; nur im Falle, dass A ein Inflexionspunkt der Kurve ist, bekommen wir die Beziehung $AA = A$.

Wir konzentrieren uns zuerst auf die irreduzible, kubische Kurve, die einen einzigen Singularpunkt mit zwei Tangenten enthält. Die Gleichung dieser Kurve kann man allemal an die folgende Form zurechtmachen:

$$x_1^3 + x_2^3 - x_0 x_1 x_2 = 0 ,$$

wo $(1 + k^3, k, k^2)$ die Koordinaten des Regularpunktes sind. Die drei (nicht unbedingt nötig verschiedene) Regularpunkte A, B, C mit den Parametern a, b, c liegen auf einer Geraden dann und nur dann, wenn

$$a \, . \, b \, . \, c + 1 = 0$$

ist.

Verhältigsmässig leicht überzeugen wir uns, dass nur die zwei Gruppoide T. 1 und T. 3 (von unserer vier) auf dieser kubischen Kurve vorkommen können. Für die

Parameter der Elemente aus T. 1, bekommen wir Beziehungen:

$$(t_1) \qquad p = -r = 1\,, \quad o = -m = a^1\,, \quad s = -q = a^2\,, \quad t = -v = a^3\,,$$
$$x = -n = a^4\,, \quad u = -w = a^5\,,$$

wo a eine Imaginärwurzel der Gleichung $b^6 = -1$ ist.

Und analogisch gilt für die Parameter der Elemente aus T. 3:

$$(t_3) \qquad r = -v = 1\,, \quad p = -t = a^1\,, \quad w = -z = a^2\,, \quad s = -u = a^3\,,$$
$$q = -m = a^4\,, \quad y = -o = a^5\,, \quad x = -n = a^6\,,$$

wo a eine Imaginärwurzel der Gleichung $b^7 = -1$ ist.

Enthält die irreduzible, kubische Kurve einen einzigen Singularpunkt mit einer Tangente, dann können wir ihre Gleichung allemal folgendermassen zurechtmachen:

$$x_1^2 x_0 = x_2^3\,,$$

wo $(k^3, 1, k)$ die Koordinaten des Regularpunktes sind. Die drei (nicht nötig verschiedene) Regularpunkte A, B, C mit den Parametern a, b, c liegen dann und nur dann auf einer der Geraden, wenn

$$a + b + c = 0$$

ist.

Leicht können wir uns überzeugen, dass keiner unserer vier Gruppoide T. 1, T. 2, T. 3, T. 4 auf soeiner Kurve dritter Ordnung liegt.

ZUSAMMENFASSUNG

Zwölf Punkte der Konfiguration S_3 aus der Arbeit [6] bilden einen Gruppoid der Klasse T. 1 auf der irreduziblen, kubischen Kurve, die entweder keinen, oder nur einen Singularpunkt mit zwei verschiedenen Tangenten enthält. Die Konfiguration A II von J. de Vries bildet den Gruppoid dergleichen Klasse, aber nur in einem solchen Falle, wenn man zu dieser Konfiguration wenigstens zwei fremde Geraden hinzufügt.

Analogische Behauptung gilt auch für die Konfiguration S_4, den Gruppoid T. 2 und die Konfiguration A I von J. de Vries, allerdings mit einer Ausnahme. Der Gruppoid T. 2 kommt nur auf der elliptischen Kurve dritter Ordnung vor.

Der Gruppoid T. 3 ist genau für eine Konfiguration (S_1) charakteristisch. Zwölf Punkte dieser Konfiguration insgesammt mit zwei gewissen fremden Punkten bilden seine Elemente. So ist nur die Konfiguration der Klasse S_1 im Stande einen Gruppoid der Klasse T. 3 erzeugen und zwar entweder auf der elliptischen Kurve, oder auf der

irreduziblen Kurve dritter Ordnung, die einen einzigen Singularpunkt mit zwei Tangenten enthält.

Den letzten Gruppoid der Klasse T. 4 bilden auf der elliptischen, kubischen Kurve die zwölf Punkte der Konfiguration S_2 mit einem gewissen fremden Punkte. Der Gruppoid T. 4 ist für die Konfiguration S_2 charakteristisch.

2. KAPITEL

Dem Programm nach, suchen wir in diesem Kapitel die Schemas von allen Konfigurationen C_{12} unter der Voraussetzung der Existenz mindenstens eines C^1-Punktes.

Sei *1* ein C^1-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Zwei von diesen letztgenannten Punkten müssen noch getrennt sein (siehe die Definition D. 1) und so können wir weiter voraussetzen, dass noch *3* : *4* ist. Also

$$1:2,3,4\,;\quad 3:4\,;\quad 2-3\,;\quad 2-4\,.$$

Der Punkt *1* ist vom Type C^1 und daraus folgt (siehe Definition 3), dass solche zwei (in einem Konfigurationspunkte sich schneidenden) Konfigurationsgeraden *s*, *t* existieren, auf denen keiner der Punkte *1*, *2*, *3*, *4* liegt. Man bezeichnet diese Geraden als $5-6-7$, $5-8-9$. Sechszehn Konfigurationsgeraden kann man also fogendermassen ausdrücken:

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccccc}
\underline{1} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
\underline{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot} & \underline{3\;4} & \underline{\cdot\;\cdot} & \underline{\cdot\;\cdot\;\cdot} & \underline{\cdot\;\cdot\;\cdot} & \underline{5-6-7} & \underline{5-8-9} \\
\{v\} & \{u\} & \{p\} & \{q\} & \{r\} & \{s\} & \{t\}
\end{array}$$

Bemerkung. Zur Menge $\{v\}$ gehören alle Punkte, die mit den, durch den Punkt *1* gehenden, Geraden inzidieren analogisch zur Menge $\{u\}$ gehören die Konfigurationspunkte, die auf den Geraden $2-3$ und $2-4$ liegen, usw.

Drei übriggebliebene, noch nicht bezeichnete, Konfigurationspunkte sind *O*, *P*, *Q*.

Schneiden sich vier Geraden im Punkte *O*, dann muss *O* zu den Mengen $\{v\}$, $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$ gehören. Eine analogische Erwägung gilt auch für die Punkte *P* und *Q*. Demzufolge

$$(1.2)\qquad O, P, Q \in \{v, p. q, r\}\,.$$

Zur Menge $\{p\}$ gehören alle drei Punkte *O*, *P*, *Q* und offensichtlich können wir voraussetzen, dass eben $2-O-P$ ist. Den fünften Punkt der Menge $\{p\}$ müssen wir also in der Menge $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ suchen. Im Falle, dass der Punkt *5* zur Menge $\{p\}$

gehört, dann ist $5 \in \{v, p, s, t\}$ und daraus folgt $5 : 3, 4$; $3 : 1, 4, 5$; $4 : 1, 3, 5$. Dann aber stossen wir auf einen Widerspruch, da 3 und 4 keine D-Punkte sein können (siehe Definition 1). Man kann also voraussetzen, dass zur Menge $\{p\}$ der Punkt 9 gehört und weil, (wie wir schon aus 1.2 wissen) auch $Q \in \{p\}$ ist, muss $2-9-Q$ eine weitere Gerade sein:

(1.3) $$2-O-P\,, \quad 2-9-Q\,.$$

Wir ersehen, dass $9 \in \{p, v, t\}$ und gleichzeitig $9 \notin \{u, s\}$ ist, so dass der Punkt 9 entweder zur Menge $\{q\}$, oder $\{r\}$ gehört. Die Permutation (34) ermöglicht $9 \in \{r\}$ erwägen. So bekommt man:

(1,4) $$9 \in \{r\}\,, \quad 3 : 1, 4, 9\,.$$

Wir konzentrieren uns noch einmal auf den Punkt 9. Es ist vor allem $9 : 3, U, V$; wo $U, V = 6, 7, O, P$ und gleichzeitig $U : V$. Den Paar U, V können also weder die Punkte $6, 7$, noch O, P bilden. Den zulässigen Permutationen (67) und (OP) nach, kann man $U = 6$ und $V = O$ wählen. Also:

(1,5) $$9 : 3, 6, O\,, \quad 6 : O\,.$$

Die analogische Erwägung führen wir auch für den Punkt 2 durch. Bis jetzt wissen wir, dass $2 : 1, M, N$; $M, N = 5, 6, 7, 8$ und $M : N$ ist. Daraus ist ersichtlich, dass $2-5$ und $N = 8$ sein muss. Wäre $M = 6$, dann $6 : 2, 8$ und ausserdem (siehe 1.5) ist auch $6 : O, 9$. Der Konfigurationspunkt kann aber nur von drei Punkıen getrennt sein und daraus folgt, dass $M = 7$ sein muss:

(1.6) $$2 : 1, 7, 8\,, \quad 7 : 8\,.$$

Da $5 \in \{v, s, t\}$ und zugleich $5-2$, $5-3$ ist (siehe 1.4, 1.6), entsteht $5-2-3$. Widrigenfalls schneiden den Punkt 5 mehr als vier Konfigurationsgeraden. Wir haben schon drei Geraden, die mit dem Punkte 2 inzidieren, festgestellt, ausserdem wissen wir noch, dass $2 : 1, 7, 8$ ist. Es muss also $2-4-6$ eine Konfigurationsgerade sein. Aus der Beziehung $5 \in \{v, s, t, u\}$ folgt noch $5 : 4$.

(1.7) $$2-3-5\,, \quad 2-4-6\,, \quad 4 : 1, 3, 5\,.$$

Setzen wir auf einen Augenblick voraus, dass noch $5 : O$ isı, dann kommt $5 :$ $: 4, O, W$ vor, wo $W = P, Q$; $O : W, 5$ ist. Nach der Bemerkung (1.5) sehen wir, dass auch $O : 6, 9$, also $O : W, 5, 6, 9$ ist, was allerdings zu einem Widerspruch führt.

Es muss also $5-O$ sein und diese Gerade kann schon nur mit dem Konfigurationspunkte 1 inzidieren. So bekommt man, ausser der Geraden $1-5-O$ noch die Beziehungen $5 : 4, P, Q$ und $P : Q$.

Der besseren Übersicht halber fassen wir alle diese Teilergebnisse zusammen:

(2.1) $1:2,3,4 \quad 2:1,7,8 \quad 3:1,4,9 \quad 4:1,3,5; \quad 5:4,P,Q;$

$9:3,6,O; \quad 7:8; \quad O:6; \quad P:Q;$

1	2	3	4	5	
5 7 8 .	3 4 O Q	7 8 .	7 8 .	6 8	$6\ 9\ P\ Q \in \{v\}$
O . . .	5 6 P 9	. . .	. . .	7 9	$6\ O\ P\ Q \in \{q\}$
{v}		{q}	{r}		$9\ O\ P\ Q \in \{r\}$.

P. 1 Unter der Voraussetzung, dass $Q-O-4$ ist, bekommt man (mit Rücksicht auf das Teilschema 2.1 und Bedingungen), der Reihe nach, die Geraden $4-8-P$, $4-7-9$, $1-9-P$, $1-8-6$. So entstehen folgende zwei Schemas:

$K_{1,2}$	1	2	3	4	5
	5 7 8 9	3 4 O Q	7 8 6	7 8 Q	6 8
	O Q 6 P	5 6 P 9	X Y Z	9 P O	7 9

$$K_1(X = O,\ Y = Q,\ Z = P)$$

$$K_2(X = P,\ Y = O,\ Z = Q).$$

Im weiteren setzen wir offensichtlich voraus, dass schon $4-O-Q$ nicht entsteht. Die Punkte der Menge $\{r\}$ kann man also folgendermassen ausdrücken:

4
7 8 9
. . P

und auf der Geraden $9-7$ muss also der Punkt 1 liegen:

(2.2) $1-7-9; \quad 4-9-P.$

P. 2. Setzen wir voraus, dass die Punkte Q und O verbunden sind, dann muss $Q-O-3$ sein und augenblicklich können wir die Lokalisierung der Punkte aus der Menge $\{q\}$ feststellen. So bekommt man die Geraden $3-7-P$, $3-8-6$ und zwei Möglichkeiten kommen in Betracht:

a) Entweder ist der Punkt 8 mit dem Punkte O verbunden (so kann man die Lokaliserung der Elemente auf $\{r\}$ feststellen) und bekommt man die Geraden $4-7-Q$, $4-8-O$) und entstehen folgende zwei Schemas:

	1	2	3	4	5
$K_{3,4}$	$5\ 7\ P\ Q$	$3\ 4\ O\ Q$	$7\ 8\ Q$	$7\ 8\ P$	$6\ 8$
	$O\ 9\ U\ V$	$5\ 6\ P\ 9$	$P\ 6\ O$	$Q\ O\ 9$	$7\ 9$

$$K_3\ (U = 6,\ V = 8)$$
$$K_4\ (U = 8,\ V = 6)$$

b) oder $8 : O$ ist und man bekommt nur das Schema:

1	2	3	4	5
$5\ 7\ P\ Q$	$3\ 4\ O\ P$	$7\ 8\ Q$	$7\ 8\ 9$	$6\ 8$
$O\ 9\ 8\ 6$	$5\ 6\ P\ 9$	$P\ 6\ O$	$O\ Q\ P$	$7\ 9.$

Es ist nicht nötig dieses Schema zu registrieren, weil es mit dem Schema K_3 äquivalent, der Permutation (14), (25), $(O6)$, $(7P)$, $(8Q)$ nach, ist.

Damit sind alle Schemas unter der Voraussetzung P. 2 durchgenommen und weiterhin muss schon

P. 3 $$Q : O$$

sein.

Es ist also $Q : 5,\ O,\ P$ und man erwägt schon leicht, auf welche Weise alle zwölf Konfigurationspunkte miteinander getrennt sind:

$1 : 2, 3, 4$	$2 : 1, 7, 8$	$3 : 1, 4, 9$	$4 : 1, 3, 5$
$5 : 4, P, Q$	$6 : 8, 9, O$	$7 : 2, 8, P$	$8 : 2, 6, 7$
$9 : 3, 6, O$	$O : 6, 9, Q$	$P : 5, 7, Q$	$Q : 5, O, P.$

Es kommen zwei Möglichkeiten in Betracht. Auf der Geraden $Q-6$ kann entweder der Punkt 3, oder 1 liegen.

Die erstgenannte Möglichkeit fürht gleich zum Schema:

1	2	3	4	5
$5\ 7\ P\ Q$	$3\ 4\ O\ Q$	$7\ 8\ Q$	$7\ 8\ P$	$6\ 8$
$O\ 9\ 6\ 8$	$5\ 6\ P\ 9$	$O\ P\ 6$	$Q\ O\ 9$	$7\ 9,$

welches aber ausdrücklich nicht registriert wird, weil es sich, der Permutation $(1Q263570)$, $(4P89)$ halber, auf das Schema K_1 transformiert.

Es bleibt also nur der Fall $Q-6-1$ übrig, der zwar zwei Schemas

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
\cline{2-6}
K_5 & 5\ 7\ P\ Q & 3\ 4\ O\ Q & O\ P\ Q & O\ Q\ 9 & 6\ 8 & & M, N = 7, 8 \\
 & O\ 9\ 8\ 6 & 5\ 6\ P\ 9 & M\ 6\ N & N\ M\ P & 7\ 9 & &
\end{array}
$$

ermöglicht, aber daraus registrieren wir nur den Fall $M = 7$, $N = 8$ (Schema K_5), weil der zweite ($M = 8$, $N = 7$) zu einem Schema führt, das mit K_1 äquivalent ist. Siehe die Permutation $(17Q9)$, $(2P6485O3)$.

Da wir noch nicht erforscht haben, ob die Schemas K_1 bis K_5 zu verschiedenen Klassen gehören und ob sie realisierbar sind, können wir bis jetzt nur behaupten, dass unter der Voraussetzung der Existenz mindenstens eines C^1-Punktes höhstens fünf Konfigurationen vom Type C_{12} existieren können.

3. KAPITEL

In diesem Kapitel setzen wir voraus, dass alle Konfigurationspunkte vom Type C^2 sind.

Sei der Punkt *1* von den Punkten *2*, *3*, *4* getrennt. Genau zwei der letztgenannten Punkten müssen noch getrennt sein und man kann $3 : 4$ voraussetzen. Der Punkt *1* ist vom Typ C^2 und so existieren zwei Geraden (mit sechs verschiedenen Konfigurationspunkten), auf denen kein der Punkte *1*, *2*, *3*, *4* liegt. Wir bezeichnen diese zwei Geraden als $5-6-7$, $8-9-O$ und die übriggebliebene zwei Konfigurationspunkte als P, Q.

Sechzehn Geraden drücken wir folgendermassen aus:

$$
(1.1) \qquad
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 2 & 3 & 4 & & \\
\hline
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 3\ 4 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 5-6-7 & 8-9-O\,. \\
\hline
\{v\} & \{u\} & \{p\} & \{q\} & \{r\} & \{s\} & \{t\}
\end{array}
$$

Der Punkt P muss zu den Mengen $\{v, p. q, r\}$ gehören, weil widrigenfalls sich im P keine vier Konfigurationsgeraden schneiden. Eine analogische Erwägung gilt auch für den Punkt Q. Also:

$$
(1.2) \qquad P, Q \in \{v, p, q, r\}\,.
$$

Daraus sehen wir, dass $2 : 1, F, G$; $F : G$; $F, G = 5, 6, 7, 8, 9, O$ ist. Ein der Punkte F, G gehört also zur Menge $\{s\}$ und der andere zur $\{t\}$. Ohne Beschränkung der Gemeingültigkeit kann man $F = 5$ und $G = 8$ wählen.

$$
(1.3) \qquad 2 : 1, 5, 8\,, \quad 5 : 8\,.
$$

Es muss noch $5 \in \{v, q, r, s\}$ sein, damit sich im Punkte 5 vier Geraden schneiden und analogisch ist $8 \in \{v, q, r, t\}$. So ist der Punkt 3 (ausser den Punkten $1, 4$) noch von einem Punkte der Menge $\{6, 7, 9, O\}$ getrennt. Offensichtlich kann man $3 : 6$ wählen und so bekommt man:

$$3 : 1, 4, 6\,, \quad 4-6\,, \tag{1.4}$$

weil schon $1 : 4$ ist und der Punkt 3 kein D-Punkt sein kann. Es ist also $4 : 1, 3, Z$; $4-X$, $4-Y$, wo X, Y, Z zur Menge $\{7, 9, O\}$ gehören. Beide Punkte X, Y sind schon mit allen vier Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden und es muss $X, Y \in \{u\}$ sein.

Alle Teilergebnisse fassen wir jetzt übersichtlich zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{\;\;1\;\;} & \underline{\;\;2\;\;} & \underline{\;\;2\;\;} & \underline{\;\;3\;\;} & \underline{\;\;4\;\;} & & \\
5\ 8\ .\ . & 3\ 4 & .\ . & 5\ 8\ . & 5\ 8\ . & & \\
.\ .\ .\ . & X\ Y & .\ . & .\ .\ . & .\ .\ . & 5-6-7 & 8-9-O \\
\hline
\{v\} & \{u\} & \{p\} & \{q\} & \{r\} & \{s\} & \{t\}
\end{array} \tag{2.1}$$

$$X, Y, Z = 7, 9, O\,; \quad P, Q, 6, X, Y, Z \in \{v\}\,; \quad P, Q, 6, Z \in \{p\}\,;$$
$$P, Q, Y, Z \in \{q\}\,; \quad P, Q, 6, X \in \{r\}\,; \quad 1 : 2, 3, 4\,; \quad 2 : 1, 5, 8\,;$$
$$3 : 1, 4, 6\,; \quad 5 : 2, 8\,.$$

P. 1 Zuerst setzen wir voraus, dass $Z = 7$ ist.

Daraus folgt die Beziehung $4 : 1, 3, 7$. Zur Menge $\{p\}$ gehören die Punkte P, Q, 6, 7. Nehmen wir die Gerade $5-6-7$ in Betracht, sehen wir, dass auf der Geraden $2-6$ entweder der Punkt P, oder Q liegen kann. Die zulässige Permutation (PQ) ermöglicht vorauszusetzen, dass $2-6-P$ ist und daraus folgt $2-Q-7$:

$$4 : 1, 3, 7\,, \quad 2-6-P\,, \quad 2-7-Q\,. \tag{2.2}$$

Bisher ist $6 : 3, K, L$; $K : L$; $K, L = 8, 9, O, Q$. Mit Rücksicht auf die Gerade $8-9-O$, muss $K = Q$ sein, d. h. $6 : 3, Q, L$, wo $L : Q, 6$ und $L = 8, 9, O$ ist.

Wäre $L = 8$, dann $8 : Q, 6$ und gleichzeitig (siehe 2.1) entsteht auch $8 : 2, 5$. Das ist allerdings ein Widerspruch, weil jeder Konfigurationspunkt nur von drei anderen Punkten getrennt sein muss. Man kann also weiterhin nur $L = 9, O$ betrachten und, der Permutation $(9O)$ nach, $L = 9$ wählen.

$$6 : 3, Q, 9\,; \quad Q : 9\,. \tag{2.3}$$

Gleicher-massen bekommt man für den Punkt 7 die Relationen $7 : 4, M, N$, wo $M, N = 8, 9, O, P$ und $M : N$ ist. Daraus folgt sofort $M = P$; $N = 8, 9, O$; $N : P, 7$.

Die Möglichkeit $N = 9$ fürht zu einem widerspruch, nachdem gleichzeitig $9 : P, 7$ und $9 : 6, Q$ nicht entstehen kann. Analogisch aus $N = 8$ wäre $8 : P, 7$ und $8 : 2, 5$. Es bleibt also nur die Möglichkeit $N = O$ übrig:

$$(2.4) \qquad 7 : 4, P, O \; ; \quad P : O .$$

Wir konzentrieren uns jetzt auf den Punkt 5. Vor allem ist $5 : 2, 8, T$; $T = 9, O, P, Q$ und $8 - T$, weil schon $8 : 2$ (siehe 2.1) und 5 kein D-Punkt ist. Die Permutation $(9O)$, (67), (PQ), (34) ermöglicht nur $T = 9, Q$ weiterhin voraussetzen.

Sei zuerst $T = Q$, d. h. $5 : 2, 8, Q$; $Q : 6, 8, 9$. Der Punkt O ist in diesem Falle mit den Punkten 5, Q verbunden und kann also nur von zwei Punkten 7, P getrennt sein. (Mit allen anderen Punkten ist er schon verbunden und das ist allerdings ein Widerspruch).

Es muss also nur $T = 9$ sein und daraus folgen die Beziehungen $5 : 2, 8, 9$; $O :$ $: 7, P, Q$; $P : 7, 8, O$.

Der besseren Übersicht halber fassen wir diese Teilergebnisse (unter der Voraussetzung P. 1) zusammen:

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{lllll} 1 : 2, 3, 4 \; ; & 2 : 1, 5, 8 \; ; & 3 : 1, 4, 6 \; ; & 4 : 1, 3, 7 \; ; & 5 : 2, 8, 9 \; ; \\ 6 : 3, 9, Q \; ; & 7 : 4, O, P \; ; & 8 : 2, 5, P \; ; & 9 : 5, 6, Q \; ; & O : 7, P, Q \; ; \\ P : 7, 8, O \; ; & Q : 6, 9, O \; ; & 2 - 6 - P \; ; & 2 - Q - 7 \; ; & X, Y = O, 9 \, . \end{array}$$

Wäre $X = 9$, also $Y = O$, dann sehen wir (aus 2.1), dass auf der Geraden $3 - O$ nur der Punkt 5 und auf der Geraden $3 - P$ nur der Punkt Q liegen kann. Also ist $3 - P - Q$. Mit der Geraden $4 - 9$ inzidiert nur der Punkt P und so entsteht die Konfigurationsgerade $4 - 9 - P$. Diese letztgenannten zwei Geraden schneiden sich im Punkte P und daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 2 vom Typus C^1 ist, was wir natürlich ausschliessen.

Es muss deswegen $X = O$ und $Y = 9$ sein, d. h.

$$\text{(b)} \qquad 2 - 3 - O \, , \quad 2 - 4 - 9 \, .$$

Liegt der Punkt 3 auf der Geraden $7 - 8$, dann (siehe $2 - 3 - O$ und Bemerkung (a)) der Punkt 9 ist vom Type C^1. Auf der Geraden $7 - 8$ kann also nur der Punkt 1 liegen und man kann einfach schon das ganze Schema bekommen:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{\quad 1 \quad} & \underline{\quad 2 \quad} & \underline{\quad 3 \quad} & \underline{\quad 4 \quad} & & \\ 5\;8\;9\;6 & 3\;4\;6\;Q & 5\;8\;9 & 5\;8\;P & & \\ Q\;7\;P\;O & O\;9\;P\;7 & P\;Q\;7 & O\;6\;Q & 5 - 6 - 7 & 8 - 9 - O \, . \end{array}$$

Leicht aber ersehen wir, dass in diesem Falle der Punkt O vom Type C^1 wäre.

Die Voraussetzung P. 1 fürht also zu einem Widerspruch und wir müssen auf die Bemerkung (2.1) zurückkommen. Weiterhing ist nur $Z = 9, O$ und die zulässige Permutation $(9O)$ ermöglicht uns $Z = 9$ vorauszusetzen. So bekommt man:

$$4 : 1, 3, 9 . \tag{2.6}$$

Zur Menge $\{p\}$ gehören die Punkte $P, Q, 6, 9$. Leicht erwägen wir, dass nur $2-6-9$ und daraus $2-P-Q$ in Betracht kommt, weil widrigenfalls (den Geraden $5-6-7$, $2-6-U$, $U = P, Q$ halber) der Punkt 4 vom Type C^1 wäre. Also:

$$2-6-9 , \quad 2-P-Q . \tag{2.7}$$

Wir konzentrieren unsere Aufmerksamheit auf den Punkt 6. Bis jetzt $6 : 3, R, S$, wo $R, S = 8, O, P, Q$ und auch $R : S$ ist. Daraus ist ersichtlich, dass weder die Möglichkeit $R, S = P, Q$, noch $R, S = 8, O$ vorkommt. Der Punkt 6 ist deswegen von einem der Punkten P, Q getrennt und mit den anderen ist er schon verbunden. Die Permutation (PQ) lässt die Wahl $6-P$ zu und ferner $6 : 3, Q, S$, wo $S = 8, O$ und $S : Q, 6$ ist.

Im Falle $S = 8$, wäre $8 : Q, 6, 2, 5$ (der Bemerkung 2.1 nach) was allerdings unzulässig ist. Es muss also $S = O$ sein und die Bemerkung (2.1) kann man folgendermassen ergänzen:

$$\text{(3.1)}\quad \frac{\overline{\;1\;}}{\begin{matrix}6\ O\ Q\ .\\ .\ .\ .\ .\end{matrix}}\atop\{v\} \quad \frac{\overline{\;2\;}}{\begin{matrix}3\ 4\\ X\ Y\end{matrix}}\atop\{u\} \quad \frac{\overline{\;2\;}}{\begin{matrix}6\ P\\ 9\ Q\end{matrix}}\atop\{p\} \quad \frac{\overline{\;3\;}}{\begin{matrix}5\ 8\ .\\ .\ .\ .\end{matrix}}\atop\{q\} \quad \frac{\overline{\;4\;}}{\begin{matrix}5\ 8\ .\\ .\ .\ .\end{matrix}}\atop\{r\} \quad \frac{5-6-7}{\{s\}} \quad \frac{8-9-O}{\{t\}} ,$$

$$X, Y = 7, O ; \quad 5, 7, 8, 9, P \in \{v\} ; \quad P, Q, Y, 9 \in \{q\} ; \quad P, Q, X, 6 \in \{r\} ;$$

$$1 : 2, 3, 4 ; \quad 2 : 1, 5, 8 ; \quad 3 : 1, 4, 6 ; \quad 4 : 1, 3, 9 ; \quad 6 : 3, O, Q ; \quad 5 : 8 ; \quad O : Q .$$

P. 2 Weiter setzen wir voraus, dass $P : 5$ ist.

Aus $5 : 2, 8, P$ folgt auch $8-P$. Leicht können wir uns überzeugen, dass im Falle $P : O$ die Relation $O : 6, P, Q$ und gleichzeitig $P : O, 5, W$; $W = 7,9$ entsteht. Dann ist aber der Punkt P vom Type B. Es muss also $P-O$ sein und demzufolge muss $P : 5, 7, 9$; $7 : 9$; d. h. $9 : 4, 7, P$; $O : 6, 7, Q$ sein. Man bekommt so die Beziehungen:

$$\text{(c)}\quad 1 : 2, 3, 4 ; \quad 2 : 1, 5, 8 ; \quad 3 : 1, 4, 6 ; \quad 4 : 1, 3, 9 ; \quad 5 : 2, 8, P ;$$

$$6 : 3, O, Q ; \quad 7 : 9, O, P ; \quad 8 : 2, 5, Q ; \quad 9 : 4, 7, P ; \quad O : 6, 7, Q ;$$

$$P : 5, 7, 9 ; \quad Q : 6, 8, O .$$

Erwägt man alle beide Möglichkeiten (siehe 3.1) $X = 7$, $Y = O$, oder $X = O$, $Y = 7$, bekommt man leicht zwei Schemas:

1	2	3	4		
6 O Q 5	3 4 6 P	5 8 Q	5 8 P		
8 P 7 9	7 O 9 Q	O P 9	Q 7 6	5−6−7	8−9−O,

1	2	3	4		
6 O Q 7	3 4 6 P	5 8 7	5 8 P		
P 5 9 8	O 7 9 Q	9 P Q	Q 6 O	5−6−7	8−9−O.

In beiden dieser Fällen ist aber der Punkt *5* vom Typ C^1.

Die Voraussetzung P. 2 führt zu einem Widerspruch und man muss weiterhin $P-5$ betrachten.

Wäre $P-7$, dann $P : 8, 9\ O$ und der Punkt P ist vom Typ E. Es muss also $P : 7$, d. h. $P : 7, U, V$; $U, V = 8, 9, O$ sein. Im Falle $P-9$ ist $P : 7, 8, O$ und aus (3.1) ersehen wir, dass auch $8 : 2, 5, P$; $O : 6, Q, P$ und der Punkt P vom Typ B wäre. Demzufolge $P : 7, 9, V$; $V = 8, O$, also ensteht $7 : 9$.

$$9 : 4, 7, P\ ; \quad 7 : P\ ; \quad P-5\ . \tag{3.2}$$

P. 3 Sei $P-8$.

Dann ersehen wir leicht vor allem auf welche Weise die Konfigurationspunkte miteinander getrennt sind:

$1 : 2, 3, 4\ ;\quad 2 : 1, 5, 8\ ;\quad 3 : 1, 4, 6\ ;\quad 4 : 1, 3, 9\ ;\quad 5 : 2, 8, Q\ ;\quad 6 : 3, O, Q\ ;$

$7 : 8, 9, P\ ;\quad 8 : 2, 5, 7\ ;\quad 9 : 4, 7, P\ ;\quad O : 6, P, Q\ ;\quad P : 7, 9, O\ ;\quad Q : 5, 6, O\ .$

Auf der Geraden $6-P$ kann entweder der Punkt *1*, oder *4* liegen.

(d) Setzen wir zuerst voraus, dass $6-P-4$ ist, dann bekommt man gleich die Geraden $4-8-Q$, $4-5-O$, d. h. es ist $X = O$ und das ganze Schema ist:

1	2	3	4		
6 O Q 5	3 4 6 P	5 8 Q	5 8 P		
8 7 9 P	O 7 9 Q	9 P 7	O Q 6	5−6−7	8−9−O.

In diesem Falle gehört aber der Punkt P zum Typ C^1.

Die Voraussetzung (d) stosst auf einen Widerspruch und es muss also $6-P-1$ sein. Daraus folgen augenblicklich die Geraden $4-8-6$ und $4-Q-7$ und es muss $X = 7$, $Y = O$ sein.

Auf der Geraden $3-O$ muss der Punkt 5 liegen und analogisch stellen wir fest, dass nur der Punkt O auf der Geraden $3-9$ liegen kann. Dann aber ersehen wir aus den Geraden $4-7-Q$, $3-9-Q$, dass der Punkt 2 zum Type C^1 gehört.

Die ganze Voraussetzung P. 3 führt also zu einem Widerspruch und der Beziehung $P:8$ nach, muss ja selbst

$$(3.3)\qquad P:7,8,9 \quad \text{und folglich} \quad 8:2,5,P \quad \text{sein}.$$

(e) Sei $X = O$, $Y = 7$.

Auf der Geraden $3-P$ kann nur der Punkt 5 liegen und so entstehen die Geraden $3-9-Q$, $3-8-7$. Ausserdem inzidiert mit der Geraden $1-9$ bloss der Punkt 5.

Wäre $Q-7$, dann kann man aus den Geraden $3-9-Q$, $1-Q-7$ ersehen, dass 8 ein C^1-Punkt ist. Es muss also $Q:7$, d. h. $Q:6,7,O$ sein. In diesem Falle gehört aber andererseits der Punkt Q zum Typ C^1 (hinsichtlich den Beziehungen $1-9-5$, $3-P-5$).

Die Voraussetzung (e) stosst also auf einen Widerspruch und wenn irgendeine Konfiguration C_{12}^2 entstehen kann, muss man weiterhin nur

$$(3.4)\qquad X=7\,. \quad Y=O$$

voraussetzen.

Leicht bekommen wir weitere Konfigurationsgeraden, nämlich $2-3-7$, $2-4-O$, $3-8-Q$, $3-P-O$, $3-5-9$ und $1-9-Q$. Die Bemerkung (3.1) kann man also folgendermassen ergänzen:

$$(4.1)\quad \begin{array}{c}1\\\hline Q\ P\ O\ 8\\ 9\ .\ .\ .\\\hline \{v\}\end{array}\quad \begin{array}{c}2\\\hline 3\ 4\ 6\ P\\ 7\ O\ 9\ Q\\\hline \{p+u\}\end{array}\quad \begin{array}{c}3\\\hline 5\ 8\ P\\ 9\ Q\ O\\\hline \{q\}\end{array}\quad \begin{array}{c}4\\\hline 5\ 8\ .\\ .\ .\ .\\\hline \{r\}\end{array}\quad \begin{array}{c}\\ \\ 5-6-7\\\hline \{s\}\end{array}\quad \begin{array}{c}\\ \\ 8-9-O,\\\hline \{t\}\end{array}$$

$$5,6,7\in\{v\}\,;\quad 5,6,7,Q\in\{r\}\,;\quad 1:2,3,4\,;\quad 2:1,5,8\,;\quad 3:1,4,6\,;\quad 4:1,3,9\,;$$

$$5:2,8\,;\quad 6:3,O,Q\,;\quad 7:9,P\,;\quad 8:2,5,P\,;\quad 9:4,7,P\,;\quad P:7,8,9\,;\quad O:6,Q\,.$$

Im Falle $5-Q$, also $5-Q-4$ entsteht auch die Gerade $4-P-6$ und der Punkt 2 wäre vom Typ C^1. Es muss also $5:2,8,Q$, d. h. auch $Q:5,6,O$; $7:9,O,P$; $O:6,7,Q$ sein. Aus diesen Beziehungen können wir schon leicht das ganze Schema konstruieren:

$$\begin{array}{c}1\\\hline Q\ P\ 8\ O\\ 9\ 6\ 5\ 7\end{array}\quad \begin{array}{c}2\\\hline 3\ 4\ 6\ P\\ 7\ O\ 9\ Q\end{array}\quad \begin{array}{c}3\\\hline 5\ 8\ P\\ 9\ Q\ O\end{array}\quad \begin{array}{c}4\\\hline 5\ 8\ Q\\ P\ 6\ 7\end{array}\quad \begin{array}{c}\\ \\ 5-6-7\end{array}\quad \begin{array}{c}\\ \\ 8-9-O\end{array}$$

und leicht überzeugen wir uns, dass der Punkt Q (der von den Punkten $5, 6, O$ getrennt ist) vom Typus C^1 wäre.

Man kann also dieses Kapitel mit der Feststellung schliessen, dass *keine Konfiguration* C^2_{12} *existiert.*

4. KAPITEL

Erwägt man die Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel, so sehen wir, dass höhstens fünf Konfigurationen mit zwölf C-Punkten entstehen können. Die Schemas dieser Konfigurationen sind in dem zweiten Kapitel gegeben.

Wir beweisen zuerst, dass das Schema K_5 nicht realisierbar ist. Es handelt sich um das Schema:

$$K_5 \qquad \frac{1}{\begin{matrix}5\ 7\ P\ Q\\ 0\ 9\ 8\ 6\end{matrix}} \qquad \frac{2}{\begin{matrix}3\ 4\ O\ Q\\ 5\ 6\ P\ 9\end{matrix}} \qquad \frac{3}{\begin{matrix}O\ P\ Q\\ 7\ 6\ 8\end{matrix}} \qquad \frac{4}{\begin{matrix}O\ Q\ 9\\ 8\ 7\ P\end{matrix}} \qquad \frac{5}{\begin{matrix}6\ 8\\ 7\ 9\end{matrix}} .$$

Da keine drei Punkte der Menge $2, 6, P, 5$ auf der Geraden (fremd, oder konfigurationell) liegen können, wählen wir die Koordinaten auf folgende Art:

$$2 \equiv (1, 0, 0)\,, \quad 6 \equiv (0, 1, 0)\,, \quad P \equiv (0, 0, 1)\,, \quad 5 \equiv (1, 1, 1)\,.$$

Zuerst befestigen wir auf der Geraden $5-6$ mit den Koordinaten $(1, 0, -1)$ den Punkt $7 \equiv (1, 1 - x, 1)$. In dem Punkt 3 schneiden sich die Geraden $2-3-5 \equiv$ $\equiv (0, 1, -1)$, $3-P-6 \equiv (1, 0, 0)$, also $3 \equiv (0, 1, 1)$. Analogisch aus den Geraden $3-O-7 \equiv (x, 1, -1)$, $2-O-P \equiv (0, 1, 0)$ bekommt man die Koordinaten des Punktes $O \equiv (1, 0, x)$.

Auf der Geraden $5-O \equiv (x, 1 - x, -1)$ befestigen wir den Punkt $1 \equiv (1 + z -$ $- x, z - x, z)$, weil $5-O-1$ ist und analogisch auf der Geraden $1-6 \equiv (z, 0, x -$ $- z - 1)$ den Punkt $Q \equiv (1 + z - x, z - y, z)$.

Im Punkte $8 \equiv (1 + z - x, z - x, z + y - x)$ schneiden sich die Geraden $1-P \equiv (z - x, x - z - 1, 0)$ und $3-Q \equiv (y, z + 1 - x, x - z - 1)$. Die Koordinaten des Punktes $9 \equiv (z + 1 - y, z - y, z)$ stellen wir aus den Geraden $5-8 \equiv$ $\equiv (-y, y - 1, 1)$ und $2-Q \equiv (0, z, y - z)$ fest.

Es bleibt noch übrig die Koordinaten des Punktes 4 festzustellen. Zuerst ist es leicht zu erwägen, dass die Punkte $1, 7, 9$ dann und nur dann auf einer Konfigurationsgeraden liegen, wenn $(y - x) . (1 - xz) = 0$ ist. Im Falle $y = x$ gehen die Punkte 8 und 9 ineinander, was begreiflich unzulässig ist. Es muss also

$$xz = 1$$

sein.

Unter dieser Bedingung ist $Q-7 \equiv (1 - y, x - 1, x^2 + y - 2x)$, $2-6 \equiv (0, 0, 1)$ und weil diese Geraden sich im Punkte *4* schneiden, dann $4 \equiv (x - 1, y - 1, 0)$ ist.

Damit haben wir die Koordinaten von allen Punkten festgestellt. Auf der Geraden $4-O \equiv (xy - x, x - x^2, 1 - y)$ muss der Punkt *8* liegen. Die Koordinaten des Punktes *8* können wir (der Beziehung $xz = 1$ nach) folgendermassen zurechtmachen:

$8 \equiv (1 + x - x^2, 1 - x^2, 1 + xy - x^2)$. Leicht überzeugen wir uns, dass die Bedingung der Inzidenz $4-O-8$

$$(x^2 - x - 1 + y) \,.\, (x^2 + x - 1 - xy) = 0$$

ist.

Im Falle $x^2 + x - 1 - xy = 0$ (und allerding zugleich $xz = 1$) liegen nicht die Punkte $4 \equiv (x, x + 1, 0)$, $9 \equiv (2 - x^2, 2 - x - x^2, 1)$, $P \equiv (0, 0, 1)$ auf einer Geraden, wie wir uns leicht überzeugen können. Das ist aber ein Widerspruch, weil $4-9-O$ eine Konfigurationsgerade ist. Daraus ist ersichtlich, dass nur $x^2 - x - 1 + y = 0$ sein muss.

Dann aber $(x, 1, -1)$ sind die Koordinaten der Geraden $4-O$ und so geht die Gerade $4-O-8$ mit der Geraden $3-O-7$ ineinander. Das ist jedoch nicht möglich.

So haben wir bewiesen, dass das Schema K_5 tatsächlich nicht realisierbar ist.

Es bleiben also nur vier Schemas übrig:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
CI	*5 7 8 9*	*3 4 O Q*	*7 8 6*	*7 8 Q*	*6 8*	
	O Q 6 P	*5 6 P 9*	*O Q P*	*9 P O*	*7 9*	vom Typ $C_6^1C_6^2$,

1 : *2, 3, 4*; *2* : *1, 7, 8*; *3* : *1, 4, 9*; *4* : *1, 3, 5*; *5* : *4, P, Q*; *6* : *9, O, Q*;
7 : *2, 8, P*; *8* : *2, 7, O*; *9* : *3, 6, O*; *O* : *6, 8, 9*; *P* : *5, 7, Q*; *Q* : *5, 6, P*,

wo die Punkte *1, 4, 7, 8, P, Q* vom Typ C^1 sind.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
CII	*5 7 8 9*	*3 4 O Q*	*7 8 6*	*7 8 Q*	*6 8*	
	O Q 6 P	*5 6 P 9*	*P O Q*	*9 P O*	*7 9*	, vom Typ $C_6^1C_6^2$,

1 : *2, 3, 4*; *2* : *1, 7, 8*; *3* : *1, 4, 9*; *4* : *1, 3, 5*; *5* : *4, P, Q*; *6* : *9, O, P*;
7 : *2, 8, O*, *8* : *2, 7, Q*; *9* : *3, 6, O*; *O* : *6, 7, 9*; *P* : *5, 6, Q*; *Q* : *5, 8, P*,

wo die Punkte *1, 2, 4, 5, 8, Q* vom Typ C^1 sind.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
C III	*5 7 P Q*	*3 4 O Q*	*7 8 Q*	*7 8 9*	*6 8*	
	O 9 6 8	*5 6 P 9*	*P 6 O*	*Q O P*	*7 9*,	vom Typ $C_6^1C_6^2$,

1 : *2*, *3*, *4*; *2* : *1*, *7*, *8*; *3* : *1*, *4*, *9*; *4* : *1*, *3*, *5*; *5* : *4*, *P*, *Q*; *6* : *9*, *O*, *Q*;
7 : *2*, *8*, *O*; *8* : *2*, *7*, *P*; *9* : *3*, *6*, *O*; *O* : *6*, *7*, *9*; *P* : *5*, *8*, *Q*; *Q* : *5*, *6*, *P*,

wo die Punkte *1*, *4*, *6*, *7*, *8*, *9* vom Typ C^1 sind.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
C IV	*5 7 P Q*	*3 4 O Q*	*7 8 Q*	*7 8 9*	*6 8*	
	O 9 8 6	*5 6 P Q*	*P 6 O*	*Q O P*	*7 9*	vom Typ $C_2^1C_{10}^2$,

1 : *2*, *3*, *4*; *2* : *1*, *7*, *8*; *3* : *1*, *4*, *9*; *4* : *1*, *3*, *5*; *5* : *4*, *P*, *Q*; *6* : *9*, *O* *P*;
7 : *2*, *8*, *O*; *8* : *2*, *7*, *Q*; *9* : *3*, *6*, *O*; *O* : *6*, *7*, *9*; *P* : *5*, *6*, *Q*; *Q* : *5*, *8*, *P*,

wo nur die Punkte *1*, *4* vom Typ C^1 sind.

Wir beweisen zuerst, dass diese Schemas nicht miteinander äquivalent sind. Das Schema C IV enthält nur zwei C^1-Punkte, alle andere Schemas sechs von diesen Punkten. Offensichtlich gehört das Schema C IV zu einer anderen Klasse als die übriggebliebenen.

Es ist nötig die eventuelle Äquivalenz zwischen den Schemas C I bis C III zu suchen. Weil diese Schemas von dem gleichen Typ sind, muss man noch die kontrastierende Klassifikation der C^1-Punkte definieren.

Jeder C^1-Punkt ist (allerdings bei diesen Schemas) von drei anderen C-Punkten getrennt. Sei X ein C^1-Punkt und $X : Y, Z, T$. Wir sagen, dass der Punkt X vom Typ C^{1i} ist, wenn von den Punkten Y, Z, T gerade i vom Typ C^2 sind.

Wir können uns leicht überzeugen, dass in dem Schema C I bloss zwei C^{11}-Punkte vorkommen. Das Schema C II enthält sechs C^{11}-Punkte und das Schema C III keinen C^{11}-Punkt.

Damit ist bewiesen, dass die Schemas C I bis C IV zu verschiedenen Klassen gehören und deswegen nicht äquivalent sind.

Man muss noch zeigen, dass diese Schemas wirklich realisierbar sind. Dazu genügt es nur die Koordinaten der Konfigurationspunkte folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{array}{ll} & 1 \equiv (1, 0, 0),\ 2 \equiv (-2x, x, 2),\ 3 \equiv (x-5, 2, x-1),\ 4 \equiv (4, -2, 1-x), \\ c_1 & 5 \equiv (0, 1, 0),\ 6 \equiv (0, 0, 1),\ 7 \equiv (0, 1, 1),\ 8 \equiv (1, 0, 1), \\ & 9 \equiv (4, x+1, 4),\ O \equiv (x+5, -2, 0),\ P \equiv (-2x, x+1, 4),\ Q \equiv (-1, 1, 1), \end{array}$$

wo $x^2 = 5$ ist.

$$c_2 \quad \begin{array}{l} 1 \equiv (3, -1, 4 - x),\ 2 \equiv (1, 0, 0),\ 3 \equiv (0, 1, 1),\ 4 \equiv (1, 0, 1), \\ 5 \equiv (3, 2, 2),\ 6 \equiv (0, 0, 1),\ 7 \equiv (3, 2, 4 - x),\ 8 \equiv (6, -2, x + 2), \\ 9 \equiv (x - 1, 2, 0),\ O \equiv (6, 2 - x, 6),\ P \equiv (3, -x, 2 - 2x),\ Q \equiv (0, 1, 0) \end{array}$$

wo $x^2 + 2 = 0$ ist.

$$c_3 \quad \begin{array}{l} 1 \equiv (4tx, 3x, 1),\ 2 \equiv (0, 0, 1),\ 3 \equiv (0, 1, 0),\ 4 \equiv (1, 0, 1), \\ 5 \equiv (0, a, 1),\ 6 \equiv (1, 0, 0),\ 7 \equiv (2x, a, 1),\ 8 \equiv (1, 1, 0), \\ 9 \equiv (2, 3t, 3x + 1 - a),\ O \equiv (2, 3, -1),\ P \equiv (2x, 3x, 1),\ Q \equiv (2, 3t, -1), \end{array}$$

wo $a = 2 - 3x - 6x^2$, $t = 6 - 9x - 12x^2$, $3x^3 - 3x + 1 = 0$ ist.

$$c_4 \quad \begin{array}{l} 1 \equiv (4 - 7x, 1, 4 - 9x),\ 2 \equiv (0, 1, 0),\ 3 \equiv (3x - 1, 1, 3x - 2),\ 4 \equiv (1, 0, 0), \\ 5 \equiv (4 - 7x, 1, 2 - 8x),\ 6 \equiv (1, 1, 0),\ 7 \equiv (11x - 2, 3, 12x - 6),\ 8 \equiv (1, 0, 1), \\ 9 \equiv (2 - x, 1, -2x),\ O \equiv (0, 0, 1),\ P \equiv (0, 1, -2x),\ Q \equiv (3x - 1, 1, 4x - 2), \end{array}$$

wo $x^2 + 4x - 2 = 0$ ist.

Der Leser kann sich schon selbst überzeugen, dass keine zwei Konfigurationspunkte und keine zwei Geraden ineinandergehen und alle verlangenen Bedingungen der Inzidenz erfüllt sind.

Man kann also dieses Kapitel mit einer Feststellung schliessen:

Es existieren genau vier Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ *vom Typ* C_{12}.

Literatur

[1] *J. de Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen. Acta matematica *12*, 1889, 67.

[2] *B. Bydžovský:* Über eine ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$. Věstník Královské české společnosti nauk, 1939, č. II.

[3] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích $(12_4, 16_3)$ v rovině. Věstník Královské české společnosti nauk, 1944, XXI, str. 1–8.

[4] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, str. 133 a násl.

[5] *V. Metelka:* Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$ s D-body. Časopis pro pěstování matematiky *82*, 1957, str. 385 a násl.

[6] *V. Metelka:* Über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. Časopis pro pěstování matematiky, *91*, 1966, str. 261 a násl.

Anschrift des Verfassers: Hálkova 6, Liberec (Vysoká škola strojní a textilní).