David Preiss; Jaromír Uher
Poznámka k první větě o střední hodnotě integrálního počtu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 199--201

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117665`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

POZNÁMKA K PRVNÍ VĚTĚ O STŘEDNÍ HODNOTĚ INTEGRÁLNÍHO POČTU

DAVID PREISS, JAROMÍR UHER, Praha

(Došlo dne 15. prosince 1967)

V celé poznámce rozumíme mírou μ Lebesgueovu míru v E_1, integrálem pak (absolutně) konvergentní Lebesgueův integrál. Buď $\langle a, b\rangle \subset E_1$ interval. Symbolem $\mathscr{L}(a, b)$ rozumíme množinu všech funkcí definovaných na $\langle a, b\rangle$ a majících konvergentní Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Funkcí rozumíme reálnou funkci definovanou na $\langle a, b\rangle$, omezeným intervalem rozumíme nezvrhlý omezený interval nebo jednobodovou množinu.

V práci [1] je dokázáno jisté obrácení druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu. Je dokázána totiž tato věta:

Věta. *Buď $g \in \mathscr{L}(a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Jestliže ke každé omezené měřitelné funkci f existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pak funkce g je monotonní na $\langle a, b\rangle - N$, kde $N \subset \langle a, b\rangle$ je množina míry nula.

Podobný výsledek získáme pro první větu o střední hodnotě integrálního počtu. Platí totiž tato věta:

Věta 1. *Nechť f je měřitelná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje množina $M \subset \langle a, b\rangle$ míry nula tak, že funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle - M$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(A) *Existuje množina $N \subset \langle a, b\rangle$ míry nula tak, že množina $f(\langle a, b\rangle - N)$ je omezený interval.*

(B) *Ke každé funkci $g \in \mathscr{L}(a, b)$ nezáporné skoro všude v $\langle a, b\rangle$ existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že je*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Buďte splněny předpoklady věty. Nechť $K = \sup_{x \in \langle a,b \rangle - M} |f(x)|$

1. Nechť platí tvrzení (A). Pak platnost tvrzení (B) dokážeme obvyklým způsobem (viz např. [2] str, 123–124).

2. Nechť platí tvrzení (B). Pro $z \in E_1$ položme

$$P_z = \mathscr{E}(x \in \langle a, b\rangle; f(x) < z), \quad P^z = \mathscr{E}(x \in \langle a, b\rangle; f(x) > z)$$

a označme písmenem R množinu

$$\mathscr{E}(z \in E_1; \mu(P_z) > 0) \cap \mathscr{E}(z \in E_1; \mu(P^z) > 0).$$

Zřejmě je $R \subset \langle -K, K\rangle$.

Nechť je $R = \emptyset$. Potom jistě existuje $z \in E_1$ tak, že $f(x) = z$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, a věta zřejmě platí.

Nechť nadále je $R \neq \emptyset$. Je-li $z, z_1, z_2 \in E_1$, $z_1 < z_2$, je $P_{z_1} \subset P_{z_2}$, $P^{z_1} \supset P^{z_2}$, $P_z = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{z-1/n}$, $P^z = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{z+1/n}$, a tedy $\mu(P_{z_1}) \leqq \mu(P_{z_2})$, $\mu(P^{z_1}) \geqq \mu(P^{z_2})$. Odtud ihned plyne: a) je-li $z \in R$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subset R$, b) je-li $z_1, z_2 \in R$, $z_1 < z < z_2$, je $z \in R$. Je tedy R otevřený interval, tj. $R = (\alpha, \beta)$ pro vlastní $\alpha, \beta \in E_1$. Buď $N = \mathscr{E}(x \in \langle a, b\rangle; f(x) \notin \langle \alpha, \beta\rangle)$. Je $N = P_\alpha \cup P^\beta$, a tedy $\mu(N) = 0$. K důkazu věty stačí nyní ukázat, že množina $f(\langle a, b\rangle - N)$ je omezený interval. Zřejmě $f(\langle a, b\rangle - N) \subset \langle \alpha, \beta\rangle$. Nechť je $z \in R$, tedy $\mu(P_z) > 0$, $\mu(P^z) > 0$. Pro libovolná $c \in \langle 0, 1\rangle$ definujme funkci $g_c(x)$ na $\langle a, b\rangle$ takto:

$$g_c(x) = \begin{cases} c & x \in P_z \\ 1 - c & x \in P^z \\ 0 & x \in \langle a, b\rangle - P_z \cup P^z. \end{cases}$$

Funkce g_c je zřejmě nezáporná a měřitelná pro každé $c \in \langle 0, 1\rangle$. Dále je

$$(1) \quad \int_a^b (f(x) - z)\, g_c(x)\, \mathrm{d}x = c \,. \int_{P_z} (f(x) - z)\, \mathrm{d}x + (1 - c) \int_{P^z} (f(x) - z)\, \mathrm{d}x.$$

Výraz (1) je spojitou funkcí proměnné c v $\langle 0, 1\rangle$, která nabývá v bodě 0 kladné hodnoty $\int_{P^z} (f(x) - z)\, \mathrm{d}x$ a v bodě 1 záporné hodnoty $\int_{P_z} (f(x) - z)\, \mathrm{d}x$. Existuje tedy $c_0 \in (0, 1)$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)\, g_{c_0}(x)\, \mathrm{d}x = z \int_a^b g_{c_0}(x)\, \mathrm{d}x,$$

tj. podle předpokladu existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\xi) = z$. Zřejmě $\xi \notin N$, a tedy $z \in f(\langle a, b\rangle - N)$, z čehož plyne $R = (\alpha, \beta) \subset f(\langle a, b\rangle - N) \subset \langle \alpha, \beta\rangle$.

Tím je věta úplně dokázána.

Poznámka. Dokázanou větu lze snadno zobecnit na abstraktní Lebesgueův integrál.

Literatura

[1] *Vl. Doležal:* O druhé větě o střední hodnotě integrálního počtu; Časopis pro pěstování matematiky, *85* (1960), str. 84—86.
[2] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

Adresa autorů: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university).

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DEN ERSTEN MITTELWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG

DAVID PREISS, JAROMÍR UHER, Praha

In der Arbeit ist dieser Satz beweisen (unter dem Begriff Integral verstehen wir ein konvergentes Lebesguesches Integral, das Mass μ ist das Lebesguesche Mass):

Satz. *Es sei f eine messbare Funktion auf dem Intervall $\langle a, b\rangle$ und es gebe eine Menge $M \subset \langle a, b\rangle$ vom Mass Null so, dass die Funktion f auf $\langle a, b\rangle - M$ beschränkt ist. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *Es existiert eine Menge $N \subset \langle a, b\rangle$ vom Mass Null so, dass die Menge $f(\langle a, b\rangle - N)$ ein beschränktes Intervall ist.*
(B) *Zu jeder Funktion $g \in \mathscr{L}(a, b)$, die fast überall auf $\langle a, b\rangle$ nicht negativ ist, existiert $\xi \in \langle a, b\rangle$ so, dass $\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$ ist.*