Stanislav Kolda

Větvící se procesy se spočetnou množinou typů částic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 168--193

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117663`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

VĚTVÍCÍ SE PROCESY SE SPOČETNOU MNOŽINOU TYPŮ ČÁSTIC

STANISLAV KOLDA, Pardubice

(Došlo dne 8. prosince 1967)

0. ÚVODNÍ POZNÁMKY

Obyčejné větvící se procesy, viz např. [1], [2] nebo [3] jsou definovány jako speciální třída Markovských procesů. Tyto obyčejné větvící se procesy byly dále různým způsobem zobecňovány, komplikovány nebo omezovány. Jedním způsobem zobecnění je zobecnění stavů těchto větvících se procesů a to tak, že rozšiřujeme množinu typů částic systému anebo zobecňujeme stavový prostor. Viz např. [3], [5] a [6].

V této práci je zobecněn klasický případ větvícího se procesu s konečným počtem typů částic na větvící se proces se spočetným počtem typů částic. Vyšetřování tohoto zobecněného větvícího se procesu je provedeno metodou vytvořujících funkcí.

Pro asymptotické vlastnosti větvícího se procesu se spočtenou množinou typů částic je rozhodující maximální kladné reálné charakteristické číslo lineárního operátoru, vyjádřeného nekonečnou maticí prvních faktoriálních momentů. Proto se v kap. 3 zkoumají vlastnosti maticového operátoru M a zavádí se pro něj takové předpoklady, aby splňoval požadavky potřebné při studiu asymptotických vlastností.

Asymptotické vlastnosti větvícího se procesu se spočetnou množinou typů částic jsou předmětem posledních tří kapitol. V těchto kapitolách je ukázáno za jakých podmínek a v jakém rozsahu se zachovají pro spočetný počet typů částic asymptotické vlastnosti větvících se procesů známých pro konečný případ.

1. DEFINICE SMT-PROCESU

Uvažujme větvící se proces s konečným počtem typů částic popsaný např. ve [2]. Oproti tomuto větvícímu se procesu uvažujme částice spočetně mnoha typů T_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Systém v čase t bude charakterisován spočetně rozměrným vektorem $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ s celými nezápornými složkami. Předpokládejme, že počet všech částic v každém časovém okamžiku $t = 0, 1, 2, \ldots$ je vždy číslo konečné.

Označme:

$$A = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty,\ \alpha_i \text{ čísla celá nezáporná}\}$$

Z vět o spočetných množinách vyplývá, že množina A je množina spočetná.

Označme:

$\beta_{ij} \in A$ soubor částic, které vzniknou během časového okamžiku z j-té částice i-tého typu

$$\begin{aligned} e_i &= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \\ e_{ii} &= (0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots) \\ e_{ij} &= (0, \ldots, \underset{i\text{-tá}}{0, 1}, 0, \ldots, \underset{j\text{-tá souřadnice}}{0, 1}, 0, \ldots) \text{ pro } i \neq j \\ \bar{0} &= (0, 0, 0, \ldots), \quad \bar{1} = (1, 1, 1, \ldots) \end{aligned}$$

Definice 1.1. Větvící se proces se spočetnou množinou typů částic, krátce označeno SMT-proces, je vektorový markovský proces, homogenní, s diskrétním časem, jehož stavy jsou vektory z množiny A.

Pravděpodobnosti přechodu ze stavu α do stavu β $(\alpha, \beta \in A)$ za čas t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ $P_\alpha^\beta(t) = P(x(t) = \beta \mid x(0) = \alpha)$ mají pro $\alpha, \beta, \gamma, \beta_{ij}, e_i \in A$ následující vlastnosti:

(1.1) 1) $P_\alpha^\beta(t) \geqq 0$,

2) $\sum_{\beta \in A} P_\alpha^\beta(t) = 1$,

3) $P_\alpha^\beta(0) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases}$

4) $P_\alpha^\gamma(t_1 + t_2) = \sum_{\beta \in A} P_\alpha^\beta(t_1)\, P_\beta^\gamma(t_2)$,

5) $P_\alpha^\beta(t) = \sum_{\sum \beta_{ij} = \beta} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\alpha_i} P_{e_i}^{\beta_{ij}}(t)$ (pro $\alpha_i = 0$, položíme příslušný faktor roven jedné).

Vlastnost 4) je zvláštním případem Chapman-Kolmogorovovy rovnice a vlastnost 5) je charakteristickou vlastností větvícího se procesu.

Nadále budeme značit $P_{e_i}^\alpha(t) = P_i^\alpha(t)$.

Definice 1.2. Nechť $\alpha, \beta \in A$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ je spočetně rozměrný vektor s reálnými složkami $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$. Označme $x^\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i}$.

Vytvořující funkcí rozložení pravděpodobností $P_k^\alpha(t)$ nazveme

$$F_k(t, x) = \sum_{\alpha \in A} x^\alpha P_k^\alpha(t)\,. \tag{1.2}$$

Vytvořující funkcí rozložení pravděpodobností $P_\alpha^\beta(t)$ nazveme

$$F_\alpha(t, x) = \sum_{\beta \in A} x^\beta P_\alpha^\beta(t) . \tag{1.3}$$

Věta 1.1. *Nechť $F_k(t, x)$ je vytvořující funkce definovaná (1.2). Potom platí:*

(1.4) a) $F_k(t, \bar{1}) = 1$,

b) $|F_k(t, x)| \leqq 1$,

c) $$P_k^\alpha(t) = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} \left[\frac{\partial^{\sum_1^r \alpha_i} F_k(t, x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \right]_{x=\bar{0}} .$$

Důkaz. Tvrzení a) a b) vyplývají z (1.1). Tvrzení c) dokážeme následovně. Volme $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots$ pevná. Potom $F_k(t, x)$ je mocninnou řadou proměnných $x_1, \dots, x_r$. Vyjádříme-li $F_k(t, x)$ následovně

$$F_k(t, x) = \sum_{k_1, \dots, k_r = 0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha_i = k_i \\ i = 1, \dots, r}} P_k^\alpha(t)\, x_{r+1}^{\alpha_{r+1}} x_{r+2}^{\alpha_{r+2}} \dots \Big)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} ;$$

potom na základě vlastností mocninných řad jest

$$\sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha_i = k_i, i = 1, \dots, r}} P_k^\alpha(t) \prod_{s=r+1} x_s^{\alpha_s} = \frac{\partial^{\sum_1^r k_i} F_k(t; 0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots)}{k_1! \dots k_r!\, \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} ,$$

takže pro dané $\alpha \in A$ platí (1.4) c).

Označme pro $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, 3, \dots$

$$F(t, x) = (F_1(t, x), F_2(t, x), F_3(t, x), \dots) ,$$

$$F_i^{(r)}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_r} F_i(t, x) .$$

Věta 1.2. *Buďte $F_i(t, x)$, $F_\alpha(t, x)$ vytvořující funkce definované (1.2) a (1.3). Potom platí:*

a) *vytvořující funkce $F_k(t, x)$ vyhovuje funkcionální rovnici*

$$F_k(t + \tau; x) = F_k(t; F(\tau, x)) ; \tag{1.5}$$

b) *pro $\alpha \in A$*

$$F_\alpha(t, x) = \prod_{i=1}^{\infty} (F_i(t, x))^{\alpha_i} . \tag{1.6}$$

Důkaz. Postup důkazu (1.5) je stejný jako ve větě 1, § 2, kap. I. z [1]. Tvrzení (1.6) vyplývá z (1.3), (1.1)5) a důkazu tvrzení (1.5).

Věta 1.3. *Buďte $F_i(t, x)$, $F_\beta(t, x)$ vytvořující funkce z definice 1.2. Potom platí*

$$F_i^{(j)}(t + t_0, x) = \sum_{r=1}^{\infty} F_i^{(r)}(t, F(t_0, x))\, F_r^{(j)}(t_0, x)\,.$$

Důkaz.

$$F_i^{(j)}(t + t_0, x) = \sum_{\alpha\in A} \sum_{\beta\in A} \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty} x_s^{\alpha_s}\, P_i^\beta(t)\, P_\beta^\alpha(t_0) =$$

$$= \sum_{\beta\in A} P_i^\beta(t)\, F_\beta^{(j)}(t_0, x) = \sum_{\beta\in A} P_i^\beta(t) \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r\, F_r(t_0, x)^{\beta_r - 1} \prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{\infty} F_s(t_0, x)^{\beta_s}\, F_r^{(j)}(t_0, x)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} F_i^{(r)}(t, F(t_0, x))\, F_r^{(j)}(t_0, x)\,.$$

2. FAKTORIÁLNÍ MOMENTY

Faktoriální momenty definujme souhlasně s [1] a [4]. Rozepíšeme-li tyto vzorce, dostaneme např. pro faktoriální momenty 1. řádu vyjádření

$$M_{i,j}(t) = E_i(X_j(t)) = \sum_{\beta\in A} \beta_j\, P_i^\beta(t) \tag{2.1}$$

$$M_{\alpha,j}(t) = E_\alpha(X_j(t)) = \sum_{\beta\in A} \beta_j\, P_\alpha^\beta(t) \tag{2.2}$$

a pro faktoriální momenty 2. řádu vyjádření

$$M_{i,(jk)}(t) = E_i(X_j(t)\, X_k(t)) = \sum_{\beta\in A} \beta_j \beta_k\, P_i^\beta(t)\,, \quad j \neq k\,, \tag{2.3}$$

$$M_{i,(jj)}(t) = \sum_{\beta\in A} \beta_j(\beta_j - 1)\, P_i^\beta(t)\,, \tag{2.4}$$

$$M_{\alpha,(jk)}(t) = \sum_{\beta\in A} \beta_j \beta_k\, P_\alpha^\beta(t)\,, \quad j \neq k\,. \tag{2.5}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro tyto faktoriální momenty platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} M_{i,j}(t) &= \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t. x)\big|_{x=\bar{1}}\,, \\ M_{\alpha,j}(t) &= \frac{\partial}{\partial x_j} F_\alpha(t, x)\big|_{x=\bar{1}}\,, \\ M_{i,(jk)}(t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} F_i(t, x)\big|_{x=\bar{1}}\,, \quad j \neq k\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$M_{i,(jj)}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} F_i(t, x)|_{x=\bar{1}},$$

$$M_{\alpha,(jk)}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x_k} F_\alpha(t, x)|_{x=\bar{1}}, \quad j \neq k.$$

O faktoriálních momentech budeme vždy předpokládat, že $\sup_i \sum_j M_{i,j}(1)$, $\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1)$ a $\sup_i \sum_{j,k,l} M_{i,(jkl)}(1)$ jsou konečné.

Použitím (2.6), (1.6) a (1.4)a) se dokáží následující vztahy pro dané $\alpha \in A$, dané j, k a libovolné $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$M_{\alpha,j}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, M_{i,j}(t), \tag{2.7}$$

$$M_{\alpha,(jk)}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [\alpha_r \, M_{r(jk)}(t) + \alpha_r(\alpha_r - 1) \, M_{r,j}(t) \, M_{r,k}(t)] + \\ + \sum_{\substack{r,m=1 \\ r \neq m}}^{\infty} \alpha_r \alpha_m \, M_{r,j}(t) \, M_{m,k}(t). \tag{2.8}$$

Vztah (2.8) lze vyjádřit také takto:

$$M_{\alpha,(jk)}(t) = \sum_r \alpha_r \, M_{r,(jk)}(t) + (\sum_i \alpha_i M_{i,j}(t)) (\sum_i \alpha_i \, M_{i,k}(t)) - \\ - \sum_i \alpha_i \, M_{i,j}(t) \, M_{i,k}(t). \tag{2.9}$$

Označíme-li $M(t) = \{M_{i,j}(t)\}_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ nekonečnou matici faktoriálních momentů 1. řádu, $M_{\cdot,(jk)}(t) = \{M_{i,(jk)}(t)\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ nekonečný sloupcový vektor faktoriálních momentů 2. řádu pro pevné j, k, $z_{\cdot,(jk)}(s, t) = \{\sum_{r,m} M_{i,(r,m)}(s) \,.$ $. \, M_{r,j}(t) \, M_{m,k}(t)\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ nekonečný sloupcový vektor pro pevné j, k, potom pomocí (1.1)4), (2.7) a (2.8) se dokáží vztahy obdobné vztahům (3.9) a (3.10) ze [4].

Platí

$$M(s + t) = M(s) \, M(t) \tag{2.10}$$

$$M_{\cdot,(jk)}(s + t) = M(s) \, M_{\cdot,(jk)}(t) + z_{\cdot,(jk)}(s, t). \tag{2.11}$$

Věta 2.1. *Nechť* $\sup_i \sum_j M_{i,j}(1)$ *je konečné. Potom* $\sup_i \sum_j M_{i,j}(t)$ *je konečné a platí*

$$M(t) = [M(1)]^t. \tag{2.12}$$

Důkaz. První část tvrzení se dokáže úplnou indukcí pomocí (2.10). Vztah (2.12) vyplývá z (2.10).

Věta 2.2. *Nechť* $\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty$ *a* $\sup_i \sum_j M_{i,j}(1) < \infty$. *Potom*

$$\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(t) < \infty$$

a pro pevné j, k platí

$$M_{\cdot,(jk)}(t) = \sum_{\tau=1}^{t} M(t-\tau)\, z_{\cdot,(jk)}(\tau - 1)\,, \quad t = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.13}$$

přičemž $z_{\cdot,(jk)}(t) = \{\sum_{r,m} M_{i,(rm)}(1)\, M_{r,j}(t)\, M_{m,k}(t)\}_i$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

Důkaz. Důkaz obou tvrzení se provede úplnou indukcí. V prvém případě se použije vztahu (2.11), v druhém případě je důkaz obdobný důkazu (3.14) ze [4].

Věta 2.3. *Nechť platí předpoklady věty* 2.2. *Nechť pro všechna i, k* $\sum_j M_{i,(jk)}(1) \leqq$ $\leqq L M_{i,k}(1)$, *kde* $L > 0$, *konečné.*

Potom pro všechna i, k a pro dané t platí

$$\sum_j M_{i,(jk)}(t) \leqq L_t\, M_{i,k}(t)\,, \tag{2.14}$$

$L_t > 0$, *konečné.*

Důkaz. Použitím (2.13), předpokladu této věty a (2.10) jest

$$\sum_j M_{i,(jk)}(t) = \sum_j \sum_{\tau=1}^{t} \sum_s M_{i,s}(t-\tau)\, z_{s,(jk)}(\tau - 1) \leqq$$

$$\leqq L \sum_{\tau=1}^{t} \sup_r \sum_j M_{r,j}(\tau - 1) \sum_s M_{i,s}(t-\tau) \sum_m M_{s,m}(1)\, M_{m,k}(\tau - 1) \leqq L_t\, M_{i,k}(t)\,.$$

Definice 2.1. Řekneme, že *SMT-proces degeneruje*, jestliže nezůstala ani jedna částice uvažovaných typů.

Pravděpodobnost, že proces začínající s jednou částicí typu i degeneruje v čase t, je $P_i^{\bar{0}}(t) = P(X(t) = \bar{0}/X(0) = e_i)$.

Pravděpodobnost, že proces začínající s jednou částicí typu i dříve nebo později degeneruje je $\lim_{t\to\infty} P_i^{\bar{0}}(t) = P$.

Volíme-li

$$Q_i(t) = 1 - P_i^{\bar{0}}(t)\,, \tag{2.15}$$

potom $Q_i(t)$ je pravděpodobnost, že SMT-proces s počátečním stavem e_i nedegeneruje k časovému okamžiku t.

Označíme-li

$$H_i(t, x) = \dot{F}_i(t, x) - 1\,, \tag{2.16}$$

potom je zřejmé, že

$$H_i(t, \bar{0}) = -Q_i(t).$$

Věta 2.4.

$$F_i(t, x) = 1 + \sum_j M_{i,j}(t)(x_j - 1) + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} \bar{M}_{i,(jk)}(t, x)(x_j - 1)(x_k - 1),$$

kde $\bar{M}_{i,(jk)}(t, x) \leqq M_{i,(jk)}(t)$, $x_i \in \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Důkaz. Uvažujme $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots)$; označme $g(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$; podle Taylorova vzorce jest

$$g(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_j - 1) + \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \alpha_j \alpha_k \frac{\prod_{s=1}^{n} \xi_s^{\alpha_s}}{\xi_j \xi_k} (x_j - 1)(x_k - 1) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j - 1) \frac{\prod_{s=1}^{n} \xi_s^{\alpha_s}}{\xi_j^2} (x_j - 1)^2, \quad \text{kde} \quad x_s < \xi_s < 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Je zřejmé, že

$$0 \leqq \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x_j \, \partial x_k} \leqq \alpha_j \alpha_k \quad \text{a} \quad 0 \leqq \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x_j^2} \leqq \alpha_j(\alpha_j - 1).$$

Tudíž

$$F_i(t, x) = \sum_{\alpha \in A} x^\alpha P_i^\alpha(t) = \sum_{\alpha \in A} P_i^\alpha(t) + \sum_{\alpha \in A} \sum_j \alpha_j(x_j - 1) P_i^\alpha(t) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x_j \, \partial x_k} (x_j - 1)(x_k - 1) P_i^\alpha(t) = 1 + \sum_j (x_j - 1) M_{i,j}(t) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} (x_j - 1)(x_k - 1) \bar{M}_{i,(jk)}(t, x),$$

kde

$$\bar{M}_{i,(jk)}(t, x) = \sum_{\alpha \in A} \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x_j \, \partial x_k} P_i^\alpha(t) \leqq M_{i,(jk)}(t), \quad x < \xi < \bar{1}.$$

Věta 2.5.

$$|H_i(t, x)| \leqq \sum_j M_{i,j}(t).$$

Důkaz: Pro $x_i \in \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ a $t = 0, 1, 2, \ldots$ je $\bar{M}_{i,(jk)}(t, x) \geqq 0$. Tudíž podle věty 2.4. $Q_i(t) = 1 - F_i(t, \bar{0}) \leqq \sum_j M_{i,j}(t)$. Jelikož $F_i(t, x) \geqq F_i(t, \bar{0})$, je $|H_i(t, x)| \leqq 1 - F_i(t, \bar{0}) = Q_i(t)$ a tedy $|H_i(t, x)| \leqq \sum_j M_{i,j}(t)$.

Dosazením do věty 2.4. za x_j výraz $F_j(\tau, x)$, nebo obdobnou úvahou jako ve větě 2.4. se dají dokázat následující vztahy:

$$(2.17) \qquad H_i(t + \tau, x) = \sum_j M_{i,j}(t)\, H_j(\tau, x) + \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} \overline{M}_{i,(jk)}(t, \tau, x)\, H_j(\tau, x)\, H_k(\tau, x)\,,$$

kde pro $x_i \in \langle 0, 1\rangle$, $\overline{M}_{i,(jk)}(t, \tau, x) \leqq M_{i,(jk)}(t)$;

$$(2.18) \qquad H_i(t + \tau, x) = \sum_i M_{i,j}(t)\, H_j(\tau, x) + \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(t)\, H_j(\tau, x)\, H_k(\tau, x) + $$
$$+ \tfrac{1}{6} \sum_{j,k,r} \overline{M}_{i,(jkr)}(t, \tau, x)\, H_j(\tau, x)\, H_k(\tau, x)\, H_r(\tau, x)\,,$$

kde $\overline{M}_{i,(jkr)}(t, \tau, x) \leqq M_{i,(jkr)}(t)$ pro $x_i \in \langle 0, 1\rangle$

$$(2.19) \qquad F_i^{(r)}(t, x) = M_{i,r}(t) + \sum_j \overline{M}_{i,(rj)}(t, x)\,(x_j - 1)\,,$$

kde $\overline{M}_{i,(rj)}(t, x) \leqq M_{i,(rj)}(t)$ pro $x_i \in \langle 0, 1\rangle$

$$(2.20) \qquad F_i^{(j)}(t + \tau, x) = \sum_r [M_{i,r}(t) + \sum_s \overline{M}_{i,(rs)}(t, \tau, x)\,.$$
$$.\,(F_r(\tau, x) - 1)]\, F_r^{(j)}(\tau, x)\,,$$

kde $\overline{M}_{i(rs)}(t, \tau, x) \leqq M_{i,(rs)}(t)$ pro $x_i \in \langle 0, 1\rangle$.

3. MATICOVÝ OPERÁTOR M

Nekonečná matice prvních faktoriálních momentů $M = \{M_{i,j}(1)\}_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ splňující předpoklad $\sup_i \sum_j M_{i,j}(1) < \infty$ je lineárním operátorem M v prostoru m, který každému $x = \{x_i\}_i \in m$ přiřazuje $\{\sum_j M_{i,j} x_j\}_i \in m$.

Současně nekonečná matice prvních faktoriálních momentů splňující předpoklad $\sup_i \sum_j M_{i,j}(1) < \infty$ je lineárním operátorem M' v prostoru l_1, který každému $y = \{y_i\}_i \in l_1$ přiřazuje $\{\sum_i M_{i,j} y_i\}_j \in l_1$.

Protože prostor m je adjungovaný k prostoru l_1, je operátor M adjungovaný k operátoru M'. Vlastní vektory operátoru M budeme nazývat pravé vlastní vektory μ a vlastní vektory operátoru M' budeme nazývat levé vlastní vektory ν.

V následujících větách stanovíme podmínky, za kterých budou mít maticové operátory M a M' obdobné vlastnosti jako konečné matice prvních faktoriálních momentů. K zobecnění těchto vlastností je použito článku [8] a vět z [9] a [10].

Věta 3.1. *Nechť maticový operátor M je striktně positivní a kompaktní. Nechť spektrální poloměr operátoru M je větší než nula. Potom*

a) *existuje maximální charakteristické číslo* $R > 0$, *které je jednoduché a neexistuje jiné charakteristické číslo* R' *takové, že* $|R'| \geqq R$;

b) *charakteristické číslo* R *odpovídá vlastním vektorům, pravému* μ *a levému* ν, *které jsou jednoznačně (až na násobek) určeny a pro které platí*

$$(3.1)\qquad 0 < a \leqq \mu_i \leqq b\,, \quad 0 \leqq \nu_j\,, \quad \sum_j \nu_j < \infty \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots$$

c) *platí*

$$(3.2)\qquad \sum_j M_{i,j}(t)\,\mu_j = R^t \mu_i\,, \quad \sum_i \nu_i\, M_{i,j}(t) = R^t \nu_j$$

d) *vlastní vektory se dají normalizovat tak, že*

$$(3.3)\qquad \sum_j \nu_j = 1\,, \quad \sum_j \mu_j \nu_j = 1$$

e) *existuje* $0 < r < 1$ *tak, že platí-li* (3.3) *je*

$$(3.4)\qquad \sup_i \sum_j \left|R^{-t} M_{i,j}(t) - \mu_i \nu_j\right| = O(r^t)\,.$$

Důkaz. Jelikož podle předpokladu operátor M je kompaktní, vyplývá z [10] kap. III. § 3. Věta 1., že též operátor M' je kompaktní.

Ježto operátor M' je positivní a kompaktní, platí podle [8] Dodatek 1. str. 917 a podle [9] kap. 7. § 3 Lemma 7, že $R > 0$ je reálné maximální charakteristické číslo obou operátorů.

Jelikož operátor M je striktně positivní, potom podle [8] Věta 9. je R jednoduché charakteristické číslo a podle [8] Dodatek 1. str. 917 příslušný vlastní vektor μ je nezáporný. Podle Fredholmovy alternativy z [9] kap. 7. je také vlastní vektor ν operátoru M' určen jednoznačně a je opět nezáporný.

Z předpokladu, že M je striktně positivní, plyne, že ke každému j existuje $\alpha_j > 0$ tak, že $\inf M_{i,j} \geqq \alpha_j$. Jelikož pro aspoň jedno j $\mu_j \neq 0$, platí pro každé i $R\mu_i = \sum_j M_{i,j}\mu_j \geqq M_{i,j}\mu_j \geqq a' > 0$ a z toho plyne $\mu_i \geqq a > 0$ pro všechna i. Protože $\mu \in m$ je zřejmě $\mu_i \leqq b$ pro všechna i.

Jelikož existuje alespoň jedno i takové, že $\nu_i > 0$, a protože $M_{i,j} > 0$ pro všechna i, j, platí pro každé j $R\nu_j = \sum_i \nu_i M_{i,j} \geqq M_{i,j}\nu_i > 0$. Takže $\nu_j > 0$ pro všechna j. Jelikož $\nu \in l_1$, je zřejmé, že $\sum_j \nu_j < \infty$.

Tvrzení c) se dokáže úplnou indukcí a důkaz tvrzení d) je zřejmý.

Z [8] Věta 11. a ze zpřísněného tvrzení této věty pro případ, že operátor M je kompaktní (str. 924 za dodatkem), plyne, že existuje operátor D a číslo $0 < r < 1$ tak, že $\|R^{-t}M^t - D\| < r^t$, přičemž $D^2 = D$.

Jestliže maticový operátor M má vlastní vektory μ a ν, potom i tytéž vlastní vektory má maticový operátor M^t a D.

Jelikož $D^2 = D$, tzn. $\sum_j D_{i,j} D_{j,k} = D_{i,k}$, je pro každé k $\{D_{j,k}\}_j$ vlastní pravý vektor a pro každé i $\{D_{i,j}\}_j$ vlastní levý vektor. Existuje tedy c_k a d_i tak, že $D_{j,k} = c_k \mu_j$ a $D_{i,j} = d_i \nu_j$. Platí tedy, že $\sum_j d_i \nu_j c_k \mu_j = c_k \mu_i$, a z tohoto výrazu při podmínce (3.3) plyne $d_i = \mu_i$, takže $D_{i,j} = \mu_i \nu_j$.

Věta 3.2. *Nechť pro všechna i, i', j a pro konečné $k > 0$ platí: $M_{i,j}(1) \leqq k\, M_{i',j}(1)$. Nechť všechny sloupce maticového operátoru M jsou nenulové. Potom*

a) *pro všechna i, i', j a pro $t = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\frac{1}{k} M_{i',j}(t) \leqq M_{i,j}(t) \leqq k\, M_{i',j}(t)\,, \tag{3.5}$$

b) *maticový operátor M je kompaktní a striktně positivní,*

c) *existuje $0 < \gamma$, $\delta < \infty$ tak, že pro všechna i, j*

$$\gamma \nu_j \leqq R^{-t} M_{i,j}(t) \leqq \delta \nu_j\,, \tag{3.6}$$

d) *ke kladnému ε existuje t_1 tak, že pro $t \geqq t_1$ a pro všechna j*

$$\sup_i \left| R^{-t} M_{i,j}(t) - \mu_i \nu_j \right| < \varepsilon \nu_j\,. \tag{3.7}$$

Důkaz. Tvrzení a) se dokáže úplnou indukcí.

Dokážeme nyní, že maticový operátor M je kompaktní. Podle [9] kap. 4. § 6. Věta 5. stačí dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje rozklad $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ na konečně mnoho disjunktních množin $I_1, \ldots, I_s$ a body $n_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ tak, že pro $a \in m$

$$\sup_{\|a\| \leqq 1} \sup_{n \in I_i} \left| \sum_j M_{n_i,j} a_j - \sum_j M_{n,j} a_j \right| < \varepsilon\,. \tag{3.8}$$

Jelikož k danému $\varepsilon > 0$ a danému $k > 0$ pro $i = 1$ existuje j_0 tak, že $\sum_{j_0+1}^{\infty} M_{1,j} < \varepsilon/3k$, potom za předpokladu této věty pro všechna i a pevné j_0 jest

$$\sum_{j_0+1}^{\infty} M_{i,j} \leqq k \sum_{j_0+1}^{\infty} M_{1,j} < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.9}$$

Z předpokladu této věty vyplývá, že pro každé j $(j = 1, 2, \ldots, j_0)$ existuje rozklad $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ na konečně mnoho disjunktních množin $I_1, I_2, \ldots, I_{s_{j_0}}$ tak, že $|M_{n_i,j} - M_{n,j}| < \varepsilon/3j_0$ pro n, $n_i \in I_i$.

Existuje konečné zjemnění $I_1, I_2, \ldots, I_s$, $s \geqq s_{j_0}$ těchto j_0 rozkladů takové, že pro $j = 1, 2, \ldots, j_0$, $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\sup_{n \in I_i} \left| M_{n_i,j} - M_{m,j} \right| < \frac{\varepsilon}{3j_0}\,. \tag{3.10}$$

Z následujících nerovností je zřejmé, že operátor M je kompaktní. Viz (3.8). Neboť pro $\|a\| \leqq 1$ podle (3.9) a (3.10) jest

$$|\sum_j M_{n_i,j} a_j - \sum_j M_{n,j} a_j| \leqq \sum_1^{j_0} |M_{n_i,j} - M_{n,j}| + \sum_{j_0+1}^{\infty} M_{n_i,j} + \sum_{j_0+1}^{\infty} M_{n,j} < \varepsilon .$$

Dokážeme dále, že operátor M je striktně positivní. Podle předpokladu této věty existuje ke každému j, i_j tak, že $M_{i_j,j} > 0$. Nechť $a_i \geqq 0$, $a \neq 0$; potom existuje alespoň jedno j tak, že $a_j \neq 0$ a tedy pro všechna i $\{Ma\}_i = \sum M_{i,j} a_j \geqq M_{i,j} a_j \geqq$ $\geqq (1/k) M_{i_j,j} = \alpha > 0$. Z toho je již zřejmé, že operátor M je striktně positivní.

Pro dané i, j a pro $i' = 1, 2, 3, \ldots$ jest podle (3.5) a (3.1)

$$R^{-t} M_{i,j}(t)\, v_{i'} \leqq k R^{-t} M_{i',j}(t)\, v_{i'} .$$

Sečteme-li tuto nerovnost přes všechna i' a použijeme-li vztahů (3.2) a (3.3) dostaneme, že $R^{-t} M_{i,j}(t) \leqq k v_j$. Obdobně se dokáže nerovnost $R^{-t} M_{i,j}(t) \geqq v_j/k$. Tím je dokázáno tvrzení c).

Položme $\tau = 2t$. Potom

$$\sup_t |R^{-\tau} M_{i,j}(\tau) - \mu_i v_j| =$$

$$= \sup_i |\sum_k (R^{-t} M_{i,k}(t)\, R^{-t} M_{k,j}(t) - \mu_i R^{-t} v_k\, M_{k,j}(t)| \leqq$$

$$\leqq \sup_i \sum_k |R^{-t} M_{i,k}(t) - \mu_i v_k|\, R^{-t} M_{k,j}(t) .$$

Nyní pomocí (3.4) a (3.6) se snadno dokáže tvrzení d).

V předešlých větách jsme stanovili podmínky, za kterých maticový operátor M má charakteristické číslo R a vlastní vektory μ a v. Při určení, zda SMT-proces je degenerující, má rozhodující význam právě charakteristické číslo maticového operátoru M.

Je to obdobné jako v případě větvícího se procesu s jedním typem částic, kde první faktoriální moment rozhoduje, zda proces je degenerující. V případě větvícího se procesu s konečným počtem typů částic má rozhodující úlohu charakteristické číslo konečné matice prvních faktoriálních momentů.

Jako v obou těchto případech je i u SMT-procesu kritickou hodnotou číslo jedna. Budeme tedy dále uvažovat o třech hlavních případech, a to o těch, kdy hodnota charakteristického čísla bude větší, menší nebo rovna jedné. Za těchto tří různých předpokladů dokážeme v následujících třech kapitolách asymptotické zákony pravděpodobnosti degenerace.

Za předpokladu $R < 1$ je odvozena věta analogická části věty z [4]; v případě $R = 1$ věta analogická větám ze [7] a za předpokladu $R > 1$ věta analogická větám z [2].

4. PŘÍPAD $R < 1$

Odvodíme nejprve několik pomocných vět, které budeme potřebovat k důkazu věty hlavní.

Věta 4.1. *Nechť platí předpoklady věty* 3.1. *Nechť*

$$\sup_i \sum_j M_{i,j}(1) < \infty \quad a \quad \sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty .$$

Potom existují $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ *tak, že pro všechna* t *platí*:

$$\sup_i \sum M_{i,j}(t) \leqq k_1 R^t , \quad \sup_i \sum M_{i,(jk)}(t) \leqq k_2 R^t .$$

Důkaz. Z (3.1) a (3.2) plyne $0 \leqq a \sum_j M_{i,j}(t) \leqq \sum_j M_{i,j}(t)\, \mu_j = R^t \mu_i$ a tedy

$$\sup_i \sum_j M_{i,j}(t) \leqq R^t \frac{b}{a} = k_1 R^t .$$

Podle (2.13)

$$M_{i,(jk)}(t) = \sum_{\tau=1}^{t} \sum_s M_{i,s}(t - \tau)\, z_{s,(jk)}(\tau - 1) .$$

Jelikož

$$\sup_i M_{i,(jk)}(t) \leqq \sum_{\tau=1}^{t} \sup_i \sum_s M_{i,s}(t - \tau) \sup_s z_{s,(jk)}(\tau - 1) \leqq \sum_{\tau=1}^{t} k_1 R^{t-\tau} \sup_s z_{s,(jk)}(\tau - 1)$$

a

$$\sup_s \sum_{j,k} z_{s,(jk)}(\tau - 1) = \sup_s \sum_{j,k} \sum_{r,m} M_{s,(rm)}(1)\, M_{r,j}(\tau - 1)\, M_{m,k}(\tau - 1) \leqq$$
$$\leqq k_1^2 R^{2\tau-2} \sup_s \sum_{r,m} M_{s,(rm)}(1) \leqq k' R^{2\tau-2} ,$$

potom

$$\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(t) \leqq \sum_{\tau=1}^{t} k_1 R^{t-\tau} k' R^{2\tau-2} \leqq k_2 R^t .$$

Věta 4.2. *Nechť platí předpoklady věty* 4.1. *Potom existují* $k_3 > 0$, $k_4 > 0$ *tak, že pro všechna* t, τ *a pro* $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ *platí*

$$\sup_i \sum_{j,k} \overline{M}_{i,(jk)}(t, \tau, x)\, \left|H_j(\tau, x)\right| \leqq k_3 R^{t+\tau} , \tag{4.1}$$

$$\sup_i \left|F_i^{(r)}(t, x)\right| \leqq k_4 R^t . \tag{4.2}$$

Důkaz. Podle věty 2.5. a věty 4.1. jest

$$\sup_i |H_i(\tau, x)| \leqq k_1 R^\tau \tag{4.3}$$

a

$$\sup_i \sum_{j,k} \overline{M}_{i,(jk)}(t, \tau, x) |H_j(\tau, x)| \leqq k_1 R^\tau k_2 R^t = k_3 R^{t+\tau}.$$

Tvrzení (4.2) se snadno dokáže pomocí (2.19) a věty 4.1.

Věta 4.3. *Nechť platí předpoklady věty 4.1. Potom $R^{-t} H_i(t, x)$ konverguje pro $t \to \infty$ stejnoměrně vzhledem k i a vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$ $i = 1, 2, 3, \ldots$ ke konečné funkci $g_i(x)$. Pro $x = \overline{0}$*

$$R^{-t} Q_i(t) \underset{t}{\to} -g_i(\overline{0}) = K_i \geqq 0.$$

Důkaz. Postup důkazu je obdobný důkazu věty 4.2. ze [4]. K důkazu použijeme věty 3.1., podle které pro dané $\varepsilon > 0$ existuje T takové, že pro $\tau_1, \tau_2 > T$

$$\sup_i \sum_j |R^{-\tau_1} M_{i,j}(\tau_1) - R^{-\tau_2} M_{i,j}(\tau_2)| < \varepsilon.$$

Dále použijeme vztahů (4.3) a (4.1).

Věta 4.4. *Nechť platí předpoklady věty 4.1. Potom $R^{-t} H_i^{(j)}(t, x)$ konverguje stejnoměrně vzhledem k i a vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, 3, \ldots$*

Důkaz. Postup důkazu je stejný jako u věty 4.3. K důkazu se použije (2.20), věty 3.1., (4.2) a (4.1).

Hlavní věta: *Nechť maticový operátor M je striktně positivní a kompaktní, nechť* $\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty$.

Potom existují pro všechna i konečné limity

$$\lim_{t \to \infty} R^{-t} Q_i(t) = K_i, \quad \textit{kde} \quad K_i > 0. \tag{4.4}$$

Důkaz. Ve větě 4.3. je dokázáno, že $R^{-t} Q_i(t) \underset{t}{\to} K_i \geqq 0$. Dokážeme nyní (4.4). Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme, že $R^{-t} H_i(t, \overline{0}) = R^{-t} Q_i(t) \to 0$. Jelikož $H_i(t, x)$ je neklesající funkcí vzhledem k $x_j \in \langle 0, 1 \rangle$ je i $g_i(x)$ neklesající funkcí vzhledem k $x_j \in \langle 0, 1 \rangle$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Podle (2.16) a (1.4) $H_i(t, \overline{1}) = 0$, a tudíž z věty 4.3. plyne, že $g_i(\overline{1}) = 0$. Ježto podle předpokladu $g_i(\overline{0}) = 0$, nutně z tohoto vyplývá, že

$$g_i(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x_j \in \langle 0, 1 \rangle, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.5}$$

Označme $\hat{x} = (1, \ldots, 1, x_j, 1, \ldots)$, $x_j \in \langle 0, 1 \rangle$. Jelikož $R^{-t} H_i(t, x) \underset{t}{\to} g_i(x)$ stejnoměrně vzhledem k i a $x_j \in \langle 0, 1 \rangle$ a podle věty 4.4. $R^{-t} H_i^{(j)}(t, x)$ stejnoměrně konverguje vzhledem k i a pro $x_j \in \langle 0, 1 \rangle$, platí podle věty o konvergentních posloupnostech, že $R^{-t} H_i^{(j)}(t, \hat{x}) \underset{t}{\to} g_i^{(j)}(\hat{x})$. Tudíž $g_i^{(j)}(\bar{1}) = \lim_{t \to \infty} R^{-t} H_i^{(j)}(t, \bar{1})$, takže podle (2.16), (2.6) a věty 3.1. $g_i^{(j)}(\bar{1}) = \mu_i \nu_j > 0$, což je spor s (4.5). Platí tedy nutně (4.4).

5. PŘÍPAD $R = 1$

Odvodíme nejprve několik vět, které budeme potřebovat k důkazu věty hlavní.

Věta 5.1. *Nechť platí předpoklady věty* 3.1. *a nechť pro všechna* k $P_k^{\bar{0}}(t) \underset{t}{\to} 1$ [1]. *Potom* $\sup_k (1 - P_k^{\bar{0}}(t)) \underset{t}{\to} 0$.

Důkaz. Z (2.16), (1.2) a (2.17) plyne

$$\sup_k (1 - P_k^{\bar{0}}(t + s)) \leqq \sup_k \sum_j M_{k,j}(s) (1 - P_j^{\bar{0}}(t)) . \tag{5.1}$$

K danému $\varepsilon > 0$ existuje podle (3.4) s_0 tak, že pro $s > s_0$ platí

$$\sup_k \sum_j |M_{k,j}(s) - \mu_k \nu_j| < \varepsilon . \tag{5.2}$$

K danému $\varepsilon > 0$ existuje j_0 tak, že $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \nu_j < \varepsilon$. Rovněž k danému $\varepsilon > 0$ existuje t_0 tak, že pro $t > t_0$ a pro $j = 1, 2, \ldots, j_0$, $1 - P_j^{\bar{0}}(t) < \varepsilon$. Tedy pro $t > t_0$

$$\sum_j \nu_j (1 - P_j^{\bar{0}}(t)) = \sum_{j=1}^{j_0} \nu_j (1 - P_j^{\bar{0}}(t)) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \nu_j (1 - P_j^{\bar{0}}(t)) \leqq \varepsilon(1 + k')$$

a

$$\sup_k \mu_k \sum_j \nu_j (1 - P_j^{\bar{0}}(t)) \leqq b(k' + 1) \varepsilon . \tag{5.3}$$

Pomocí (5.1), (5.2) a (5.3) se snadno dokáže tvrzení věty 5.1.

Věta 5.2. *Nechť platí předpoklady věty* 3.2, *předpoklad věty* 5.1. *a nechť pro všechna* i, k $\sum_j M_{i,(jk)}(1) \leqq C M_{i,k}(1)$, *kde* C *je kladné, konečné číslo. Potom pro libovolné celé* n *platí*

$$\frac{H_i(t + n, x)}{H_j(t, x)} \underset{t}{\to} \frac{\mu_i}{\mu_j}$$

stejnoměrně pro $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$ *a stejnoměrně vzhledem k* i *a* j.

---

[1]) Obdobně jako v případě s konečným počtem typů částic lze dokázat, že tento předpoklad je splněn, neexistuje-li tzv. finální třída částic.

Důkaz. Pro $t \geqq s$ platí podle (2.17)

$$H_i(t, x) = \sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x) + \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} \overline{M}_{i,(jk)}(s, t, x)\,. \qquad (5.4)$$

$$. \, H_j(t - s, x)\, H_k(t - s, x)$$

a jelikož druhý člen na pravé straně je nezáporný, je zřejmé, že pro $x_i \in \langle 0, 1)$

$$\sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x) \leqq H_i(t, x) < 0\,. \qquad (5.5)$$

Takže použitím věty 2.3. a věty 5.1. můžeme výraz (5.4) následovně upravit

$$\left| \frac{H_i(t, x)}{\sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x)} - 1 \right| \leqq \tfrac{1}{2} \sup_j |H_j(t - s, x)|\,.$$

$$. \frac{\sum M_{i,(jk)}(s)\, |H_k(t - s, x)|}{\sum_j M_{ij}(s)\, |H_j(t - s, x)|} \leqq k \sup_j |H_j(t - s, x)| \leqq k \sup_j (1 - P_j^{\overline{0}}(t - s)) < \varepsilon\,.$$

T. zn., že k libovolnému $\varepsilon > 0$ a $s \geqq 1$ existuje $t_1(s) \geqq s$ tak, že pro všechna $t > t_1$, pro všechna i a pro $x_i \in \langle 0, 1)$, platí

$$\left| \frac{H_i(t, x)}{\sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x)} - 1 \right| < \varepsilon\,. \qquad (5.6)$$

Dokážeme dále, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje s_1 tak, že pro všechna $s \geqq s_1$, $t \geqq s$, pro všechna i a $x_i \in \langle 0, 1)$

$$\left| \frac{\sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x)}{\mu_i \sum_j \nu_j\, H_j(t - s, x)} - 1 \right| < \varepsilon\,. \qquad (5.7)$$

Použitím vztahů (3.7) a (3.1) můžeme psát

$$\left| \frac{\sum_j M_{i,j}(s)\, H_j(t - s, x)}{\mu_i \sum_j \nu_j\, H_j(t - s, x)} - 1 \right| \leqq \frac{\sup_i \sum_j |M_{i,j}(s) - \mu_i \nu_j|\, |H_j(t - s, x)|}{\mu_i \sum_j \nu_j\, H_j(t - s, x)} \leqq \frac{\varepsilon'}{a} = \varepsilon$$

a tím je dokázáno (5.7).

Označme

$$l_i(s, t, x) = \frac{H_i(t, x)}{\mu_i \sum_j \nu_j\, H_j(t - s, x)}\,.$$

Z tvrzení (5.6) a (5.7) ihned plyne, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje s_2 tak, že pro libovolné $s \geqq s_2$ lze najít $t_2(s) \geqq s$ tak, že pro $t > t_2(s)$, pro všechna i a pro $x_i \in \langle 0, 1)$ $|l_i(s, t, x) - 1| < \varepsilon$.

Pro pevně dané $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ a dané n (n celé číslo) volme $s > 0$ tak, aby současně $s \geqq s_2$ a $s + n \geqq s_2$. Položme $t_3 = \max\left[t_2(s), t_2(s + n)\right]$. Potom pro $t > t_3 + |n|$ jest

$$\left|\frac{(H_i t + n, x)}{H_j(t, x)} - \frac{\mu_i}{\mu_j}\right| = \frac{\mu_i}{\mu_j}\left|\frac{l_i(s + n, t + n, x)}{l_j(s, t, x)} - 1\right| \leqq \frac{b}{a}\frac{2\varepsilon}{\frac{1}{2}} = \frac{4b}{a}\varepsilon .$$

Věta 5.3. *Nechť platí předpoklady věty 5.2. Budiž v celé nezáporné číslo a n číslo celé. Potom*

$$\frac{H_i(t, x)}{\sum_k M_{j,k}(v)\, H_k(t + n, x)}$$

a) *konverguje pro $t \to \infty$ stejnoměrně vzhledem k i, j a $x_i \in \langle 0, 1)$ a limita je rovna μ_i/μ_j;*

b) *je stejnoměrně omezená vzhledem k $i, j, x_i \in \langle 0, 1)$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení a) plyne z věty 5.2. Tvrzení b) dokážeme následovně. Dokážeme nejprve pro pevné t a n, že výraz

$$\frac{\sum_j v_i\, H_i(t, x)}{\sum_j v_j\, H_j(t + n, x)} \tag{5.8}$$

je stejnoměrně omezený vzhledem k $x \in \langle 0, 1)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že výraz (5.8) není stejnoměrně ohraničen vzhledem k $x \in \langle 0, 1)$. Potom existuje posloupnost $x^{(m)} \in \langle 0, 1)$ tak, že

$$\left|\frac{\sum_j H_j(t + n, x^{(m)})\, v_j}{\sum_i H_i(t, x^{(m)})\, v_i}\right| \underset{m}{\to} 0 . \tag{5.9}$$

Jelikož vzhledem k (6.1) $\left|\sum_i H_i(t, x^{(m)})\, v_i\right| < \infty$, konverguje $\sum_j H_j(t + n, x^{(m)})\, v_j \underset{m}{\to} 0$, a tudíž také

$$H_j(t + n, x^{(m)}) \underset{m}{\to} 0 \quad \text{pro každé } j . \tag{5.10}$$

Jestliže pro pevné j_0 je posloupnost $x^{(m)}$ taková, že $x^{(m)} \underset{m}{\to} x^{(0)}$, přičemž alespoň jedno $x_k^{(0)} < 1$, potom platí (5.10), což můžeme přepsat jako $F_{j_0}(t + n, x^{(0)}) = 1$. Derivací podle x_k a pomocí (2.6) dostaneme $M_{j_0,k}(t + n) = 0$, avšak toto podle předpokladu není možné. To znamená, že (5.10) platí pouze pro posloupnost $x^{(m)} \underset{m}{\to} \bar{1}$.

Jelikož podle věty 2.4. a (3.6) $|H_i(t, x^{(m)})| \leqq \delta \sum_j v_j(1 - x_j^{(m)})$, je zřejmé, že

$$\sup_i |H_i(t, x^{(m)})| \underset{m}{\to} 0 . \tag{5.11}$$

Ze (2.17) pomocí (3.2) a věty 2.3. můžeme vyjádřit nerovnost

$$\sum_i H_i(t + n, x^{(m)})\, v_i \leqq \sum_j v_j\, H_j(t, x^{(m)}) + \tfrac{1}{2} L_n \sup_j \left|H_j(t, x^{(m)})\right| .$$
$$. \sum_{i,k} v_i\, M_{i,k}(n) \left|H_k(t, x^{(m)})\right| ,$$

kterou můžeme přepsat na tvar

$$\frac{\sum_i H_i(t + n, x^{(m)})\, v_i}{\sum_j H_j(t, x^{(m)})\, v_j} \geqq 1 - \tfrac{1}{2} L_n \sup_j \left|H_j(t, x^{(m)})\right| .$$

Limitním přechodem této nerovnosti pro $m \to \infty$ dojdeme podle (5.9) a (5.11) ke sporu $0 \geqq 1$. To znamená, že výraz (5.8) je stejnoměrně omezený vzhledem k $x_i \in \in \langle 0, 1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Jelikož podle (2.17) a (3.6) pro $x_i \in \langle 0, 1)$ jest $0 > H_i(t, x) \geqq \delta \sum_j v_j\, H_j(t - 1, x)$ a $\sum_k M_{j,k}(v)\, H_k(t + n, x) \leqq \gamma \sum_k v_k\, H_k(t + n, x) < 0$, je zřejmé, že

$$\left|\frac{H_i(t, x)}{\sum_k M_{j,k}(v)\, H_k(t + n, x)}\right| \leqq \frac{\delta}{\gamma} \left|\frac{\sum_j v_j\, H_j(t - 1, x)}{\sum_k v_k\, H_k(t + n, x)}\right|$$

a z tohoto již plyne tvrzení b).

Věta 5.4. *Nechť platí předpoklady věty* 5.3. *Budiž* $\sum_{i,j,k} M_{i,(jk)}(1)\, v_i \mu_j \mu_k = B$. *Potom*

$$\frac{H_i(t, x)\left(1 + \dfrac{Bt}{2} \sum_j v_j (1 - x_j)\right)}{\mu_i \sum_j v_j (1 - x_j)} \xrightarrow[t]{} -1 .$$

stejnoměrně vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Důkaz. Položme pro $t \geqq s \geqq 1$

$$z_i(t, s, x) = \sum_j M_{i,j}(t - s + 1)\, H_j(s - 1, x) - \sum_j M_{i,j}(t - s)\, H_j(s, x) = \tag{5.12}$$
$$= w_i(s - 1, t, x) - w_i(s, t, x) .$$

Vezmeme-li v úvahu (5.5), můžeme (5.12) vydělit výrazem $w_i(s - 1, t, x)\, w_i(s, t, x)$ a sečtením pro s od s_0 do t dostaneme

$$\frac{1}{H_i(t, x)} = \frac{1}{w_i(s_0 - 1, t, x)} + \sum_{s=s_0}^{t} \frac{z_i(t, s, x)}{w_i(s - 1, t, x)\, w_i(s, t, x)} . \tag{5.13}$$

Označíme-li

$$z_i^{(1)}(s, x) = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1)\, H_j(s, x)\, H_k(s, x)\,,$$

$$z_i^{(2)}(s, x) = \tfrac{1}{6} \sum_{j,k,r} \overline{M}_{i,(jkr)}(1, s - 1, x)\, H_j(s, x)\, H_k(s, x)\, H_r(s, x)\,,$$

potom pomocí (2.18) můžeme (5.12) přepsat do tvaru

$$z_i(t, s, x) = - \sum_j M_{i,j}(t - s) \left[z_j^{(1)}(s - 1, x) + z_j^{(2)}(s - 1, x)\right]. \tag{5.14}$$

Vzhledem k větě 5.3. existuje $0 < \alpha, \beta < \infty$ a s_1 tak, že pro $n = 0, 1$, všechna j, $x_i \in \langle 0, 1)$ platí

$$\inf_i \frac{H_i(s - 1, x)}{w_j(s - n, t, x)} \geqq \alpha \quad \text{pro} \quad t \geqq s \geqq s_1\,, \tag{5.15}$$

$$\sup_i \frac{H_i(s - 1, x)}{w_j(s - n, t, x)} \leqq \beta \quad \text{pro} \quad t \geqq s \geqq 1\,.$$

Použijeme-li nyní vztahů (5.14) a (5.15) a vezmeme-li v úvahu, že $-H_m(s - 1, x) = |H_m(s - 1, x)|$ a $\sup_m |H_m(s - 1, x)| = \sup_m |F_m(s - 1, x) - 1| \leqq \sup_m (1 - F_m(s - 1, \overline{0})) = \sup_m |1 - \overline{P_m^0}(s - 1)| \underset{s}{\rightarrow} 0$ (viz věta 5.1.) a že pro každé i jest $\sum_j M_{i,j}(t - s)\,.\,\sum_{kr} M_{j,(kr)}(1)$ číslo konečné, je možno dokázat, že existuje $s_2 \geqq s_1$ tak, že pro $s \geqq s_2$, $t \geqq s$, $x_i \in \langle 0, 1)$ a všechna i, j

$$\frac{z_i(t, s, x)}{w_j(s, t, x)\, w_j(s - 1, t, x)} \leqq L_i < 0\,. \tag{5.16}$$

Dosadíme-li (5.16) do (5.13) a položíme $s_0 = s$, potom pro $t > s_2$, $x_i \in \langle 0, 1)$ a všechna i platí

$$\frac{1}{H_i(t, x)} \leqq \sum_{s=s_2}^{t} \frac{z_i(t, s, x)}{w_i(s, t, x)\, w_i(s - 1, t, x)} \leqq L_i(t - s) < L_i t$$

a rovněž

$$H_i(t, x) > \frac{1}{L_i t}\,. \tag{5.17}$$

Podle věty 5.3., vztahu (3.4) a předpokladu této věty konverguje

$$\sum_{j,k,r} M_{i,j}(t)\, M_{j,(kr)}(1) \frac{H_k(s - 1, x)}{\sum_j M_{i,j}(s')\, H_j(s, x)} \cdot \frac{H_r(s - 1, x)}{\sum_j M_{i,j}(s' + 1)\, H_j(s - 1, x)} \xrightarrow[\substack{t \to \infty \\ s \to \infty}]{} \frac{B}{\mu_i}$$

stejnoměrně vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1)$, s' a i.

Z předešlého vyplývá, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje s_3 a t_1 tak, že pro $s \geqq s_3$ a $t \geqq$ $\geqq s + t_1$

$$(5.18)\qquad \left| \frac{\sum_j M_{i,j}(t-s)\, z_j^{(1)}(s-1,x)}{w_i(s,t,x)\, w_i(s-1,t,x)} - \frac{B}{2\mu_i} \right| < \varepsilon .$$

Pomocí (5.15), (5.18) a předpokladu této věty platí pro $t > t_1 + s$, $s > s_3$

$$(5.19)\qquad \left| \sum_{s=1}^{t} \frac{\sum_j M_{i,j}(t-s)\, z_j^{(1)}(s-1,x)}{w_i(s,t,x)\, w_i(s-1,t,x)} - \frac{Bt}{2\mu_i} \right| \leqq$$

$$\leqq \left(c_2 + \frac{B}{2\mu_i}\right)(s_3 + t_1) + \varepsilon(t - t_1 - s_3)$$

stejnoměrně vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1)$, pro všechna i, kde $c_2 < \infty$.

Z platnosti (5.15), předpokladu $\sup_j \sum_{klr} M_{j,(klr)}(1) < \infty$, věty 3.1. a (5.17) vyplývá, že pro $t > t_1 + s_3$ jest

$$(5.20)\qquad \left| \sum_{s=1}^{t} \frac{\sum_j M_{i,j}(t-s)\, z_j^{(2)}(s-1,x)}{w_i(s,t,x)\, w_i(s-1,t,x)} \right| \leqq c_3 \sum_{s=1}^{t} \sup_r |H_r(s-1,x)| \leqq$$

$$\leqq c_3(s_3 + t_1) + c_3 |L_2| \sum_{s=t_1+s_3}^{t} \frac{1}{s}$$

stejnoměrně vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1)$ a pro všechna i, kde c_3 je konečné.

Vezmeme-li v úvahu vlastnost d) z věty 3.2., potom k danému $\varepsilon > 0$ existuje t' tak, že pro $t > t'$

$$\left| \frac{\sum_j M_{i,j}(t)(1-x_j)}{\mu_i \sum_j v_j(1-x_j)} - 1 \right| \leqq \frac{\sum_j \sup_i |M_{i,j}(t) - \mu_i v_j|\,(1-x_j)}{\mu_i \sum_j v_j(1-x_j)} \leqq \frac{\varepsilon}{\mu_i} < \frac{\varepsilon}{a},$$

a tudíž

$$(5.21)\qquad \frac{\sum_j M_{i,j}(t)(1-x_j)}{\mu_i \sum_j v_j(1-x_j)} \xrightarrow[t]{} 1$$

pro všechna i a stejnoměrně pro $x_i \in \langle 0, 1)$.

Stejným způsobem se dokáže, že

$$(5.22)\qquad \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{Bt}{\mu_i}\sum_j M_{i,j}(t)(1-x_j)}{1 + \frac{1}{2}Bt \sum_j v_j(1-x_j)} \xrightarrow[t]{} 1$$

pro všechna i a stejnoměrně vzhledem k $x_i \in \langle 0, 1)$.

Pomocí vztahu (5.13) pro $s_0 = 1$, pomocí rovnosti $H_j(0, x) = x_j - 1$ a pomocí (5.14) vyjádříme následující nerovnost

$$\left| \frac{1}{H_i(t, x)} \cdot \frac{\mu_i \sum_j v_j(1 - x_j)}{1 + \frac{Bt}{2} \sum_j v_j(1 - x_j)} + 1 \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \frac{1 + \frac{Bt}{2\mu_i} \sum_j M_{i,j}(t)(1 - x_j)}{\sum_j M_{i,j}(t)(1 - x_j)} \cdot \frac{\mu_i \sum_j v_j(1 - x_j)}{1 + \frac{Bt}{2} \sum_j v_j(1 - x_j)} - 1 \right| +$$

$$+ \frac{2\mu_i}{Bt} \left| \sum_{s=1}^{t} \frac{\sum_j M_{i,j}(t - s)\, z_j^{(1)}(s - 1, x)}{w_i(s, t, x)\, w_i(s - 1, t, x)} - \frac{Bt}{2\mu_i} \right| +$$

$$+ \frac{2\mu_i}{Bt} \left| \sum_{s=1}^{t} \frac{\sum_j M_{i,j}(t - s)\, z_j^{(2)}(s - 1, x)}{w_i(s, t, x)\, w_i(s - 1, t, x)} \right| .$$

Z této nerovnosti se dokáže tvrzení věty 5.4 použitím (5.21), (5.22), (5.19), (5.20) a použitím limity

$$\frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \frac{1}{s} \xrightarrow[t]{} 0 .$$

Hlavní věta: *Nechť* 1) *maticový operátor M splňuje podmínku* $M_{i,j}(1) \leqq k\, M_{i',j}(1)$, *k číslo kladné, konečné, pro všechna* $i, i', j = 1, 2, 3, \ldots$; 2) *všechny sloupce maticového operátoru jsou nenulové*; 3) *maximální charakteristické číslo R maticového operátoru se rovná jedné*;

$$4) \quad \sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty , \quad \sup_i \sum_{j,k,r} M_{i,(jkr)}(1) < \infty ;$$

5) *pro všechna i, k jest* $\sum_j M_{i,(jk)}(1) \leqq c\, M_{i,k}(1)$, $c < \infty$; 6) *pro všechna k* $P_k^{\overline{0}}(t) \xrightarrow[t]{} 1$;

$$7) \quad \sum_j v_j = 1, \ \sum_j \mu_j v_j = 1.$$

Potom

a) *existují pro všechna i konečné limity*

$$\lim_{t \to \infty} t\, Q_i(t) = \frac{2\mu_i}{B} , \tag{5.23}$$

kde μ_i *jsou složky pravého vlastního vektoru maticového operátoru M a* $B = \sum_{i,j,k} M_{i,(jk)}(1)\, v_i \mu_j \mu_k$;

b) *pro simultánní podmíněnou distribuční funkci* $G_i(t, y_j, y|X(t) \neq 0)$ *náhodného vektoru* $(\eta_j, \bar{\eta})$, *kde* $\eta_j = (X_j(t))/t$ a $\bar{\eta} = (\sum_i X_i(t))/t$, *platí, že* $G_i(t, y_j, y \mid X(t) \neq \bar{0}) \underset{t}{\rightarrow}$ $\underset{t}{\rightarrow} G_i(y_j, y)$ *pro všechna i, přičemž rozložení s distribuční funkcí* $G_i(y_j, y)$ *je koncentrováno na přímce* $y_j = v_j y$; *pro podmíněnou distribuční funkci* $G_i(t, y \mid X(t) \neq \bar{0})$ *náhodné veličiny* $\bar{\eta}$ *platí* $G_i(t, y \mid X(t) \neq \bar{0}) \underset{t}{\rightarrow} G_i(y)$ *pro všechna i, kde* $G_i(y)$ *je distribuční funkce s hustotou* $(2/B)\, e^{-(2/B)y}$.

Důkaz. Dosazením do věty 5.4 za $X = \bar{0}$ a použitím vztahu (3.3) se dokáže tvrzení (5.23).

Budiž

$$\Phi_i^{(j)}(t, z_1, z_2) = \sum_{\alpha \in A} \exp\left(-z_1 \frac{\alpha_j}{t} - z_2 \frac{\bar{\alpha}}{t}\right) P_i^{\alpha}(t)\,, \quad \bar{\alpha} = \sum_i \alpha_i\,,$$

reálná Laplaceova transformace dvojrozměrné náhodné veličiny $(\eta_j, \bar{\eta})$. Označíme-li

$$(5.24) \quad X_i = \exp\left(-\frac{z_2}{t}\right), \quad i \neq j\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\,, \quad X_j = \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{t}\right)$$

potom

$$(5.25) \quad \Phi_i^{(j)}(t, z_1, z_2 \mid X(t) \neq \bar{0}) = \frac{\sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \bar{0}}} \exp\left(-z_1 \frac{\alpha_j}{t} - z_2 \frac{\bar{\alpha}}{t}\right) P_i^{\alpha}(t)}{1 - P_i^{\bar{0}}(t)} =$$

$$= \frac{\sum_{\alpha \in A} x^{\alpha} P_i^{\alpha}(t) - P_i^{\bar{0}}(t)}{1 - P_i^{\bar{0}}(t)} = 1 + \frac{H_i(t, x)}{1 - P_i^{\bar{0}}(t)} =$$

$$= 1 + \frac{H_i(t, x)\left(1 + \frac{Bt}{2} \sum_j v_j(1 - x_j)\right)}{\mu_i \sum_j v_j(1 - x_j)} \cdot \frac{\mu_i \sum_j v_j(1 - x_j)}{\left(1 + \frac{Bt}{2} \sum_j v_j(1 - x_j)\right)(1 - P_i^{\bar{0}}(t))}\,.$$

Z (5.24) je zřejmé, že

$$(5.26) \quad (1 - x_i)\, t \underset{t}{\rightarrow} +z_2\,, \quad i \neq j\,, \quad (1 - x_j)\, t \underset{t}{\rightarrow} +z_1 + z_2\,.$$

Použitím (5.26), (5.23) a (3.3) se dokáže, že

$$(5.27) \quad \frac{\mu_i \sum_k v_k(1 - x_k)}{\left(1 + \frac{Bt}{2} \sum_k v_k(1 - x_k)\right)(1 - P_i^{\bar{0}}(t))} \underset{t}{\rightarrow} \frac{+\frac{B}{2}(z_2 + v_j z_1)}{1 + \frac{B}{2}(z_2 + v_j z_1)}\,.$$

Z (5.25) použitím věty 5.4 a (5.27) plyne, že

$$\Phi_i^{(j)}(t, z_1, z_2 \mid x(t) \neq 0) \underset{t}{\rightarrow} \frac{1}{1 + \frac{B}{2}(z_2 + \nu_j z_1)},$$

$$\Phi_i^{(j)}(t, 0, z_2 \mid X(t) \neq 0) \underset{t}{\rightarrow} \frac{\frac{2}{B}}{\frac{2}{B} + z_2}.$$

6. PŘÍPAD $R > 1$

Zavedeme si nejprve potřebná označení:

$W(t) = R^{-t} X(t)$, $W'(t)$ je transponovaný vektor k vektoru $W(t)$,

$D(t) = R^{-t} M(t)$, $\bar{D} = R^{-1} M$, $D = \lim_{t\to\infty} D(t)$,

$V._{,(jk)}(t) = \{ \sum_{r,m} M_{i,(rm)}(1)\, D_{r,j}(t)\, D_{m,k}(t)\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,

$\bar{V}._{,(jk)} = \{ \sum_{r,m} M_{i,(rm)}(1)\, D_{r,j}\, D_{m,k}\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$\tilde{M}._{,(jk)}(t, s) = \{\sum_r M_{i,(jr)}(t)\, D_{r,k}(s)\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,

$\tilde{V}._{,(jk)}(t, s) = \{ \sum_{r,m} M_{i,(rm)}(1)\, D_{r,j}(t)\, D_{m,k}(t + s)\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,

$\{T_{i,s}\}_{i,s} = [R^2 E - M]^{-1}$, $i, s = 1, 2, 3, \ldots$; E jednotková matice,

$U._{,(jk)} = [R^2 E - M]^{-1}\, \bar{V}._{,(jk)} = \{\sum_s T_{i,s} \bar{V}_{s,(jk)}\}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,

$L_{\alpha,(jk)} = \{\sum_i \alpha_i U_{i,(jk)} + (\sum_i \alpha_i \bar{D}_{i,j})(\sum_i \alpha_i \bar{D}_{i,k}) - \sum_i \alpha_i \bar{D}_{i,j} \bar{D}_{ik}\}_{j,k}$,

$j, k = 1, 2, 3, \ldots$; $\alpha \in A$.

Věta 6.1. *Nechť maticový operátor M je striktně positivní a kompaktní. Budiž* $\sup \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty$.

Potom existuje $0 < r_1 < 1$ tak, že stejnoměrně vzhledem k s

$$R^{-2t} \tilde{M}._{,(jk)}(t, s) - U._{,(jk)} = O(r_1^t). \tag{6.1}$$

Důkaz. Použitím vztahů (2.13), (2.10) a (3.4) dokážeme, že

$$R^{-2t}\tilde{M}_{\cdot,(jk)}(t,s) - U_{\cdot,(jk)} = R^{-2t}\sum_{\tau=1}^{t} R^{t-\tau} D(t-\tau)\, R^{2\tau-2}\, \tilde{V}_{\cdot,(jk)}(\tau-1,s) -$$

$$- [R^2E - M]^{-1}\, \bar{V}_{\cdot,(jk)} = R^{-2}\sum_{\tau=0}^{t-1} R^{-\tau} D(\tau)\, \bar{V}_{\cdot,(jk)} +$$

$$+ R^{-2}\sum_{\tau=1}^{t} R^{-t+\tau} D(t-\tau)\,[\tilde{V}_{\cdot,(jk)}(\tau-1,s) - \bar{V}_{\cdot,(jk)}] - [R^2E - M]^{-1}\, \bar{V}_{\cdot,(jk)} =$$

$$= R^{-2}\sum_{\tau=1}^{t} R^{-t+\tau} D(t-\tau)\,[\tilde{V}_{\cdot,(jk)}(\tau-1,s) - \bar{V}_{\cdot,(jk)}] - R^{-2}\sum_{\tau=t}^{\infty} R^{-\tau} D(\tau)\, \bar{V}_{\cdot,(jk)} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{t} R^{-t+\tau}\, O(r^{\tau-1}) + O(R^{-t}) = O(r_1^t)\,.$$

Věta 6.2. *Nechť platí předpoklady věty* 6.1. *Potom existuje* $0 < r_2 < 1$ *tak, že stejnoměrně vzhledem k* s

$$E_\alpha(W(t)\, W'(t))\, D(s) - L_\alpha = O(r_2^t)\,. \tag{6.2}$$

Důkaz. Pomocí definice faktoriálních momentů, (2.9), (2.7), (6.1) a (3.4) vyjádříme

$$E_\alpha(\sum_r W_j(t)\, W_r(t)\, D_{r,k}(s)) - L_{\alpha,(jk)} = \sum_r R^{-2t} M_{\alpha,(jr)}(t)\, D_{r,k}(s) +$$

$$+ R^{-2t} M_{\alpha,j}(t)\, D_{j,k}(s) - L_{\alpha,(jk)} = R^{-2t}\sum_{i,r} \alpha_i\, M_{i,(jr)}(t)\, D_{r,k}(s) +$$

$$+ (\sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t))\,(\sum_i \alpha_i\, D_{i,k}(t+s)) - \sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t)\, D_{i,k}(t+s) +$$

$$+ R^{-t}\sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t)\, D_{j,k}(s) - L_{\alpha,(jk)} = \sum_i[\sum_r R^{-2t}\alpha_i\, M_{i,(jr)}(t)\, D_{r,k}(s) -$$

$$- \alpha_i\, U_{i,(jk)}] + (\sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t))\,(\sum_i \alpha_i\, D_{i,k}(t+s)) - (\sum_i \alpha_i \bar{D}_{ij})\,(\sum_i \alpha_i \bar{D}_{i,k}) -$$

$$- \sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t)\, D_{i,k}(t+s) + \sum_i \alpha_i \bar{D}_{i,j}\bar{D}_{i,k} + R^{-t}\sum_i \alpha_i\, D_{i,j}(t)\, D_{j,k}(s) =$$

$$= O(r_1^t) + O(r^t) + O(r^t) + O(R^{-t}) = O(r_2^t)\,.$$

Věta 6.3. *Nechť platí předpoklady věty* 6.1. *Potom existuje* $0 < r_3 < 1$ *tak, že stejnoměrně vzhledem k* s

$$E_\alpha[W(t+s) - W(t)]\,[W'(t+s) - W'(t)] = O(r_3^t)\,. \tag{6.3}$$

Důkaz. Dokážeme nejprve, že

$$E_\alpha(X(t)\, X'(t+s)) = E_\alpha(X(t)\, X'(t))\, M(s)\,. \tag{6.4}$$

Je zřejmé, že

$$E_\alpha(X_i(t)\,X_j(t+s)) = \sum_{\alpha,\gamma\in A} \beta_i\gamma_j\,P^\beta_\alpha(t)\,P^\gamma_\beta(s) =$$
$$= \sum_{\beta\in A} \beta_i\,P^\beta_\alpha(t)\,M_{\beta,j}(s) = \sum_r E_\alpha(X_i(t)\,X_r(t))\,M_{r,j}(s)\,.$$

Tím je (6.4) dokázáno. Jelikož

$$E_\alpha((W(t+s) - W(t))\,(W'(t+s) - W'(t))) = E_\alpha(W(t+s)\,W'(t+s)) -$$
$$- L_\alpha + E_\alpha(W(t)\,W'(t)) - L_\alpha - E_\alpha(W(t)\,W'(t+s)) + L_\alpha -$$
$$- E_\alpha(W(t+s)\,W'(t)) + L_\alpha\,,$$

vyplývá z (6.4) a (6.2) tvrzení věty 6.3.

Hlavní věta: *Nechť maticový operátor M je striktně positivní a kompaktní. Nechť* $\sup_i \sum_{j,k} M_{i,(jk)}(1) < \infty$.

Potom náhodné veličiny $W_j(t)$ konvergují s pravděpodobností jedna a podle kvadratického středu k náhodným veličinám W_j přičemž

(6.5) $$E_\alpha(W_j) = \nu_j \sum_i \alpha_i\mu_i$$

(6.6) $$E_\alpha(W_jW_k) = S(\alpha)\,\nu_j\nu_k$$

kde

$$S(\alpha) = \sum_{i,s,r,m} \alpha_i T_{i,s} M_{s,(rm)}(1)\,\mu_r\mu_m + \Big(\sum_i \alpha_i\mu_i\Big)^2 - \sum_i \alpha_i\mu_i^2\,.$$

S pravděpodobností jedna za předpokladu $W_k \neq 0$ platí

(6.7) $$\frac{W_j}{W_k} = \frac{\nu_j}{\nu_k}\,.$$

Označíme-li $\Phi_\alpha(z) = E_\alpha e^{-zW}$, kde náhodná proměnná $\overline{W} = \sum_j W_j$ potom platí

(6.8)
$$E_i(\overline{W}) = \mu_i\,,$$
$$E_i(\overline{W}^2) = \sum_{s,r,m} T_{i,s}\,M_{s,(rm)}(1)\,\mu_r\mu_m\,,$$
$$\Phi_\alpha(Rz) = F_\alpha(1, \Phi(z))\,.$$

Důkaz. Konvergence $W_j(t) \to W_j$ s pravděpodobností jedna a podle kvadratického středu vyplývá z věty 6.3.

Platí

$$E_\alpha(W_j) = \lim_t E_\alpha(W_j(t)) = \sum_i \alpha_i\bar{D}_{i,j} = \nu_j \sum_i \alpha_i\mu_i\,;$$

$$E_\alpha(W_jW_k) = \lim_t \left[R^{-2t} \sum_i \alpha_i \sum_{\tau=1}^{t} \sum_s M_{i,s}(t-\tau) \sum_{r,m} M_{s,(rm)}(1)\, M_{r,j}(\tau-1)\,.\right.$$

$$. M_{m,k}(\tau - 1) + R^{-2t}\left(\sum_i \alpha_i M_{i,j}(t)\right)\left(\sum_i \alpha_i M_{i,k}(t)\right) -$$

$$\left. - R^{-2t} \sum_i \alpha_i M_{i,j}(t)\, M_{i,k}(t)\right] = S(\alpha)\, v_j v_k\,.$$

Tvrzení (6.7) se dokáže pomocí (6.6) následovně

$$E_\alpha(v_j W_k - v_k W_j)^2 = v_j^2\, E_\alpha(W_k^2) + v_k^2\, E_\alpha(W_j^2) - 2 v_j v_k\, E_\alpha(W_j W_k) =$$

$$= S(\alpha)\left(v_j^2 v_k^2 + v_k^2 v_j^2 - 2 v_j^2 v_k^2\right) = 0\,.$$

Pomocí (6.5), (6.6) a (3.3) jest

$$E_i(\overline{W}) = \sum_j E_i(W_j) = \sum_j \mu_i v_j = \mu_i\,;$$

$$E_i(\overline{W}^2) = \sum_{j,k} E_i(W_j W_k) = \sum_{j,k} S(e_i)\, v_j v_k = S(e_i)\,.$$

Nyní

$$\Phi_\alpha(t, z) = \sum_{\beta \in A} \exp\left(-zR^{-t}\overline{\beta}\right) P_\alpha^\beta(t) = F_\alpha\left(t; e^{-zR^{-t}}, e^{-zR^{-t}}, \ldots\right),$$

a tedy

$$\Phi_\alpha(z) = \lim_t F_\alpha\left(t; e^{-zR^{-t}}, e^{-zR^{-t}}, \ldots\right). \tag{6.9}$$

Podle (6.9) a (1.5) jest

$$\Phi_\alpha(Rz) = \lim_t F_\alpha\left(t+1; e^{-Rz/R^{t+1}}, e^{-Rz/R^{t+1}}, \ldots\right) =$$

$$= \lim_t F_\alpha\left(1; F\left(t; e^{-zR^{-t}}, \ldots\right)\right) = F_\alpha\left(1; \Phi(z)\right).$$

Literatura

[1] *В. А. Севастьянов:* Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, Том *6* (1951), 47—99.

[2] *T. E. Harris:* Some mathematical models for branching processes. Proceedings of the second Berkeley symposium on math. stat. and prob., (1951), 305–339.

[3] *T. E. Harris:* The theory of branching processes. Berlin, Springer 1963.

[4] *M. Jiřina:* Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов. Чехословацкий матем. журнал, том *7* (1957), 130—151.

[5] *M. Jiřina:* Stochastic branching processes with continuous state space. Czech. journ. of math., Vol *8* (1958), 292–313.

[6] *M. Jiřina:* Branching processes with measure-valued states. Transaction of the Third Prague Conference on Informatic Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Praha 1964, 333–357.

[7] *В. П. Чистяков:* Две предельные теоремы для ветвящихся процессех с н типами частиц, Теория. и ее примен., том *6*, (1961), 31—45.

[8] *S. Karlin:* Positive operators. Journal of the math. and mechan., Vol. *8* (1959), 907—937.
[9] *N. Dunford, T. J. Schwartz:* Linear operators. New York 1958.
[10] *M. M. Дэй:* Нормированные линейные пространства. Москва 1961.

Adresa autora: Vysoká škola chemickotechnologická, Pardubice.

Summary

BRANCHING PROCESSES WITH A DENUMERABLE SET OF TYPES OF PARTICLES

STANISLAV KOLDA, Pardubice

In the present paper the classical case of a branching process with a finite number of types of particles is generalized to a branching process with a denumerable number of types of particles. The investigation of the generalized branching process is carried out by using the method of generating functions.

For asymptotic properties of the branching process of a denumerable set of types of particles the minimal positive real characteristic number of a linear operator, expressed by means of an infinite matrix of first factorial moments, is decisive.

On this matrix operator such assumptions are made in propositions 3.1 and 3.2 that the operator satisfies the demands required in the study of asymptotic properties.

In the main propositions of the last three chapters it is shown, for a denumerable number of types of particles, under what conditions and to what extent, the asymptotic properties of the finite case of branching processes are preserved.