Zbyněk Nádeník

# Ungleichungen für zweidimensionale Flächen im vierdimensionalen Raum

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 94 (1969), No. 2, 213--216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117668

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

# UNGLEICHUNGEN FÜR ZWEIDIMENSIONALE FLÄCHEN IM VIERDIMENSIONALEN RAUM

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eigegangen am 28. Dezember 1967)

Wir werden im vierdimensionalen euklidischen Raum, in dem ein System der orthogonalen Koordinaten $x_1, x_2, x_3, x_4$ zugrunde gelegt wird, eine zweidimensionale geschlossene durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ dargestellte Fläche $F \in C^{(2)}$ betrachten, für welche

$$(1) \qquad \mathbf{n}(u, v) = \{\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u \sin v\}, \quad u \in \langle 0, 2\pi),\quad v \in \langle 0, 2\pi)$$

ein Rodriguesscher Normalenvektor in $\mathbf{x}(u, v)$ ist (s. [1], Absatz $B$) der Einleitung). Man bestätigt leicht, dass dann auch der zu (1) orthogonale Einheitsvektor

$$(2) \qquad \mathbf{N}(u, v) = \partial^2 \mathbf{n}(u, v)/\partial u\, \partial v$$

ein Rodriguesscher Normalenvektor von $F$ in $\mathbf{x}(u, v)$ ist. Wir bezeichnen mit $\omega$ das zusammenfallende sphärische Bild aller Vektoren (1) und (2) und mit $\Delta_1$ bzw. $\Delta_2$ den ersten bzw. zweiten Beltramischen Differentialoperator in bezug auf $\omega$.

Die „Stützfunktionen" von $F$

$$(3) \qquad h(u, v) = \mathbf{x}(u, v) \,.\, \mathbf{n}(u, v), \quad H(u, v) = \mathbf{x}(u, v) \,.\, \mathbf{N}(u, v)$$

hängen von der Wahl des Nullpunktes ab; offensichtlich sind beide bis auf eine Linearkombination von Koordinaten des Vektors (1) eindeutig bestimmt. Sie haben die Form

$$(4) \qquad h(u, v) = \varphi(u + v) + \psi(u - v),$$

$$(5) \qquad H(u, v) = -\varphi(u + v) + \psi(u - v) + k \quad (k = \text{konst.}),$$

wo $\varphi$ und $\psi$ zweimal stetig differenzierbare periodische Funktionen einer Veränderlichen mit der Periode $2\pi$ sind (s. Abschn. 1). Die Voraussetzung, dass $\varphi$ und $\psi$ die Stützfunktionen der ebenen konvexen Kurven $K_\varphi$ und $K_\psi$ sind, wobei der Krümmungshalbmesser von $K_\varphi$ (bzw. $K_\psi$) durchweg grösser als $\frac{1}{2}k$ (bzw. $-\frac{1}{2}k$) ist, garantiert die Regularität von $F$ (s. Abschn. 1).

Es seien $1/r_1$ und $1/r_2$ (bzw. $1/R_1$ und $1/R_2$) die Hauptkrümmungen von $F$ in bezug auf $\boldsymbol{n}$ (bzw. $\boldsymbol{N}$) (s. [1], Absatz B) der Einleitung). Es gilt die Weingartensche Formel (s. Abschn. 2)

$$r_1 + r_2 = 2h + \Delta_2(h)\,. \tag{6}$$

Die von der Wahl des Nullpunktes unabhängigen Integrale (s. Abschn. 3)

$$m = \frac{1}{2}\int_F (r_1^{-1} + r_2^{-1})\,\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\int_\omega (r + r_2)\,\mathrm{d}\omega = \int_\omega h\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{7}$$

$$o = \frac{1}{2}\int_F h(r_1^{-1} + r_2^{-1})\,\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\int_\omega h(r_1 + r_2)\,\mathrm{d}\omega = \int_\omega [h^2 - \tfrac{1}{2}\Delta_1(h)]\,\mathrm{d}\omega \tag{8}$$

mahnen freilich an die wohlbekannten Formeln von Minkowski für das Integral der mittleren Krümmung und die Oberfläche eines konvexen Körpers.

*Für die Integrale* (7) *und* (8) *gilt die Ungleichung*

$$m^2 \geqq 4\pi^2 o\,; \tag{9}$$

*das Gleichheitszeichen charakterisiert eine Fläche F, deren Parameterdarstellung durch geeignete Wahl des Nullpunktes auf die Form*

$$\boldsymbol{x} = \text{konst.}\, \boldsymbol{n} + \text{konst.}\, \boldsymbol{N} \tag{10}$$

*gebracht werden kann* (s. Abschn. 3).

Selbstverständlich, die Formeln (6)–(8) und die Ungleichung (9) behalten ihre Gültigkeit, wenn wir statt der kleinen Buchstaben $r, h, o, m$ die grossen schreiben. Die Ungleichung (9) lässt auch eine Frobeniussche Verallgemeinerung zu (s. Abschn. 3).

*Für die Oberfläche $\mathcal{F}$ unserer Fläche F gelten die Formeln* (s. Abschn. 4)

$$\mathcal{F} = \int_\omega (h^2 - H^2)\,\mathrm{d}\omega = o - O = (m^2 - M^2) : 4\pi^2\,. \tag{11}$$

Es folgen die Beweise.

**1.** Jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ von $F$ können wir das aus untereinander orthogonalen Einheitsvektoren $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}, \mathbf{t}_1 = \boldsymbol{n}_u = -\boldsymbol{N}_v$, $\mathbf{t}_2 = \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{N}_u$ bestehende Vierbein zuordnen. Für seine Infinitesimalbewegung gilt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \tau_1 \mathbf{t}_1 + \tau_2 \mathbf{t}_2\,, \tag{1,1}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{t}_1 = -\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}u + \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}v\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \mathbf{t}_1\,\mathrm{d}u + \mathbf{t}_2\,\mathrm{d}v\,, \tag{1,2}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{t}_2 = -\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}v + \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}u\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{N} = -\mathbf{t}_1\,\mathrm{d}v - \mathbf{t}_2\,\mathrm{d}u\,,$$

$\tau_1, \tau_2$ sind Pfaffsche Formen in $u, v$.

Nach (3) ist

$$(1,3) \qquad \boldsymbol{x} = t_1\mathbf{t}_1 + t_2\mathbf{t}_2 + h\boldsymbol{n} + H\boldsymbol{N},$$

wo die Skalarfunktionen $t_1, t_2$ noch zu bestimmen sind. Vergleicht man (1,1) mit dem nach (1,2) berechneten Differential von (1,3), so erhält man

$$(1,4) \qquad \tau_1 = \mathrm{d}t_1 + h\,\mathrm{d}u - H\,\mathrm{d}v\,, \quad \tau_2 = \mathrm{d}t_2 + h\,\mathrm{d}v - H\,\mathrm{d}u\,,$$

$$(1,5) \qquad \mathrm{d}h - t_1\,\mathrm{d}u - t_2\,\mathrm{d}v = 0\,, \quad \mathrm{d}H + t_1\,\mathrm{d}v + t_2\,\mathrm{d}u = 0\,.$$

Also

$$(1,6) \qquad t_1 = h_u = -H_v\,, \quad t_2 = h_v = -H_u$$

und daraus ergibt sich für $h$ oder $H$ die Gleichung der schwingenden Saite und infolgedessen (4) und (5).

Nach (1,4) und (1,6) ist

$$(1,7) \qquad \begin{aligned} \tau_1 &= \phantom{-}(h + h_{uu})\,\mathrm{d}_u - (H + H_{vv})\,\mathrm{d}v\,, \\ \tau_2 &= -(H + H_{uu})\,\mathrm{d}u + (h + h_{vv})\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

Die in der Einleitung ausgesprochenen Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ bedeuten, dass $\varphi + \varphi^{\cdot\cdot} > \frac{1}{2}k$, $\psi + \psi^{\cdot\cdot} > -\frac{1}{2}k$. Zufolge (4) und (5) kann man diese Ungleichungen auf die Form

$$(1,8) \qquad 0 < h + h_{uu} - (H + H_{uu})\,, \quad 0 < h + h_{uu} + (H + H_{uu})$$

bringen, aus welcher unter Zuhilfenahme von (1,6) die Unabhängigkeit der Formen (1,7) sofort folgt.

**2.** Man bestätigt leicht die Gültigkeit der Greenschen Formel

$$(2,1) \qquad \int_\omega h\,.\,\Delta_2(h)\,\mathrm{d}\omega = -\int_\omega \Delta_1(h)\,.$$

Weiter ist nach (1,1) und (1,2)

$$(2,2) \qquad \mathrm{d}F = \tau_1 \wedge \tau_2\,, \quad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\,,$$

$$(2,3) \qquad r_1^{-1} + r_2^{-1} = (\mathrm{d}u \wedge \tau_2 - \mathrm{d}v \wedge \tau_1) : \tau_1 \wedge \tau_2\,, \quad r_1^{-1}r_2^{-1} = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v : \tau_1 \wedge \tau_2$$

(vgl. dazu [1], Anfänge der Abschn. 1 und 2; den Vektor (1) identifizieren wir mit dem Vektor $-\boldsymbol{n}$ aus [1]). Aus (2,3), (1,4) und (1,6) ergibt sich sofort (6). Die Darstellungen (7) und (8) folgen aus (2,1)–(2,3) und (6).

Wir möchten noch die Unabhängigkeit des Integrals (8) von der Wahl des Nullpunktes verifizieren. Ist $\boldsymbol{c}$ ein fester Vektor und nimmt man $h + \boldsymbol{c}\,.\,\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c})\,.\,\boldsymbol{n}$ statt $h = \boldsymbol{x}\,.\,\boldsymbol{n}$, so ist nach (1), (6) und (2,1) offensichtlich $\int_\omega (h + \boldsymbol{c}\,.\,\boldsymbol{n})(r_1 + r_2)\,.$ $.\,\mathrm{d}\omega = \int_\omega h(r_1 + r_2)\,\mathrm{d}\omega + \int_\omega h(2\boldsymbol{c}\,.\,\boldsymbol{n} + \Delta_2(\boldsymbol{c}\,.\,\boldsymbol{n}))\,\mathrm{d}\omega = \int_\omega h(r_1 + r_2)\,\mathrm{d}\omega$.

**3.** Gemäss (4) gilt die Fourierentwicklung

$$(3,1)\qquad h(u, v) = \tfrac{1}{4}a_0 + \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mu \cos nv + b_{mn} \sin mu \cos nv +$$

$$+ c_{mn} \cos mu \sin nv + d_{mn} \sin mu \sin nv)\,,$$

woraus auch die Fourierschen Doppelreihen für $h_u$ und $h_v$ leicht bestimmbar sind. Dementpsrechend erhält man nach der Formel von Parseval, dass

$$(3,2)\qquad \int_\omega h^2 \,\mathrm{d}\omega = \tfrac{1}{4}\pi^2 a_0^2 + \pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)\,,$$

$$\int_\omega \Delta_1(h) \,\mathrm{d}\omega = \pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (m^2 + n^2)(a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)\,.$$

Nach (7), (8), (3,1) und (3,2) ist $m^2 - 4\pi^2 o = 2\pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (m^2 + n^2 - 2)(a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)$. Folglich gilt (9) und das Gleichheitszeichen tritt in (9) dann und nur dann ein, wenn $a_{mn} = b_{mn} = c_{mn} = d_{mn} = 0$ für $m + n > 2$ ist. Weil aber durch eine passende Wahl des Nullpunktes die Stützfunktion $h$ von jeder Linearkombination von Koordinaten (1) befreit werden kann, ist die Extremalfläche von (9) durch $h(u, v) =$ konst. charakterisiert. Da $h =$ konst. nach (1,6) zu $H =$ konst. äquivalent ist, so folgt sofort aus (1,3) und (1,6) die Parameterdarstellung (10) der Extremalfläche.

Angenommen, ohne Rücksicht auf die geometrische Bedeutung von $h$, es gelte $\int_\omega h \,\mathrm{d}\omega = 0$. Das obige Verfahren liefert dann die Wirtingersche Ungleichung $\int_\omega \Delta_1(h) \,\mathrm{d}\omega \geqq 2 \int_\omega h^2 \,\mathrm{d}\omega$ einschliesslich ihrer Extremalfunktion. Benutzend den wohlbekannten Kunstgriff von W. Blaschke, kann man auf Grund dieser Ungleichung die Frobeniussche Verallgemeinerung von (9) herleiten.

**4.** Setzt man aus (1,7) in $\mathcal{F} = \int_F \tau_1 \wedge \tau_2$ ein und benutzt man (1,8), (1,6) und einfache partielle Integrationen, so erhält man leicht nach (8) die zwei ersten Darstellungen (11) für $\mathcal{F}$ Gemäss (4) und (5) haben – mit Ausnahme des absoluten Gliedes und ohne Rücksicht auf die Anordnung – die Funktionen $h$ und $H$ dieselben Fourierkoeffizienten. Die Berechnung von $\int_\omega (h^2 - H^2) \,\mathrm{d}\omega$, $\int_\omega h \,\mathrm{d}\omega$ und $\int_\omega H \,\mathrm{d}\omega$ mittels dieser Koeffizienten liefert dann nach (7) auch die Gültigkeit der letzten Darstellung von $\mathcal{F}$ in (11).

*Literatur*

[1] *Z. Nádeník:* Analogon zum Satz von Hilbert über Flächen konstanter positiver Krümmung. Čas. pěst. mat. *94* (1969), 206–212.

*Anschrift des Verfassers:* Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).