Josef Kateřiňák

Poznámka k systémům zobrazení absolutních prostorů S_n do S_{n-k}

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 143--145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117661

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

POZNÁMKA K SYSTÉMŮM ZOBRAZENÍ ABSOLUTNÍCH PROSTORŮ $\mathbf{S}_n$ DO $\mathbf{S}_{n-k}$

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina

(Došlo dne 11. března 1968)

Systémy zobrazení z [2] zobecníme pro n-rozměrné prostory $\mathbf{S}_n$ splňující axiomy S1 – S9 a S11 – S16 z [2], (resp. z [1]), pro které nepředpokládáme platnost Dedekindova axiomu S10, takže nelze vzdálenosti a kóty bodů z [2] definovat jako reálná čísla, ale musíme je definovat jinak.

Pro $X, Y \in \mathbf{S}_n$ definujme *vzdálenost bodů* X, Y jako podmnožinu $(\overline{X, Y}) \subset \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_n$ takto:

a) Je-li $X = Y$, pak $(U, V) \in (\overline{X, Y}) \Leftrightarrow U, V \in \mathbf{S}_n$ a $U = V$.
b) Je-li $X \neq Y$, pak $(U, V) \in (\overline{Y, X}) \Leftrightarrow (U, V, X, Y) \in \sigma$.

Množinu všech vzdáleností $(\overline{X, Y})$ budeme označovat $\mathcal{R}$.

Množinu, jejíž prvky jsou právě nulová vzdálenost $(\overline{X, X})$ a všechny dvojice $+(\overline{X, Y})$ resp. $-(\overline{X, Y})$ složené ze znaku $+$ resp. $-$ a vzdálenosti $(\overline{X, Y})$ pro $X \neq Y$, budeme označovat $\pm\mathcal{R}$.

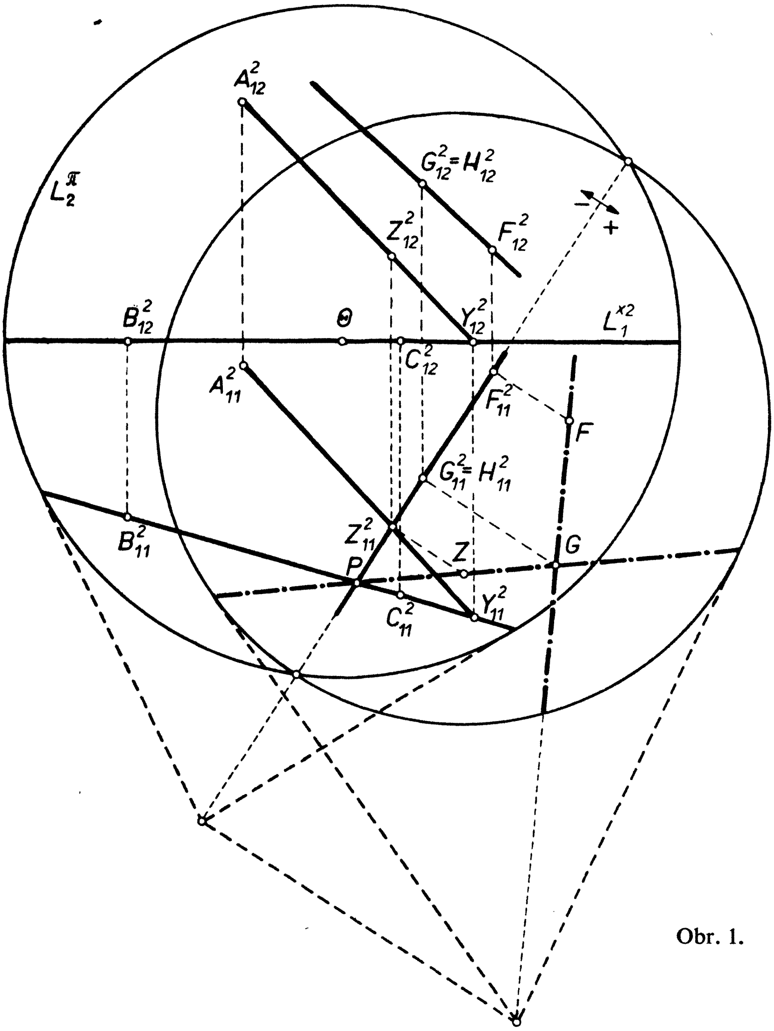
Buď dán podprostor $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$. Označme $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1}$ opačné poloprostory v $\mathbf{S}_n$ vzhledem k $\mathbf{S}_{n-1}$, f_1 pravoúhlé promítání $\mathbf{S}_n$ do $\mathbf{S}_{n-1}$, $f_1(X) = X_1$ pro $X \in \mathbf{S}_n$. *Kótováním* t prostoru $\mathbf{S}_n$ vzhledem k podprostoru $\mathbf{S}_{n-1}$ rozumíme zobrazení, které každému bodu $X \in \mathbf{S}_n$ přiřazuje prvek $t(X) \in \pm\mathcal{R}$ nazvaný *kóta bodu* X takto:

a) Je-li $X \in \mathbf{S}_{n-1}$, pak $t(X) = (\overline{X, X}) = (\overline{X, X_1})$, a symbolicky pak píšeme $t(X) = 0$.
b) Je-li $X \in \mathbf{M}_1$ resp. $X \in \mathbf{M}_2$, pak $t(X) = +(\overline{X, X_1})$ resp. $t(X) = -(\overline{X, X_1})$, a symbolicky pak píšeme $t(X) > 0$ resp. $t(X) < 0$.

Grafický vyjadřovací jazyk pro prostor $\mathbf{S}_n$ zavedeme úmluvami 1a)–d) z [2] a další úmluvou 1e):

Úmluva 1e). Grafické vyjadřování pro rovinu $\mathbf{S}_2^\pi \subset \mathbf{S}_n$ budeme provádět tak, že prostor $\mathbf{S}_n$ budeme považovat za Lobačevského prostor $\mathbf{L}_n$, tj. v každém obrázku budeme místo $\mathbf{S}$ psát $\mathbf{L}$, a podle potřeby budeme grafické vyjadřování doplňovat slovním vyjádřením.

Poznámka. Grafické vyjadřování pro rovinu $\boldsymbol{S}_2^{\pi} \subset \boldsymbol{S}_n$ lze též provádět tak, že prostor $\boldsymbol{S}_n$ považujeme za Euklidův prostor $\boldsymbol{E}_n$, tj. v každém obrázku místo $\boldsymbol{S}$ píšeme $\boldsymbol{E}$, a podle potřeby grafické vyjadřování doplníme slovním vyjadřením. Avšak pro naše účely je výhodnější způsob z úmluvy 1e), protože nám současně umožňuje pomocí



Obr. 1.

Beltrami-Kleinova modelu $\boldsymbol{L}_n \subset \boldsymbol{E}_n$ sledovat rozdíly grafického vyjadřování těmito dvěma způsoby a tím i rozdíly platnosti vět pro $\boldsymbol{L}_n$ a $\boldsymbol{E}_n$. Volba různých způsobů grafického vyjadřování pro prostor $\boldsymbol{S}_n$ má ovšem vliv na přesnost, stručnost a přehlednost vyjadřování (neboť nahrazuje slovní vyjadřování), ale nemá vliv na důsledné axiomatické studium geometrie prostoru $\boldsymbol{S}_n$, chápané jako souhrn definic a vět odvozených z axiomů S1 – S9 a S11 – S16.

Při užívání (H^k) systémů zobrazení S_n do S^{π}_{n-k} pro $n - k = 2$ vycházíme z úmluv 2a) – c) z [2], kde v úmluvě 2c) předpokládáme znalost konstrukcí odvozených z axiomů S1 – S9 a S11 – S16 pro roviny $S_2 \subset S_n$.

Příklad. Při zvoleném (H^2) systému zobrazení S_4 do S^{π}_2 je dána $S_2 = ABC \subset S_4$ a bod $F \in S_4 - S_2$ nebo $G \in S_2$ (dány hlavní obrazy bodů A, B, C a F nebo G). Určete: a) $S'_1 = FG \subset S_4$ tak, že $FG \perp S_2$ a $G \in S_2$; b) $S''_2 = FGH \subset S_4$ tak, že platí $GX \subset \subset S_4$ a $GX \perp S_2 \Leftrightarrow GX \subset S''_2$.

Poznamenáváme, že z axiomů S1 – S9 a S11 – S16 plyne věta (důkaz tvrzení a) viz [1], věta (20), str. 22 – 24; důkaz tvrzení b) přenecháváme čtenáři):

(20) a) Je-li $S_k \subset S_n$ a $F \in S_n - S_k$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, potom existuje právě jedna $S'_1 \subset S_n$, tak, že $F \in S'_1 \perp S_k$.

b) Je-li $G \in S_k \subset S_n$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, potom existuje $S''_{n-k} \subset S_n$ tak, že platí: $GX \subset S_n$ a $GX \perp S_k \Leftrightarrow GX \subset S''_{n-k}$.

Řešení. Zvolme systém $(H^2) = (I, II)$, obr. 1. Řešení při systému (I, II) převedeme na řešení při systému (I, I) a vrátíme se pak zpět k systému (I, II).

Protože v našem případě $S_2 \cap S^{\pi}_2 = BC$ a $S_2 \subset S^{\pi}_3 \subset S_4$ a $F \in S^{\pi}_3$, určíme užitím výše uvedené věty (20) a vět (5) a (9) z [2] $FG \subset S^{\pi}_3$ tak, že $FG \perp S_2$, a dále určíme $GH \subset S_4$ tak, že $GH \perp S^{\pi}_3$ (zvolíme kótu $t^1_H \neq t^1_G$).

Literatura

[1] *Kateřiňák J.:* Axiomatická metoda v n-rozměrné geometrii Lobačevského. Sborník prací Vysoké školy dopravní a Výzkumného ústavu dopravního, rok 1967, číslo 5, str. 17—29. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha 1967.

[2] *Kateřiňák J.:* O systémech zobrazení absolutních prostorů S_n do S_{n-k}. Časopis pro pěstování matematiky, *94* (1969), čís. 2, str. 129—142, Praha.

Adresa autora: Žilina, Marxe-Engelse 25 (Vysoká škola dopravní).

Summary

REMARK TO THE SYSTEMS OF MAPPINGS OF ABSOLUTE SPACES S_n INTO S_{n-k}

Josef Kateřiňák, Žilina

In this remark the systems of mappings of absolute spaces S_n into S_{n-k} are generalized for the spaces S_n, without supposing the validity of the Dedekind axiom.