Časopis pro pěstování matematiky

David Preiss

Charakterizace funkcí majících až na spočetnou množinu derivaci zprava rovnou nule

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 194--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117664`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

CHARAKTERIZACE FUNKCÍ MAJÍCÍCH AŽ NA SPOČETNOU MNOŽINU DERIVACI ZPRAVA ROVNU NULE

DAVID PREISS, Praha

(Došlo dne 15. prosince 1967)

Je dobře známo, že každá funkce, která má derivaci rovnu nule je konstantní. Dokonce platí (viz [1], kap. 1, § 2, věta 2.):

Věta 1. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu I. Nechť v $I - S$, kde S je spočetná množina, je $f'_+ = 0$. Potom je f konstantní v intervalu I.*

Vzniká otázka, nakolik je předpoklad spojitosti ve větě 1 podstatný. Ukazuje se, že se dá v jistém smyslu vynechat. V této práci je provedena ve větách 2,3 úplná charakterizace funkcí majících až na spočetnou množinu derivaci zprava rovnu nule.

Nejdříve zavedeme některá označení:

Je-li D systém intervalů reálných čísel, označme:

K_D^- (resp. K_D^+, resp. H_D) množinu těch reálných čísel x, pro která existuje $I \in D$ a reálné číslo y tak, že $I = (x, y\rangle$ nebo $I = (x, y)$ (resp. $I = \langle y, x)$ nebo $I = (y, x)$, resp. $I = \langle y, x\rangle$ nebo $I = (y, x\rangle$).

Všechny další pojmy a označení jsou převzaty z [2] (speciálně termín „spočetný" je používán ve smyslu „nejvýš spočetný").

Věta 2. *Nechť $f(x)$ je definována v $\langle a, b)$. Nechť v $\langle a, b) - S$ kde S je spočetná množina, je $f'_+(x) = 0$. Potom existuje neprázdný spočetný systém disjunktních intervalů D a množina N řídká v $\langle a, b)$ tak, že platí:*

1. $\langle a, b) = \bigcup_{I \in D} I \cup N; \bigcup_{I \in D} I \cap N = \emptyset$.
2. *Každá neprázdná podmnožina K_D^- obsahuje izolovaný bod.*
3. *$f(x)$ je konstantní na každém intervalu z D.*
4. *Jsou-li I, J intervaly, $I \in D$, $I \subsetneqq J$, pak $f(x)$ není konstantní na J.*
5. *Je-li $x \in N$, pak na žádném intervalu obsahujícím x není f konstantní.*

Je-li $S = \emptyset$, přejde podmínka 2 v podmínku:

2'. *$K_D^- = \emptyset$ a každý bod H_D je hromadným bodem množiny K_D^+.*

Věta 3. *Nechť v $\langle a, b)$ je dána řídká množina N a spočetný systém disjunktních intervalů D tak, že platí 1,2. Potom existuje funkce $f(x)$ definovaná v $\langle a, b)$, která má v $\langle a, b) - S$ kde S je spočetná množina, $f'_+(x) = 0$ tak, že platí 3, 4, 5. Je-li místo podmínky 2 splněna podmínka 2', existuje dokonce taková funkce $f(x)$, že množina S je prázdná.*

Důkaz těchto vět se opírá o následující

Lemma. *Nechť funkce $f(x)$ je definována v $\langle a, b)$. Nechť existuje množina $\emptyset \neq M \subset \langle a, b)$ taková, že platí:*

a) *Každý bod M je jejím hromadným bodem zleva.*

b) *Funkce $f(x)$ není spojitá v žádném bodě množiny M.*

Potom existuje nespočetná množina $L \subset \langle a, b)$ taková, že funkce $f(x)$ nemá vlastní derivaci zprava pro žádné $x \in L$.

Důkaz. Je-li $x \in M$, označme $\xi(x)$ takové kladné číslo, že v každém okolí bodu x je obsažen bod y tak, že $|f(y) - f(x)| \geqq \xi(x)$. Položme:

(i) $F_1 = \langle x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1\rangle$, $F_2 = \langle x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2\rangle$ kde $x_1 < x_2$ jsou prvky M; $0 < \varepsilon_i < \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\xi(x_i))$, $i = 1, 2$; $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(ii) Jsou-li $F_{n_1,\ldots,n_k} = \langle x_{n_1,\ldots,n_k} - \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k}, x_{n_1,\ldots,n_k} + \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$ definovány pro všechny posloupnosti $(n_1, \ldots, n_k)$ čísel 1 a 2, je-li $F_{n_1,\ldots,n_k} \cap F_{m_1,\ldots,m_k} = \emptyset$ pro všechny $(n_1, \ldots, n_k) \neq (m_1, \ldots, m_k)$; $x_{n_1,\ldots,n_k} \in M$ pro všechny $(n_1, \ldots, n_k)$ položme: $F_{n_1,\ldots,n_k,i} = \langle x_{n_1,\ldots,n_k,i} - \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k,i}, x_{n_1,\ldots,n_k,i} + \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k,i}\rangle$ pro $i = 1, 2$ kde $x_{n_1,\ldots,n_k,1} < x_{n_1,\ldots,n_k,2}$ jsou prvky množiny $M \cap (x_{n_1,\ldots,n_k} - \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k}, x_{n_1,\ldots,n_k})$; $0 < \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k,i} < \min(1/2^{k+1}, (1/2^{k+1})\,\xi(x_{n_1,\ldots,n_k,i}))$ pro $i = 1, 2$; $F_{n_1,\ldots,n_k i} \subset (x_{n_1,\ldots,n_k} - \varepsilon_{n_1,\ldots,n_k}, x_{n_1,\ldots,n_k})$ pro $i = 1, 2$; $F_{n_1,\ldots,n_k,1} \cap F_{n_1,\ldots,n_k,2} = \emptyset$.

Buď P množina všech posloupností $\{n_1, n_2, \ldots\}$, kde n_i je rovno buď 1 nebo 2 pro $i = 1, 2, \ldots$ Položme $L = \bigcup_{\{n_1,n_2,\ldots\}\in P} \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_1,\ldots,n_k}$. Množina L je nespočetná (viz [3], str. 345).

Nechť $x \in L$, pak existuje $\{n_1, n_2, \ldots\} \in P$ tak, že $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_1,\ldots,n_k}$ zřejmě pro všechna přirozená j je $x < x_{n_1,\ldots,n_j}$. Zvolme k přirozené, pak existuje $k_0 \geqq k + 2$ tak, že $x_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \in (x, x + 1/k)$, tedy existuje $y \in (x, x + 1/k) \cap (x_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - \varepsilon_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, x_{n_1,\ldots,n_{k_0}} + \varepsilon_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$ tak, že $|f(y) - f(x_{n_1,\ldots,n_{k_0}})| \geqq \xi(x_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$. Potom:

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| + \left|\frac{f(x_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) - f(x)}{x_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - x}\right| \geqq 2^{k+1}$$

a tedy pro každé přirozené k existuje $z \in (x, x + 1/k)$ tak, že

$$\left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right| \geqq 2^k$$

a tedy f nemá v bodě x vlastní derivaci zprava.

Důkaz věty 2. Kdyby $f(x)$ byla nespojitá v husté množině na nějakém částečném intervalu $\langle a, b)$, dostali bychom spor s lemmatem. Tedy na každém částečném intervalu existuje interval, kde je f spojitá. Označme N_1 množinu bodů, které patří do nějakého takového intervalu, N množinu těch bodů, které do žádného takového intervalu nepatří. Je-li $x \in N_1$, položme:

$$a_x = \sup [(N \cup \{a\}) \cap (-\infty, x\rangle] , \quad b_x = \inf [(N \cup \{b\}) \cap \langle x, +\infty)]$$

a označme I_x interval s krajními body a_x, b_x, při čemž $a_x \in I_x$ (resp. $b_x \in I_x$) právě když f je spojitá v a_x zprava (resp. v b_x zleva).

Nechť D je množina všech intervalů I_x $(x \in N_1)$. D je zřejmě neprázdná a spočetná a jsou splněny podmínky 1, 4, 5. Vlastnost 2 plyne z lemmatu, vlastnost 3 z věty 1.

Je-li $S = \emptyset$, je f spojitá ve všech bodech z $\langle a, b)$ zprava, a tedy $K_D^- = \emptyset$. Kdyby existovalo $y_0 \in H_D$ a $\delta_0 > 0$ tak, že $(y_0, y_0 + \delta_0) \cap K_D^+ = \emptyset$ splňovala by množina všech bodů nespojitosti funkce f v intervalu $(y_0, y_0 + \delta_0)$ podmínky lemmatu pro množinu M, tedy bychom dostali spor.

Tím je věta 2 dokázána.

Důkaz věty 3. Nechť $D = \{I_i\}_{i=1}^n$ (n přirozené nebo $n = \infty$), nechť I_i má krajní body a_i, b_i.

a) Nechť je splněna podmínka 2′. Pak stačí položit:

$$f(x) = \sum_{b_i \leqq x, b_i \in K_D^+} (b_i - a_i)^2 \, . \, 2^{-i} \, .$$

b) Nechť je splněna podmínka 2. Položme $f_1(x) = \sum_{b_i \leqq x} (b_i - a_i)^2 \, . \, 2^{-i}$. Nechť $\{I_{k_i}\}_{i=1}^{n'}$ jsou všechny intervaly z D, které obsahují svůj pravý koncový bod, nechť $\{b_{k_i}\}_{i=1}^{n'}$ jsou pravé koncové body těchto intervalů. Položme:

$$f_2(x) = f_1(x) \quad \text{pro} \quad x \notin \{b_{k_i}\}_{i=1}^{n'}$$

$$f_2(x) = f_1(y) \quad \text{pro} \quad x = b_{k_j} \, ,$$

kde y je libovolný bod z I_{k_j}.

Funkce f_2 má ve všech bodech z $\langle a, b)$ až na body $\{b_{k_i}\}_{i=1}^{n'}$ $f'_{2+}(x) = 0$.

Přiřaďme nyní každému ordinálnímu číslu $\alpha \leqq \Omega$ (Ω je první nespočetné ordinální číslo) množinu reálných čísel následujícím předpisem ($(M)^*$ značí množinu všech izolovaných bodů množiny M):

(i) $M_0 = K_D^-$.

(ii) Jsou-li M_α definovány pro všechna $\alpha < \beta$ položme $M_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha - (\bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha)^*$.

Je-li $\alpha \neq \beta$, jsou M_α^*, M_β^* disjunktní. Je-li $M_\alpha \neq \emptyset$ je i $(M_\alpha)^* \neq \emptyset$ (podle předpokladu 2), tedy neprázdných množin M_α je spočetně mnoho. Tedy $M_\Omega = \emptyset$.

Je-li $x \in K_D^-$, existuje nejmenší ordinální číslo β tak, že $x \notin M_\beta$, tedy $x \in (\bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha)^*$.

Zvolme $\delta(x) > 0$ tak, že $(x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap \bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha = \{x\}$.

Položme

$$f_3(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \notin K_D^- ;$$
$$f_3(x) = \delta^2(x) \quad \text{pro} \quad x \in K_D^- .$$

Nechť $x_0 \in \langle a, b)$, $x_0 \notin K_D^-$ a nechť funkce f_3 nemá v bodě x_0 derivaci zprava rovnu nule. Potom existuje posloupnost

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_0 , \quad x_j \in K_D^- \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots ; \quad \lim_{k \to \infty} x_k = x_0$$

taková, že $x_0 \in (x_i - \delta(x_i), x_i)$ pro všechna přirozená i. Každému x_j $(j = 1, 2, \ldots)$ přiřaďme nejmenší ordinální číslo α_j tak, že $x_j \notin M_{\alpha_j}$. Je-li $i > j \geqq 1$, je $x_i \in (x_j - \delta(x_j), x_j)$, tedy $x_i \notin \bigcap_{\alpha < \alpha_j} M_\alpha$, a proto je $\alpha_i < \alpha_j$. Tedy dostáváme klesající posloupnost ordinálních čísel, která je nekonečná, což je spor, tedy funkce f_3 má v $\langle a, b) - K_D^-$ (K_D^- je spočetná) derivaci zprava rovnu nule.

Položme nyní $f(x) = f_2(x) + f_3(x)$. Tato funkce splňuje tvrzení věty 3.

Poznámka 1. Nechť C je Cantorovo diskontinuum, $(0, 1) - C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, při čemž toto sjednocení je disjunktní. Položme ve větě 3 $D = \{\langle a_i, b_i), i = 1, 2, \ldots\}$, $N = \langle 0, 1) - \bigcup_{I \in D} I$. Tedy existuje funkce, která má ve všech bodech intervalu $\langle 0, 1)$ derivaci zprava rovnu nule taková, že množina N z věty 2 je nespočetná.

Poznámka 2. Z věty 2 vyplývá, že neexistuje funkce, která by splňovala tvrzení úlohy č. 2, str. 24 z [1].

Literatura

[1] *N. Bourbaki:* Fonctions d'une variable réele, Paris 1949.

[2] *V. Jarník:* Diferenciální počet 2, Praha 1956.

[3] *K. Kuratowski:* Topology, Warszawa 1948.

Adresa autora: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

A CHARACTERIZATION OF FUNCTIONS WHOSE DERIVATIVE FROM THE RIGHT VANISHES EXCEPT FOR A COUNTABLE SET

DAVID PREISS, Praha

Let D be a set of real intervals. We put $K_D^-(K_D^+; H_D)$ the set of x such that there exists $I \in D$ and y such that $I = (x, y\rangle$ po $I = (x, y)$ $(I = \langle y, x)$ or $I = (y, x)$; $I = \langle y, x\rangle$ or $I = (y, x\rangle)$.

In the paper the following theorems are proved:

Theorem 1. *Let f be defined on $\langle a, b)$. Let $f_1'(x) = 0$ on $\langle a, b) - S$, where S is a countable set. Then there exists a nonempty countable set of disjoint intervals D and a nowhere dense set N such that*:

1. $\langle a, b) = \bigcup_{I \in D} I \cup N$; $\bigcup_{I \in D} I \cap N = \emptyset$.
2. *Any non empty subset K_D^- has an isolated point.*
3. *f is constant on every interval $I \in D$.*
4. *If I, J are intervals, $I \in D$, $I \subsetneqq J$, then f is not constant on J.*

Moreover, if $S = \emptyset$, then the following statement holds:

2'. *$K_D^- = \emptyset$ and any $x \in H_D$ is an accumulation point of K_D^+.*

Theorem 2. *Let $N \in \langle a, b)$ be a nowhere dense set and let D be a countable set of disjoint intervals such that* 1 *and* 2 *are valid. Then there exists a function f defined on $\langle a, b)$ such that $f_+'(x) = 0$ on $\langle a, b) - S$, where S is a countable set, and such that* 3., 4. *are valid. Moreover, if* 2' *also holds, then there exists a function f such that $f_+' = 0$ on $\langle a, b)$ and* 3., 4. *are valid.*