RECENSE

K recensi knihy *H. L. Dorwarta* „THE GEOMETRY OF INCIDENCE", tento časopis, ročník *93* (1968), str. 242—243.

Byl jsem upozorněn prof. A. KOTZIGEM, že definice perfektní diferenční množiny, kterou jsem ve své recensi citoval přesně podle Dorwartovy formulace, vede ke sporu s některými Kotzigovými výsledky. Uvádím proto jinou (běžnou) definici perfektní diferenční množiny, kupř. podle *T. G. Ostroma* (Canad. J. M. *5* (1953), str. 421): Množina celých čísel $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nazývá se perfektní diferenční množinou modulo $N = n^2 + n + 1$, když množina diferencí $\{a_i - a_j \mid i, j = 0, 1, \ldots, n;\ i \neq j\}$ obsahuje každý nenulový zbytek modulo N právě jednou. Obecnější pojetí perfektní diferenční množiny možno nalézt kupř. u *H. J. Rysera* (Combinatorial Mathematics, N. York 1963, kap. 9), zobecnění vázané na jakékoliv konečné grupy viz u *R. H. Brucka* (Trans. Amer. Math. Soc. *78* (1955), 464—481) anebo v nové monografii *P. Dembowského* „Finite Geometries", Berlin—Heidelberg—New York 1968, str. 87.

Václav Havel, Brno

András Ádám, TRUTH FUNCTIONS AND THE PROBLEM OF THEIR REALIZATION BY TWO-TERMINAL GRAPHS. (Pravdivostní funkce a problém jejich realisace grafy o dvou krajních bodech.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 206 stran.

Pravdivostní (též Booleovou) funkcí n proměnných rozumíme funkci n proměnných nabývající jen hodnot 0 a 1, jejíž proměnné nabývají také jen hodnot 0 a 1. Příkladem pravdivostní funkce jedné proměnné je negace, příklady pravdivostních funkcí dvou proměnných jsou konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence, známé z logiky. Konjunkce utvořená z některých proměnných tak, že každá z těchto proměnných v ní vystupuje právě jednou a to buď bez negace nebo s negací, se nazývá elementární konjunkce; je-li takto utvořena ze všech proměnných, nazývá se úplná elementární konjunkce. Každou pravdivostní funkci lze vyjádřit jako disjunkci navzájem různých elementárních konjunkcí; tento tvar pravdivostní funkce nazýváme jejím disjunktivním normálním tvarem; jsou-li zde všechny elementární konjunkce úplné, nazýváme tento disjunktivní normální tvar úplným. Označme D_n definiční obor pravdivostní funkce f o n proměnných. Ke každé posloupnosti $a_1 a_2 \ldots a_n \in D_n$ utvořené z nul a z jedniček přiřaďme úplnou elementární konjunkci tak, že libovolná proměnná x_i zde bude vystupovat bez negace, právě když $a_i = 1$. Pak bude úplná elementární konjunkce $\mathfrak{A}$ vystupovat v úplném disjunktivním normálním tvaru pravdivostní funkce f, právě když pro odpovídající posloupnost $a_1 a_2 \ldots a_n$ bude platit $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Klademe pak pro zjednodušení $f(\mathfrak{A}) = 1$. Disjunktivní normální tvar se nazývá iredundantní, jestliže jej nelze zjednodušit vynecháním některé zde vystupující konjunkce ani nahrazením některé konjunkce její vlastní subkonjunkcí. Konjunktivní normální tvar pravdivostní funkce je definován duálně k disjunktivnímu normálnímu tvaru.

Buď f pravdivostní funkce n proměnných, $\mathfrak{A}$ elementární konjunkce utvořená z některých z těchto proměnných. Jestliže f nabývá hodnoty 1 na každé úplné elementární konjunkci, jíž je $\mathfrak{A}$ subkonjunkcí, pak $\mathfrak{A}$ nazýváme implikantou funkce f. Implikanta, která není vlastní subkonjunkcí pro žádnou implikantu, se nazývá prvoimplikanta. Duálně se zavedou pojmy implikatum a prvoimplikatum. Pravdivostní funkce f závisí efektivně (závisí isotonně; závisí antitonně) na proměnné x_i, jestliže při libovolné pevné hodnotě ostatních proměnných nabude obou hodnot 0,1 nabude-li x_i hodnot 0,1 (nabude hodnoty 0, právě když x_i nabude hodnoty 0; nabude hodnoty 1, právě když x_i nabude hodnoty 0). Pravdivostní funkce se nazývá isotonní (antitonní), závisí-li isotonně (antitonně) na všech svých proměnných. Závisí-li na některých proměnných isotonně a na zbývajících antitonně, nazývá se monotonní.

To je obsah první kapitoly Ádámovy knihy o pravdivostních funkcích a jejích representacích; v této kapitole jsou základní pojmy a věty této teorie. Druhá kapitola je věnována podrobnějšímu studiu prvoimplikant. Ukazuje se, že každá pravdivostní funkce se dá napsat jako disjunkce všech svých prvoimplikant. Je-li pravdivostní funkce vyjádřena v disjunktivním normálním tvaru, pak každá z elementárních konjunkcí této disjunkce obsahuje některou prvoimplikantu jako subkonjunkci. Je-li daná funkce monotonní, je také naopak každá její prvoimplikanta obsažena jako subkonjunkce v některé konjunkci jejího disjunktivního normálního tvaru. Dále jsou zde popisovány některé algoritmy sloužící k nalezení prvoimplikant. Utvoříme-li disjunkci některých (ne však nutně všech) prvoimplikant funkce f, pak se může stát, že tato disjunkce vyjadřuje f. Přiřaďme jednojednoznačně ke každé prvoimplikantě $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ novou proměnnou y_i a definujme pravdivostní funkci $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ tak, že $g(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, právě když posloupnost $i_1 i_2 \ldots i_l$ všech indexů, pro něž $a_{i_j} = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, má tu vlastnost, že $\mathfrak{A}_{i_1} \vee \mathfrak{A}_{i_2} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{i_l}$ vyjadřuje f. Tato funkce g je isotonní a $\mathfrak{A}_{i_1} \vee \mathfrak{A}_{i_2} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{i_l}$ je iredundantní disjunktivní normální tvar funkce f, právě když $y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge \ldots \wedge y_{i_l}$ je prvoimplikanta funkce g. Autor zejména studuje pravdivostní funkci f, která vznikne tak, že do pravdivostní funkce f^* se za její proměnné dosadí pravdivostní funkce tak, že proměnné dvou různých z těchto funkcí jsou různé. Funkce vyjádřené v tomto tvaru autor nazývá funkce vyjádřené superposicemi bez opakování. Máme-li takto vyjádřenou funkci a jsou-li všechny vnitřní složky kromě jedné rovny identitám, pak se vyjádření funkce nazývá jednoduchým vyjádřením superposicemi bez opakování. Podmnožina Θ množiny všech proměnných pravdivostní funkce f se nazývá separabilní pro f, jestliže existuje jednoduché vyjádření této funkce superposicemi bez opakování tak, že proměnné neidentické vnitřní složky tvoří právě množinu Θ. Dokazuje se pak věta o souvislosti prvoimplikant funkce v jednoduchém vyjádření superposicemi bez opakování s prvoimplikantami její vnitřní a vnější složky. Zejména se pak popisují prvoimplikanty symetrických funkcí.

V třetí kapitole se studují vztahy mezi konjunktivními a disjunktivními normálními tvary pravdivostních funkcí. Zejména se dokazuje, že elementární konjunkce je prvoimplikantou funkce f, právě když její negace je prvoimplikatem negace funkce f. Dále se popisuje konstrukce, jak lze od konjunktivního normálního tvaru funkce f dospět k jejímu vyjádření ve tvaru disjunkce všech jejích prvoimplikant. Zejména se zde popisuje jistý algoritmus, který umožňuje tuto konstrukci provádět úsporně.

Systém F pravdivostních funkcí se nazývá funkcionálně úplný, jestliže se každá pravdivostní funkce dá získat superposicemi funkcí systému F. Obsahem další kapitoly je odvození podmínek nutných a dostatečných k tomu, aby systém pravdivostních funkcí byl funkcionálně úplný. Říkáme, že pravdivostní funkce n proměnných f zachovává nulu (jedničku), platí-li $f(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n\text{-krát}}) = 0$ $(f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n\text{-krát}}) = 1)$. Funkce $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ se nazývá duální k funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (pruhy značí negaci). Funkce se pak nazývá samoduální, je-li rovna své duální funkci. Pravdivostní funkce se nazývá lineární, jestliže funkce vzniklá z ní vynecháním nepodstatných proměnných je symetrická a má hodnotu 1, právě když sudý (lichý) počet proměnných nabývá hodnoty 1. Pak lze větu o funkcionální úplnosti systému pravdivostních funkcí vyslovit takto: Systém funkcí je funkcionálně úplný, právě když obsahuje aspoň jednu neisotonní funkci, aspoň jednu, která nezachovává nulu, aspoň jednu, která nezachovává jedničku, aspoň jednu, která není samoduální, a aspoň jednu, která není lineární. Tato problematika se pak studuje v poněkud obecnější situaci: Automatem se rozumí dvojice, kde na prvním místě je pravdivostní funkce a na druhém nezáporné celé číslo (časové zpoždění). Superposice automatů je pak definována za předpokladu, že automaty vystupující jako vnitřní složky, mají všechny totéž časové zpoždění. Tato superposice je pak definována jako dvojice, jejíž první člen je pravdivostní funkce vzniklá tím, že do pravdivostní funkce vnější složky se za příslušné proměnné dosadí pravdivostní funkce vnitřních složek, a jejíž časové zpoždění vznikne tak, že se k časovému zpoždění vnější složky připočte společná hodnota časového zpoždění všech vnitřních složek. Udávají se pak podmínky nutné a dostatečné k tomu, aby daný systém automatů byl úplný v tom slova smyslu, že každý automat lze získat superposicemi z automatů daného systému (PD-úplnost); tyto podmínky spočívají v tom, že jisté třídy automatů jsou neprázdné. Dále se odhaduje minimální počet p automatů takového úplného systému: platí $2 \leqq p \leqq 5$. Pojem úplnosti systému automatů lze definovat ještě jiným způsobem: systém je úplný, jestliže ke každé pravdivostní funkci existuje automat, jehož je funkce první složkou tak, že jej lze sestrojit superposicemi z automatů daného systému (FD-úplnost). Také pro FD-úplnost platí podobné věty jako pro PD-úplnost.

V páté kapitole se studují pravdivostní funkce vyjádřené iterovanými superposicemi bez opakování. Nechť všechny symboly funkcí v tomto vyjádření vystupující znamenají funkce ireducibilní, tj. takové, jejichž množiny proměnných jsou prosty netriviálních separabilních podmnožin. Máme-li dvě vyjádření pravdivostních funkcí, která vyhovují těmto předpokladům, pak vyjadřují touž funkci, právě když jedno vyjádření lze převést v druhé jistými elementárními transformacemi, které jsou zde podrobně popsány.

Šestá kapitola je věnována studiu jistých grup permutací množiny D_n a jistých grup permutací množiny všech pravdivostních funkcí n proměnných. Tyto grupy jsou definovány takto: Buď dána libovolná podmnožina α množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Označíme ν_α permutaci množiny D_n, která k posloupnosti $a_1 a_2 \ldots a_n \in D_n$ složené z nul a z jedniček přiřazuje posloupnost $b_1 b_2 \ldots b_n$ tak, že $a_i = b_i$, právě když $i \notin \alpha$. Permutace ν_α příslušné ke všem $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tvoří grupu $\mathfrak{N}_n$. Buď π libovolná permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pak k libovolné posloupnosti $a_1 a_2 \ldots a_n \in D_n$ přiřadíme posloupnost $b_1 b_2 \ldots b_n \in D_n$ tak, že $a_i = b_{\pi(i)}$ pro všechna i; tuto permutaci množiny D_n označíme σ_π. Permutace σ_π utvořené pro všechna π tvoří grupu $\mathfrak{S}_n$. Položme $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{N}_n \,.\, \mathfrak{S}_n$. Pak řády grup $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{G}_n$ jsou po řadě 2^n, $n!$, $n!\, 2^n$. Je-li μ libovolná permutace množiny D_n a f funkce definovaná na D_n, je $f\mu$ také funkce definovaná na D_n; přiřadíme-li k pravdivostní funkci f funkci $f\mu$ je tím definována permutace množiny všech funkcí definovaných na D_n. Proběhne-li μ množinu $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{G}_n$, proběhnou odpovídající permutace množiny všech pravdivostních funkcí grupy, které autor po řadě označuje $\mathfrak{N}_n^*$, $\mathfrak{S}_n^*$, $\mathfrak{G}_n^*$. Dvě pravdivostní funkce se nazývají ekvivalentní vzhledem k nějaké grupě $\mathfrak{H}^*$ permutací množiny všech pravdivostních funkcí, jestliže v $\mathfrak{H}^*$ existuje permutace, která první z nich převádí v druhou. Autor udává metodu k určení počtu tříd ekvivalencí vzhledem k $\mathfrak{N}_n^*$, $\mathfrak{S}_n^*$, $\mathfrak{G}_n^*$.

Další kapitola je věnována tzv. lineárně separabilním pravdivostním funkcím. Buď $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pravdivostní funkce, $\mathfrak{n}(x_1), \mathfrak{n}(x_2), \ldots, \mathfrak{n}(x_n)$, T libovolná čísla. Pro úplnou elementární konjunkci $\mathfrak{A}$ položme $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}) = \sum_i \mathfrak{n}(x_i)$, kde sčítání se provádí přes ty indexy i, pro něž x_i vystupuje v $\mathfrak{A}$ bez negace. Nechť pro úplnou elementární konjunkci $\mathfrak{A}$ platí $f(\mathfrak{A}) = 1$, právě když $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}) \leqq T$. Pak řekneme, že funkce f je lineárně separabilní, systém čísel $\mathfrak{n}(x_1), \mathfrak{n}(x_2), \ldots$ $\ldots, \mathfrak{n}(x_n)$, T nazýváme separujícím systémem pro f. Je-li f lineárně separabilní funkce, pak závisí monotonně na každé proměnné. Je-li $\mathfrak{n}(x_i) \geqq 0$ ($\mathfrak{n}(x_i) \leqq 0$) v nějakém separujícím systému pro f, je závislost f na x_i isotonní (antitonní). Závisí-li f na x_i isotonně (antitonně) a efektivně, je při každém separujícím systému pro f platná nerovnost $\mathfrak{n}(x_i) > 0$ ($\mathfrak{n}(x_i) < 0$). Je-li dán separující systém pro funkci f, pak lze udat explicitní vzorce separujícího systému její negace a funkce, která vznikne z f tím, že jednu proměnnou nahradíme její negací. Ke každé isotonní funkci f lze přiřadit jistý systém nerovností; jeho řešitelnost nezápornými čísly je ekvivalentní s lineární separabilitou funkce f; tato řešení pak dávají všechny separující systémy pro f. Podobně lze ke každé isotonní pravdivostní funkci f přiřadit systém lineárních rovnic tak, že f není lineárně separabilní, právě když tento systém je řešitelný nezápornými čísly.

V osmé kapitole se grafem rozumí množina uzlů a hran spolu s relací incidence, která je podrobena jedinému axiomu: Každá hrana je incidentní přesně s jedním nebo s dvěma uzly. Připouští se tedy, aby dva uzly byly spojeny více nežli jednou hranou, aby existovaly isolované uzly, smyčky a pod. Konečný graf bez smyček se nazývá graf o dvou krajních bodech (2-graf), jsou-li mezi jeho uzly vyznačeny počáteční uzel a od něho různý koncový uzel. Pro 2-grafy se zavádějí různé druhy souvislosti. Dále lze pro dva disjunktní 2-grafy definovat jejich paralelní a sériový součet: paralelní součet vznikne tak, že identifikujeme počáteční uzel prvního s počátečním uzlem druhého 2-grafu a prohlásíme jej za počáteční uzel součtu a podobně identifikujeme koncový uzel prvního s koncovým uzlem druhého 2-grafu a prohlásíme jej za koncový uzel součtu. Sériový součet dvou disjunktních 2-grafů definujeme tak, že koncový uzel prvního grafu identifikujeme s počátečním uzlem druhého a za počáteční uzel součtu prohlásíme počáteční uzel prvního 2-grafu, za koncový uzel součtu pak prohlásíme koncový uzel druhého 2-grafu. Tyto definice lze přirozeně rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců. Libovolný 2-graf, který je rozložitelný v paralelní součet 2-grafů netriviálním způsobem, je nerozložitelný v sériový součet. Vyjdeme-li od libovolného 2-grafu, může se stát, že je rozložitelný v paralelní resp. sériový součet netriviálním způsobem tak, že každý ze sčítanců je nerozložitelný v paralelní resp. sériový součet. Rozložíme tedy každý ze sčítanců v sériový resp. v paralelní součet s nerozložitelnými sčítanci v paralelní resp. v sériový součet, pokud je to možné. V této konstrukci pokračujeme indukcí a po konečném počtu kroků dostaneme 2-grafy, které nelze netriviálním způsobem rozložit ani v paralelní ani v sériový součet; to jsou tzv. konstituenty daného 2-grafu. Každý netriviální nerozložitelný 2-graf obsahuje dvě cesty spojující počáteční uzel s koncovým, které nemají společných hran a kromě těchto krajních uzlů ani společných uzlů. Libovolný 2-graf obsahuje netriviální nerozložitelnou konstituentu, právě když obsahuje konfiguraci cest tvořící tzv. Wheatstonův most. Pro podgraf 2-grafu definujeme krajní body tak, že jimi jsou krajní body daného 2-grafu, pokud do podgrafu náleží, a všechny uzly podgrafu, z nichž v daném grafu vychází hrana, jež nenáleží k podgrafu. Podgrafy 2-grafu s dvěma krajními body se nazývají 2-podgrafy. V nerozložitelném 2-grafu mají dva různé maximální 2-podgrafy disjunktní hrany; můžeme tedy každý takový 2-podgraf nahradit hranou. Tím vznikne jednodušší graf (tzv. vnější graf), z něhož dostaneme původní 2-graf, nahradíme-li jeho hrany vhodnými 2-grafy (tzv. vnitřními grafy). Vnější graf, vnitřní grafy a předpis, jak je máme do vnějšího dosazovat, tvoří tzv. kanonický rozklad 2-grafu. Jestliže lze takový rozklad provést jen triviálním způsobem, pak daný 2-graf nazýváme ireducibilním. Jsou udány podmínky nutné a dostatečné k tomu, aby dvě hrany 2-grafu ležely na téže jeho cestě spojující jeho krajní body.

Devátá kapitola je věnována realisaci pravdivostních funkcí grafy o dvou krajních bodech. Diskutuje se zde o různých druzích realisací, avšak podrobně je studována realisace pojmenovanými 2-grafy, které vzniknou tak, že k libovolné hraně 2-grafu se přiřadí libovolná proměnná bez negace nebo s negací. Takovému grafu odpovídá pravdivostní funkce, jež je disjunkcí všech konjunkcí utvořených z členů popisujících některou cestu spojující krajní body 2-grafu. V takovém případě říkáme, že daný pojmenovaný 2-graf realisuje tuto pravdivostní funkci s opakováním. Jestliže specielně odpovídají proměnné bez negací hranám 2-grafu jedno-jednoznačně, říkáme, že daný pojmenovaný 2-graf realisuje tuto pravdivostní funkci bez opakování. O těchto realisacích pak autor dokazuje řadu výsledků. Tak se ukazuje, že funkce, která má realisaci bez opakování, závisí efektivně a isotonně na všech proměnných. Elementární konjunkce některých proměnných bez negací je prvoimplikantou dané pravdivostní funkce, právě když hrany odpovídající těmto proměnným tvoří cestu spojující krajní body pojmenovaného 2-grafu, jímž je tato funkce realisována bez opakování. Dále jsou udány dvě podmínky pro pravdivostní funkci, které dostačují k tomu, aby se funkce nedala realisovat bez opakování. Lze-li pojmenovaný 2-graf realisující pravdivostní funkci f bez opakování napsat jako paralelní resp. sériový součet paralelně resp. sériově nerozložitelných 2-grafů, lze odtud odvodit vyjádření této funkce ve tvaru disjunkce resp. konjunkce funkcí realisovaných jednotlivými sčítanci a určit řadu jejich vlastností. Dále se pro pravdivostní funkci definuje tzv. quasisériový rozklad. Ukazuje se, že funkce má realisaci pojmenovaným 2-grafem bez opakování, právě když komponenty jejího quasisériového rozkladu mají takovou realisaci. Dva 2-grafy se nazývají silně isomorfní, jestliže existuje isomorfismus prvního na druhý, který zachovává počáteční a koncový uzel. Dá-li se 2-graf $\mathfrak{G}_1$ konečným počtem inversí svých 2-podgrafů převést v 2-graf, který je silně isomorfní s 2-grafem $\mathfrak{G}_2$, pak říkáme, že 2-grafy $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ jsou quasiisomorfní. Quasiisomorfismus dvou pojmenovaných 2-grafů je podmínkou nutnou a dostatečnou k tomu, aby tyto grafy realisovaly bez opakování touž pravdivostní funkci.

Poslední kapitola je věnována několika výsledkům o optimální realisaci, tj. o takové realisaci, jejíž 2-graf má nejmenší počet hran.

Autor zpracoval problematiku pravdivostních funkcí ze speciálního hlediska. Vyhnul se partiím náležícím do formální logiky; tak např. v knize není řešen problém konstrukce všech tautologií. Zaměřil se na problémy, které řešil sám, a na problémy, které s nimi souvisí. Těžiště jeho vlastních výsledků je v kap. 2. ve studiu prvoimplikant a v kapitolách 8. a 9. ve studiu 2-grafů a jejich užití k realisaci pravdivostních funkcí. Jinak autor uvádí hlavně výsledky sovětských matematiků (Trachtenbrot, Jablonskij aj.). Problematika v knize zpracovávaná vychází z praktického problému realisace pravdivostních funkcí elektrickými obvody; matematická formulace tohoto problému a příspěvky k jeho řešení tvoří jádro knihy.

Prameny, z nichž autor vycházel, zanechaly na knize jisté stopy. Problematika knihy je algebraická; autor však málo využil existujícího algebraického aparátu. Bylo jistě možno užít s výhodou pojmů, metod a výsledků teorie obecných algeber a specielně teorie Booleových algeber. Tak např. vratislavská algebraická škola prof. Marczewského se systematicky zabývá studiem algebraických operací v obecných algebrách; přitom zavedla řadu pojmů, jejichž paralely se v knize vyskytují. Pravděpodobně bylo možno řady těchto pojmů využít; autor však z těchto prací nečerpá, ani je necituje. Myslím, že je to ke škodě věci, že autor nevyužil možností, které mu obecná algebra nabízela ve formě propracovaného aparátu. Místo toho si pojmy tvořil sám nebo je čerpal z pramenů, jejichž autoři si souvislost studované problematiky s obecnou algebrou asi neuvědomovali. V důsledku toho pak autorovo vyjadřování je dosti těžkopádné a místy i nejasné (sr. např. definici realisace s opakováním pravdivostní funkce v kap. 9, která nesouhlasí s uvedenými příklady). Závěrem lze říci, že se autorovi nepodařilo vytvořit teorii pravdivostních funkcí se specifickými pojmy a metodami; spíše jde o souhrn několika problémů, z nichž každý vyžaduje zvláštních pojmů a metod.

Miroslav Novotný, Brno

THEORY OF GRAPHS, Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, edited by P. Erdös and G. Katona, Akadémiai Kiadó, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1968, stran 370, cena neuvedena.

Tato kniha vznikla z přednášek na mezinárodním symposiu o teorii grafů, které se konalo ve dnech 5. až 9. září 1966 v Tihanyi v Maďarsku. Maďaři tak zdárně pokračovali v tradici těchto matematických setkání, kterých se v posledních letech konala již celá řada (Dobogókö 1959, Halle 1960, Princeton 1963, Smolenice 1963, Waterloo 1966 a Řím 1966). Na Blatenském jezeře se sešlo 58 matematiků z několika různých států a naši republiku tehdy zastupovali J. Bosák, A. Kotzig, A. Rosa, B. Zelinka a Š. Znám. Sborník, který ze symposia vznikl pod redakcí P. Erdöse a G. Katony, shrnuje 35 příspěvků, takže je prakticky nemožné, abychom v této krátké recensi podali charakteristiky všech otištěných prací. Dovolte, abychom zde stručně referovali aspoň o těch příspěvcích, které v Tihanyi přednesli naši matematikové.

J. Bosák, A. Rosa a Š. Znám zpracovali společně příspěvek s názvem „*On decompositions of complete graphs into factors with given diameters*" (str. 37—56). Jsou-li dána přirozená čísla $d_1, d_2, \ldots, d_m$, definuje se zde $F(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ jako nejmenší přirozené číslo n takové, že úplný graf s n uzly se dá rozložit na m faktorů, jejichž průměry jsou pořadě $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Autoři se nejprve zabývají obecným případem a pak se specializují na $m = 2$ a 3. Diskutuje se i případ nekonečných průměrů a pro $m = 3$ se zvlášť zkoumají rozklady, ve kterých je $d_1 = d_2 = d_3$.

Dále si všimneme příspěvku, který do sborníku napsal A. Kotzig. Jeho článek má název „*Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations*" (str. 219—230). Autor vychází z klasického pojmu eulerovské čáry v daném grafu, zobecňuje ji na tzv. ξ-rozklady a soustřeďuje se zejména na studium pravidelných grafů čtvrtého stupně. Je tu celkem 17 vět, ve kterých jde o rozličné grafové otázky (o různé transformace eulerovských čar, o vztah k rovnovážně orientovaným grafům, o rovinnost a z ní plynoucí otázky barvení dvěma barvami, o význam koster v těchto grafech apod.).

Poslední z československých příspěvků má název „*On some problems of the symposium in Smolenice*" (str. 347—360) a napsal jej B. Zelinka. Jak známo, konalo se r. 1963 ve Smolenicích mezinárodní symposium o teorii grafů, o kterém byl později vydán v Praze sborník „Theory of graphs and its applications". Ve sborníku se najde též řada otevřených problémů od různých autorů. B. Zelinka se v poslední době zabýval pěti z nich a našel buď úplné nebo částečné jejich řešení. Jde o výsledky, které autor publikoval již dříve v několika vědeckých časopisech a na tomto místě je znovu shrnuje se stručnými důkazy. Autory problémů ze Smolenic byli J. Bosák, K. Čulík, G. A. Dirac, P. Erdös a A. Kotzig.

Snad se na nás nebudou ostatní účastníci maďarského symposia horšit, když v této stručné zprávě uvedeme už jen jména těch dalších autorů, jejich příspěvek byl zahrnut do sborníku. V abecedním pořadí jsou to tito matematikové: M. a Zs. Bánkfalvi, L. W. Beineke, J. Ch. Boland, B. Bollobás, W. G. Brown, G. Chartrand, J. Dénes, P. Erdös, H. J. Finck, T. Gallai, R. K. Guy, A. Hajnal, R. Halin, F. Harary, M. Hasse, T. Hoàng, H. A. Jung, G. Katona, D. Kleitman, G. Korvin, L. Lovász, N. S. Mendelsohn, E. C. Milner, C. St. J. A. Nash-Williams, J. Pelikán, R. Péter, G. Ringel, J. Sheehan, M. Simonovits, H. J. Voss, K. Wagner, H. Walther, W. Wessel. Přitom ovšem některé otištěné příspěvky jsou kolektivní.

Zbývá dodat, že kniha končí rubrikou problémů od různých autorů. Je tu v závěru knihy otištěno celkem 54 otevřených otázek. Seznam problémů se dá špatně komentovat a mám proto k němu jen jednu poznámku. Není mi jasné, proč F. Harary přichází s problémem o minimálním počtu průsečíků na hranách úplného grafu s n uzly, který je znázorněn v rovině (problém 44). Vzorec, který zde F. Harary jako domněnku uvádí, byl totiž v literatuře už několikrát popsán (např. R. K. Guy 1960).

Jiří Sedláček, Praha

B. L. van der Waerden, ALGEBRA, Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether.

Erster Teil, Siebte Auflage der Modernen Algebra, Heidelberger Taschenbücher Band 12. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1966.

Zweiter Teil, Fünfte Auflage der Modernen Algebra, Heidelberger Taschenbücher Band 23. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967.

Nakladatelství Springer-Verlag vydalo v edici Heidelberger Taschenbücher jako svazky 12 a 23 znovu oba díly světoznámé učebnice algebry B. L. van der Waerdena, profesora matematiky curyšské university. Připomeňme nejprve některá známá fakta. Původní název díla byl „Moderne Algebra", vzniklo z podnětu a s použitím přednášek Emila Artina a Emmy Noetherové, poprvé bylo vydáno již v letech 1930—1931 a velmi rychle se stalo základní a velmi vyhledávanou učebnicí „moderní" algebry. Bylo přeloženo do angličtiny, ruštiny a čínštiny a jak vycházelo postupně v nových a nových vydáních, jeho obsah i způsob výkladu byl přizpůsobován potřebám vývoje algebry. V následujících řádcích referuji o sedmém vydání prvního a o pátém vydání druhého dílu.

Z knihy, která původně byla napsána jako učebnice „moderní" algebry a která předpokládala, že čtenář se seznámí s některými „klasickými" partiemi algebry studiem jiných pramenů, se stala dnes učebnice základů algebry vůbec. Nové vydání k této skutečnosti důsledně přihlíží, jak je patrné i ze vzniku nových kapitol i z částečného přerovnání látky. Začněme výčtem kapitol. Jejich názvy jsou v prvním díle: I Čísla a množiny, II Grupy, III Okruhy a tělesa, IV Vektorové a tensorové prostory, V Celistvé racionální funkce, VI Teorie těles, VII Pokračování teorie grup, VIII Galoisova teorie, IX Uspořádání a dobré uspořádání množin, X Nekonečná rozšíření těles, XI Reálná tělesa. Druhý díl obsahuje kapitoly: XII Lineární algebra, XIII Algebry, XIV Teorie representací grup a algeber, XV Obecná teorie ideálů komutativních okruhů, XVI Teorie polynomických ideálů, XVII Celistvé algebraické veličiny, XVIII Ohodnocená tělesa, XIX Algebraické funkce jedné proměnné, XX Topologická algebra.

Ve srovnání s předcházejícím vydáním je tedy zcela nová kapitola IV, která, jak bude dále uvedeno, obsahuje tradiční látku — v úsporném a jasném podání. Pojednává o vektorových prostorech (nad obecně nekomutativním tělesem), o lineární závislosti vektorů a o dimensi prostoru, o duálním prostoru, o soustavách lineárních rovnic, o lineárních transformacích a maticích. Dále, při komutativním tělese, pokračuje kapitola výkladem o tensorech, antisymetrických multilineárních formách, determinantech a tensorových součinech.

První kapitola minulého vydání byla zúžena a výklad o uspořádaných množinách a o dobrém uspořádání byl vyčleněn do samostatné (IX) kapitoly. Při tom, pokud jde o dobré uspořádání, se na rozdíl od předcházejícího vydání dokazuje nejprve Bourbakiho fundamentální lema, známé našim čtenářům např. z knihy [N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, 1958] jako lema 1, 2, 5. S jeho pomocí se pak z axiomu výběru dokazují Zornovo lema a Zermelova věta o existenci dobrého uspořádání.

Kapitola VIII o Galoisově teorii přebírá některé myšlenky z knihy [E. Artin, Galoissche Theorie, Leipzig, 1959]. V § 61 o cyklických tělesech je odstraněna mezera v důkaze věty, že každé cyklické nadtěleso vznikne, za běžných předpokladů, adjunkcí jediného radikálu. Nový je § 67 s důkazem existence normální base.

V kapitole VII, obsahující pokračování výkladu o teorii grup, jsou nové § 52 o grupách řádu p^n a § 54 o charakterech grup, důležitý pro Galoisovu teorii.

První díl končí kapitolou o reálných tělesech a kapitola o ohodnocených tělesech je již přesunuta do dílu druhého.

Kapitoly druhého dílu byly značně přeskupeny ve srovnání s vydáním předchozím. Lineární algebra, pro svou důležitost, byla dána na začátek a topologická algebra nyní knihu uzavírá. V této poslední kapitole se konstrukce úplných obalů grup a okruhů provádí, podle Bourbakiho, nezávisle na druhém axiomu spočetnosti pomocí filtru. Závěr kapitoly byl poněkud zkrácen tím, že byly vynechány paragrafy o topologiích zavedených pomocí ohodnocení a o lokálně bikompaktních tělesech.

Předposlední XIX kapitola, pojednávající o algebraických funkcích, byla rozšířena o § 157, ve kterém je podán důkaz věty o residuích (podle P. Roquette) pro algebraicky uzavřené základní těleso.

Nové vydání knihy si zaslouží upřímného uznání a chvály. Jen díky pečlivým a vybroušeným formulacím, ve kterých není zbytečného slova, se mohlo podařit autoru na 571 straně (tolik mají oba díly dohromady) shromáždit tolik materiálu, zachovat jasnost výkladu a příkladným způsobem motivovat veškeré úvahy.

Karel Drbohlav, Praha

John Greever: THEORY AND EXAMPLES OF POINT-SET TOPOLOGY. Vydáno v Contemporary undergraduate mathematics series. Editor R. J. Wisner. Vydavatelství Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California; Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont, California. 130 stran, cena neudána.

Kniha je určena studentům matematiky nižších ročníků.

Obsah knihy tvoří tři kapitoly, číslovány 0, 1 a 2. V kapitole 0 Preliminary materials jsou uvedeny některé nejjednodušší definice a fakta z naivní teorie množin a teorie reálných čísel, potřebné v dalším výkladu.

V kapitole 1 Topological spaces and continnous functions je detailně rozebírán pojem topologického prostoru, podprostoru, součinu a spojitých zobrazení. Jsou probírány oddělovací axiomy a základní vlastnosti oslabeně kompaktních prostorů (kompaktnost, para- a metakompaktnost, spočetná kompaktnost, spočetná para- a meta-kompaktnost, sekvenční kompaktnost aj.) S podobnou důkladností je rozebírána i souvislost a lokální souvislost, separabilita a lokální kompaktnost. Vět je uvedeno poměrně málo, spíše jsou vesměs dávány příklady prostorů majících tu a nemajících onu vlastnost. Toto množství příkladů je nesporně hlavní předností knihy.

Kapitola 2 Metric spaces se zabývá teorií metrických prostorů, kde zůstává vesměs u běžné látky (kompaktní metrické prostory, omezenost a totální omezenost, stejnoměrně spojitá zobrazení, součin spočetně mnoha metrických prostorů, metrizovatelnost, metrická a topologická úplnost).

Jak již shora řečeno, kniha je určena studentům matematiky. Autor v předmluvě uvádí, že se mu látka základů množinové topologie zdála vhodná pro to, aby se na ní studenti učili důkazové technice abstraktních partií matematiky. Uvádí v textu celou řadu evidentních a průhledných větiček bez důkazů s tím, že si čtenář má důkazy sám provést. Autorův záměr patrně ovlivnil výběr látky. Jsou uvedeny některé poměrně dost specielní vlastnosti topologických prostorů ač třeba obvyklejší (a s probíranou látkou těsně související) pojmy uvedeny nejsou. O zavedených pojmech je dokázána nějaká hlubší věta jen zřídka a navíc ovšem o celých rozsáhlých a důležitých partiích topologie není ani zmínka.

Velmi pečlivě je vypracována bibliografie. Téměř u všech pojmů a mnoha vět je v poznámce pod čarou dána citace, kde byly po prvé uvedeny. Menší pozornost místy věnoval autor vybroušenosti textu. Mnohde jiným rozčleněním látky do vět by bylo možno se vyhnout opakování těchtýž úvah v důkazech. Pro prostory v nichž každá nekonečná množina má hromadný bod užívá autor názoru Bolzano-Weierstrassovy prostory. Jak podotýká, je pro T_1-prostory tento pojem ekvivalentní se spočetnou kompaktností. Přesto pak uvádí větu 9.8 (kromě Bolzano-Weierstrassovy věty jedinou, v níž by se mu tento pojem uplatnil) pouze pro T_1-prostory. V definici 1.9 je definována relace R z množiny A do množiny B jakožto podmnožina množiny $A \times B$ taková, že $a \in A$ implikuje $(a, b) \in R$ pro alespoň jedno $b \in B$ a v 1.15 je definován domain relace R z A do B tak, že je to množina všech $x \in A$ takových, že $(x, y) \in R$ pro nějaké $y \in B$. V definici 2.9 je definováno částečné uspořádání pro množinu S pouze jako transitivní relace z podmnožiny S do S. Zřejmě vypadl požadavek asymetrie, protože některá dále uváděná tvrzení neplatí pro pouze transitivní relaci. Uvedla jsem několik příkladů. Analogické, byť i eventuelně méně výrazné nepropracovanosti způsobují, že kniha místy působí poněkud těžkopádně.

Přesto pojetím zaměřit se především na vyšetřování konkrétních topologických prostorů a jejich „pathologického" chování je Greeverova kniha mezi knihami tak malého rozsahu dost svérázná a záměr dát studentům bez předběžných znalostí materiál pro aktivní práci celkem dobře splňuje.

Věra Trnková, Praha

F. Tölke: PRAKTISCHE FUNKTIONENLEHRE, vierter Band, Springer-Verlag 1967.

Čtvrtý svazek Tölkeho kompendia obsahuje dvě kapitoly. V 10. kapitole jsou uvedeny vzorce pro integrály ze součinů, podílů a mocnin Jacobiho eliptických funkcí (je jich okolo osmi set) a dále různé eliptické integrály v algebraickém, trigonometrickém a hyperbolickém tvaru. V 11. kapitole jsou studovány Jacobiho eliptické funkce a jejich logaritmické derivace v komplexním oboru, jim příslušné inverzní funkce a jimi realizovaná konformní zobrazení rovnoběžníka na vnitřek či vnějšek jednotkového kruhu. Tato kapitola obsahuje 74 vyobrazení.

Jaroslav Fuka, Praha

F. Tölke: PRAKTISCHE FUNKTIONENLEHRE, fünfter Band, Springer-Verlag 1967.

Pátý svazek Tölkeho kompendia se skládá ze šesti kapitol. Ve 12. kapitole jsou studovány obecné Weierstrassovy $\wp$ — funkce, ζ — funkce a σ — funkce a jejich rozvoje a adiční teorémy. Ve 13. kapitole jsou studovány jejich derivace podle parametru a modulu, ve 14. kapitole integrály theta-funkcí a D — funkcí (tj. m — násobné integrály theta-funkcí), v 15. kapitole jsou zavedeny a studovány vícerozměrné theta-funkce a D — funkce, v 16. kapitole theta-funkce a D — funkce s imaginárními parametry a konečně v 17. kapitole Greenovy funkce Fourierovy diferenciální rovnice. 142 vyobrazení přibližuje čtenáři průběh studovaných funkcí.

Jaroslav Fuka, Praha

Tomáš Gál - Jaroslav Růžička: ELEMENTÁRNÍ FUNKCE V TEORII A PRAXI. SNTL Praha 1967, 428 str., 182 obr., 76 tab.

Kniha je úvodem do nauky o funkcích jedné reálné proměnné, a to jak do teorie, tak do praktického počítání s funkcemi. Je rozdělena do dvou částí, z nichž první, spíše teoretická, zabírá asi dvě třetiny rozsahu knihy a obsahuje jednak základní obecné poznatky o analytickém vyjádření a grafu funkce, limitě, spojitosti a derivaci, jednak speciálnější kapitoly o jednotlivých elementárních funkcích — polynomech, mocninné, exponenciální a logaritmické funkci, o funkcích goniometrických a cyklometrických. Druhá část se pak zabývá metodami výpočtu funkční hodnoty (Hornerovo schema, Taylorův vzorec, interpolace), výpočtem hodnoty argumentu (grafické metody, iterační metody) a vyšetřováním průběhu funkcí.

Na výběr látky je možno mít různý názor — jako konečně snad u každého díla tohoto typu — autoři však jistě vycházeli ze svých zkušeností z pedagogické práce na VŠZ v Praze. Jisté výhrady je možno mít proti rozvržení jednotlivých témat do kapitol (kap. II., Reálné funkce jednoho reálného argumentu, se např. z velké části zabývá nejjednoduššími polynomy, a to většinou jejich geometrickou interpretací).

Podle slov autorů je kniha určena „jednak pro všechny, kdo z vlastního zájmu chtějí studovat odbornou literaturu používající matematiky, jednak pro posluchače prvních ročníků vysokých škol.“ Autoři uvádějí v předmluvě, že „z nedostatečného pochopení podstaty pojmu funkce pramení potíže při studiu ... jiných věd užívajících matematiku. Jako cíl této knihy jsme si proto vytkli pokusit se odstranit tyto nedostatky přiměřeným způsobem výkladu.“ Toto hledisko zdůrazňují i na jiných místech knihy.

Bohužel, tento základní cíl podle mého názoru kniha neplní. Autoři se sice snaží vést čtenáře k pochopení matematických pojmů a vět tím, že mu umožňují na konkrétních příkladech poznat jejich motivaci, avšak právě tyto orientační výklady (kterým pochopitelně nevytýkám, že nejsou exaktní ve smyslu matematické logiky) často čtenáři spíše zamlžují podstatu vysvětlované látky.

Jako příklad uveďme předběžnou úvahu o limitě posloupnosti, ilustrované na posloupnosti, $\{n/(n-1)\}$. Na str. 116 se zdůrazňuje: „Číslo 1 lze v tomto případě považovat za jakýsi cíl, jakousi hranici, k níž se s rostoucím indexem členy posloupnosti sice stále více blíží, ale nikdy jí nedosáhnou.“ Dále: „... každý další člen posloupnosti (jehož index $n > n_0$) se od čísla 1 liší o méně než člen a_{n_0}“. To ovšem je pro danou posloupnost pravda, ale i když definice limity posloupnosti na str. 117 je vyslovena správně, zbude ve čtenáři (zvláště jde-li o samouka) mylná představa nebo aspoň pochybnost, tím spíše, že v dalším nenajdeme prakticky příklad na nemonotonní konvergentní posloupnost či na posloupnost, jejíž některé členy nabývají hodnoty rovné její limitě.

Autoři v řadě případů nedostatečně oddělili „orientační“ části výkladu od částí exaktních. Tím se stalo, že i tam, kde autorům šlo o exaktní výklad, dochází někdy k nepřesnostem a nejasnostem. Např. na str. 117 v definici limity posloupnosti je n_0 přirozené číslo; v příkladu na str. 119 se však volí $n = 1/\varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo. V definici nevlastní limity na str. 120 se používá libovolné číslo K, avšak hned nato se v důkazu bere $K > 0$, aniž se zdůvodní, že je to pro důkaz postačující.

Uvedené výtky se týkají hlavně výkladu obecnější látky. Autoři shromáždili v knize značný počet příkladů a cvičení, jejichž řešení je jistě prospěšné pro ovládnutí základů počítání s elementárními funkcemi. Těžko však kniha odstraní případné čtenářovy nedostatky v hlubším pochopení látky, jak se o to autoři snažili.

Jiří Jarník, Praha

G. Hochschild: LA STRUCTURE DES GROUPES DE LIE. Dunod, Paris 1968 (cena 55.50 F). Stran XVII + 254.

Kniha je překladem anglického originálu, vydaného nakladatelstvím Holden-Day, Inc. v San Franciscu v r. 1965. Základem knihy je kurs, přednesený autorem v Berkeley v r. 1963/64.

Kap. I. *Topologické grupy.* Hlavním předmětem je studium podgrup topologických grup a konstrukce Haarovy míry na nich.

Kap. II. *Kompaktní grupy.* Nechť G je kompaktní topologická grupa a $\mathscr{C}$ prostor všech spojitých reálných funkcí na G. Funkce $f \in \mathscr{C}$ se nazývá representativní, jestliže reálný vektorový prostor generovaný všemi funkcemi $x . f . y$; $x, y \in G$; je konečné dimense; zde $(x . f . y)(z) = f(yzx)$. Prvním výsledkem je Peter-Weylova věta: Prostor $\mathscr{R}$ representativních funkcí kompaktní grupy G je všude hustý v $\mathscr{C}$ v topologii uniformní konvergence. Nechť G je topologická grupa a ϱ její spojitá representace na vektorovém topologickém prostoru V nad R; V se nazývá G-modul. G-modul V je jednoduchý, jestliže nemá vlastní pod-G-moduly; je polojednoduchý, jestliže je součtem jednoduchých pod-G-modulů. Dokazuje se, že G-modul konečné dimense je polojednoduchý pro G kompaktní. Dále je ukázána věta o orthogonalitě a struktura Hopfovy algebry kompaktní grupy.

Kap. III. *Struktura topologických grup (elementární teorie).* Vektorová grupa je vektorový prostor konečné dimense při sčítání, toroid je direktní součin exemplářů grupy R/Z ($Z =$ celá čísla); elementární grupa je direktní součin vektorové grupy, toroidu a abelovské diskrétní grupy konečného typu. Ukazuje se, že pro G elementární a uzavřenou podgrupu $S \subset G$ je S i G/S elementární. Nechť $V \subset G$ je vektorová grupa; jestliže G/V je kompaktní, pak V je semi-direktní faktor v G.

Kap. IV. *Nakrytí.* Jsou probrány základní věty o nakrytích topologických prostorů a jednoduše souvislých prostorech. Aplikace na grupy vrcholí následující větou. Nechť topologická grupa G připouští nakrytí $f: S \to G$ s S jednoduše souvislým prostorem. Potom na S existuje struktura topologické grupy tak, že f je homomorfismus. Jestliže $h : H \to G$ je nakrytí grupou H, existuje jediný spojitý homomorfismus $s : S \to H$ tak, že $hs = f$; s je opět nakrytí a homomorfismus.

Kap. V. *Celistvá zobrazení.* Zde se prakticky dokazuje věta o lokální existenci iversní funkce pro celistvá zobrazení $C_n \to C_n$.

Kap. VI. *Analytické variety.* Definice analytických variet a zobrazení.

Kap. VII. *Analytické grupy a jejich Lieovy algebry.* K dané analytické Lieově grupě se konstruuje její Lieova algebra. Ukazuje se, že exponenciální zobrazení je analytické a je lokálním isomorfismem. Nechť $\alpha, \beta : G \to H$ jsou analytické homomorfismy, jejichž derivace v jednotce $e \in G$ splývají; pak $\alpha = \beta$. Každý spojitý homomorfismus $\alpha : G \to H$ je analytický a tedy souvislá topologická grupa připouští maximálně jednu strukturu analytické grupy.

Kap. VIII. *Uzavřené podgrupy Lieových grup.* Hlavním obsahem je důkaz věty: Nechť G je topologická lokálně kompaktní grupa a nechť existuje spojitý homomorfismus $h : G \to H$ do Lieovy grupy H, který je injekcí na nějakém okolí prvku $e \in G$. Potom G je Lieova grupa. Tím je ukázáno, že každá uzavřená podgrupa Lieovy grupy je opět Lieova grupa. Dále se konstruuje analytická grupa G/H, $H \subset G$.

Kap. IX. *Grupy automorfismů a semi-direktní součiny.* Nechť G je analytická grupa, $A(G)$

grupa automorfismů. Každý element $\alpha \in A(G)$ indukuje automorfismus α° Lieovy algebry g grupy G. Ukáže se, že $\alpha \to \alpha^\circ$ je isomorfismus. Dále se studují adjungované representace.

Kap. X. *Cambell-Hausdorffova formule.* Tato formule udává $\exp x \,.\, \exp y$ jako $\exp \eta(x, y)$, kde η je (lokálně) celistvá funkce.

Kap. XI. *Elementární teorie Lieových algeber.*

Kap. XII. *Analytické jednoduše souvislé grupy.* Kombinací předchozích výsledků se dokazuje základní věta o existenci analytické grupy k dané Lieově algebře. Ukazuje se, že pro G nilpotentní a jednoduše souvislou je exp isomorfismem mezi g a G. Nachází se modifikace tohoto tvrzení pro řešitelné grupy.

Kap. XIII. *Kompaktní analytické grupy.* Lieovy algebry kompaktních analytických grup se charakterisují existencí bilineární symetrické positivně definitní a invariantní formy na nich. Každá kompaktní analytická grupa je tvaru $(T \times G)/D$, kde T je toroid, G kompaktní polojednoduchá a D centrální konečná podgrupa taková že $D \cap T$ a $D \cap G$ je triviální. Nechť G je topologická souvislá lokálně kompaktní grupa a existuje spojitý lokálně injektivní homomorfismus grupy G do kompaktní grupy; potom G je direktní součin vektorové grupy a kompaktní grupy. V další části je dokázáno, že exponenciální zobrazení je pro kompaktní grupu zobrazením na. Kapitola končí větami o maximálním toroidu T kompaktní analytické grupy G: každý element z G leží v některé konjugované podgrupě xTx^{-1}; G/T je jednoduše souvislá.

Kap. XIV. *Cartanovy podalgebry.* Jest rozvinuta klasická teorie, vedoucí k nalezení invariantů polojednoduchých Lieových algeber konečné dimense. Dále je ukázáno, že polojednoduchá komplexní algebra připouští reálnou kompaktní formu.

Kap. XV. *Kompaktní podgrupy Lieových grup.* Je studována struktura maximálních kompaktních podgrup, majících konečný počet souvislých komponent.

Kap. XVI. *Centr analytické grupy a adherence analytické podgrupy.* Nejprve je dokázáno, že centr nilpotentní analytické grupy je souvislý a pro libovolnou grupu je obsažen v analytické abelovské podgrupě. Dále je dokázána věta: Nechť $H \subset G$ je analytická podgrupa. Jestliže adherence v G každé jednodimensionální podgrupy $K \subset H$ je obsažena v H, pak H je uzavřená v G. Tím se dochází k Malcevovu kritériu, podle něhož analytická podgrupa analytické grupy je uzavřená.

Kap. XVII. *Komplexní analytické grupy.* Jsou ukázány některé vlastnosti polojednoduchých komplexních grup a universálních komplexifikací reálných analytických grup; specielně je dána charakterisace komplexifikací kompaktních grup pomocí teorie representací.

Kap. XVIII. *Věrné representace.* Studium existence těchto representací konečné dimense.

Každá kapitola je zakončena řadou příkladů. Kniha má vysokou úroveň.

Alois Švec, Praha

Richard L. Bishop, Samuel I. Goldberg: TENSOR ANALYSIS ON MANIFOLDS. The Macmillan Comp., New York a Collier-Macmillan Limited, London 1968 (cena neudána). Stran VIII + 280.

Touto knihou dostáváme do ruky další učebnici teorie diferencovatelných variet a různých struktur na ní. Tenzorová analýza je vyložena současným způsobem, který by se měl státi naprosto běžným. Všimněme si však obsahu knihy.

Kap. 0. *Teorie množin a topologie.* Zde jsou shrnuty základní pojmy (např. metrické prostory, spojitost, souvislost, kompaktnost).

Kap. 1. *Variety.* Diferencovatelné variety se definují pomocí atlasů; je uvedena velká řada jejich příkladů. Dále se zavádí diferencovatelné zobrazení, podvarieta, tečný prostor, diferenciál zobrazení.

Kap. 2. *Tenzorová algebra.* Ve velmi zdařilé kapitole se na padesáti stranách udělá celá multilineární algebra. Vychází se přitom zcela z ničeho: definuje se vektorový prostor, podprostor, duální prostor a tensorový součin, pokračuje se symetrickými a vnějšími součiny a přejde se k teorii determinantů, kvadratických forem, Hodgeovy duality a symplektických forem.

Kap. 3. *Vektorová analýza na varietách.* Nejprve je ukázán vztah mezi vektorovými poli a lokálními 1-parametrickými grupami pohybů (tj. toky). Dále se definuje Lieova derivace tensorového pole a ukazují se její základní vlastnosti; pozornost je věnována speciálnímu případu, tj. Lieově závorce dvou vektorových polí. Pokračuje se úvodem do teorie kritických bodů funkcí na varietě (Morseova teorie). Závěrem je studována Frobeniova věta. Je probírán případ C^∞ a některé důkazy jsou vynechány; bohužel nejsou citovány prameny. V dodatku k této kapitole je čtenář uveden do pojmů tenzorového bandlu, paralelizovatelných a orientovatelných variet.

Kap. 4. *Teorie integrace.* Opět velmi zdařilá kapitola, která by měla ovlivniti naše běžné výklady integrálů. Nejprve se vyloží vnější derivování vnějších forem a vnitřní součin vektorového pole a vnější formy; je nalezena formule pro Lieovu derivaci vnější formy. Dále se dokáže Poincaréovo lemma. Nyní se přikročí k vlastní teorii integrace. Definují se singulární kubické řetězy na varietě a jejich hranice. Z teorie integrace v eukleidovských prostorech se uvádí Fubiniho věta a věta o substituci. To umožňuje definici integrálu vnější formy přes řetěz a důkaz Stokesovy formule.

Kap. 5. *Riemannovy a semi-Riemannovy variety.* Po základních definicích se přichází k zavedení přiřazené afinní konexe, paralelního přenosu, kovariantního diferencování, křivosti a torse, geodetik.

Kap. 6. *Fyzikální interpretace.* Hamiltonovská čili symplektická struktura na varietě sudé dimense je dána uzavřenou vnější 2-formou maximální hodnosti. Ukazuje se, že na konečném bandlu libovolné variety vzniká kanonická hamiltonovská struktura. Matematický model mechanického systému se pak skládá z variety M, 1-formy na M (tj. silového pole), metriky (kinetické energie) a kanonické hamiltonovské struktury. Jsou dokázány zákony zachování energie a momentu.

Každá kapitola je doplněna řadou cvičení. Velkou výhodou knihy je, že je určena pro začátečníky, dochází se však dosti daleko. Její styl je naprosto dokonalý a v souladu s tendencemi současné literatury. Naši diferenciální geometři by ji měli naprosto detailně ovládati, podle mého soudu by ji však měli pročísti i studující analýzy a fyzici, prodírající se v zastaralých učebnicích houštinami indexů tenzorového počtu. Domnívám se, že absolventi university by zcela určitě měli znáti čtvrtou kapitolu. Recensovanou knihu velmi naléhavě doporučuji k vážnému studiu. Její dostupnost je ovšem problematická.

Alois Švec, Praha

Paul B. Yale: GEOMETRY AND SYMMETRY. Holden-Day; San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam; Holden-Day Series in Mathematics (Earl A. Coddington and Andrew M. Gleason, Editors); 288 stran.

Netradiční učebnice euklidovské, afinní a projektivní n-rozměrné geometrie, se soustředěním výkladu kolem grup „symetrií" jednotlivých prostorů. Jak autor uvádí na str. vii, bylo jeho cílem, aby základní kurs geometrie vyhovoval současným tendencím. Pak se totiž může stát ideální průpravou k následujícím kursům soudobé diferenciální a algebraické geometrie, teorie klasických grup či dokonce i algebraické topologie. Autor se proto zaměřuje na soustavné zdůrazňování těch pojmů, principů i metod, které mají maximální použití v celé matematice. A tak plní takto pojatý kurs geometrie současně dva úkoly: jednak se při něm uskutečňuje samotný výklad geometrie, jednak se stává pomocným objektem, na němž se demonstruje použití moderních matematických prostředků.

V kapitole 1 („Algebraické a kombinatorické preliminárie") jsou uvedeny základní pojmy teorie množin a grup. Kombinatorické úvahy jsou soustředěny okolo grup permutací. Kapitola vrcholí teorémy Lagrangeovým a Polya-Burnsideovým. Systematicky je použit pojem rozkladové třídy a třídy konjugovanosti.

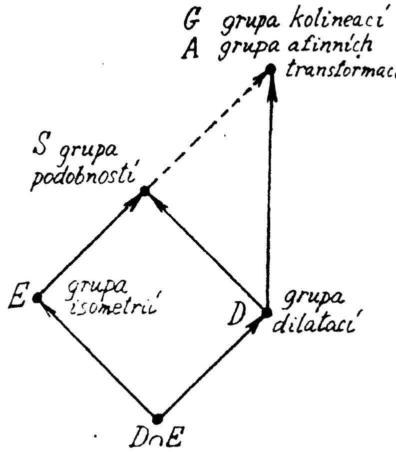
Kapitola 2 má název „Isometrie a podobnosti: intuitivní přístup". Intuitivním přístupem se přitom rozumí přístup syntetický, bez užití algebry (při studiu euklidovského prostoru). V nadpisu uvedené transformace n-rozměrného euklidovského prostoru jsou podrobeny důkladnému rozboru, je provedena jejich klasifikace a vyšetřeny též automorfismy a endomorfismy úplné grupy isometrií a úplné grupy podobností. Podobnost definuje autor jako permutaci množiny všech bodů euklidovského prostoru, která převádí dvojici stejných vzdáleností opět ve dvojici stejných vzdáleností. Podobnost lze ovšem definovat též jako permutaci σ množiny všech bodů euklidovského prostoru, pro niž existuje kladné číslo c tak, že (vzdálenost bodů σX, σY) $= c$. (vzdálenost bodů X, Y) pro každou dvojici bodů X, Y. Detailní důkaz ekvivalence obou definicí je velmi zajímavý a v literatuře ojedinělý. Existence právě jednoho samodružného bodu u podobnosti různé od isometrie je prokázána metodou známou z funkcionální analysy. Autor dochází kupř. až k souvislostem s vybudováním geometrie na základě zrcadlení (podle F. Bachmanna). Na jiném místě je poukázáno na pozoruhodné výsledky M. Eschera o representaci rovinných grup isometrií grupami symetrií polygonů a polyedrů (srv. H. C. MacGillavry: Symmetry aspects of M. C. Escher's periodic drawings, A. Oosthoek, Utrecht 1965).

Kapitola 3 („Úvod do krystalografie") je elementárním uvedením do důležitého odvětví aplikované teorie grup a geometrie, majícího význam v teoretické chemii či fysice. Jsou zde zkoumány „diskrétní" grupy (tj. grupy isometrií takové, že každá ohraničená množina má s grupovou orbitou libovolného bodu vždy konečný průnik), spočetné a konečné grupy isometrií. Je podána klasifikace konečných grup isometrií na základě grup symetrií vhodných polyedrů. Dále jsou studovány tzv. mřížové grupy definované jako netriviální diskrétní grupy translací (jejich grupové orbity se nazývají mřížemi). Důležitost mřížových grup pramení z toho, že je-li G diskrétní grupa obsahující netriviální translaci, pak všechny translace obsažené v G tvoří mřížovou podgrupu. Konečně jsou studovány tzv. krystalografické bodové grupy (jako grupy isometrií připouštějící samodružný bod X a samodružnou trojrozměrnou mříž obsahující X) a krystalografické prostorové grupy (jako diskrétní grupy jejichž translace tvoří trojrozměrnou mřížovou grupu). Existuje 230 typů (až na isomorfismus) krystalografických prostorových grup. Otázka, zda též pro diskrétní grupy v n-rozměrném euklidovském prostoru, jejichž translace tvoří n-rozměrnou mřížovou grupu, je počet typů až na isomorfismus konečný, patří mezi 23 Hilbertových problémů (současný komentář k tomuto problému viz: J. J. Burckhardt: Die Bewegungsgruppe der Kristallographie, Basel 1957).

Kapitola 4 („Tělesa a lineární algebra: stručný přehled") obsahuje nezbytný výčet pojmů a faktů z teorie komutativních těles (zvláště pak konečných těles) a z teorie konečných vektorových prostorů. Náplň kapitoly možno dobře posoudit již z názvů jednotlivých paragrafů: Tělesa; vektorové prostory; podprostory a kanonická base; lineární transformace (zvláště pak involuce a projekce); souřadnicová zobrazení a matice příslušné k lineárním transformacím; podobné matice a komutativní diagramy; aplikace podobnosti matic; symetrie ve vektorovém prostoru a v obecné lineární grupě.

Kapitola 5 má název „Afinní prostory". V kap. 2—3 bylo ukázáno že všecky translace euklidovského prostoru tvoří vektorový prostor. Tohoto faktu se nyní využije při definici afinního prostoru nad libovolným komutativním tělesem. Afinní prostor se zavede tak, aby připouštěl transformace chovající se „tak jako translace": Množina $A \neq \emptyset$ nazve se afinním prostorem s translační grupou T nad tělesem F, když T je grupa jistých permutací na A působící ostře transitivně na A a když dále T je vektorový prostor nad F, jehož vektorové sčítání souhlasí s obvyklým skládáním zobrazení. Analogickou definici možno najít již u Ernsta Snappera: Metric geometry over affine spaces, Math. Assoc. Am., Buffalo, N. Y., 1964 (notes taken by J. T. Buckley at the first MAA Cooperative Summer Seminar in 1964 at Cornel University). Užitím vlastností vektorových podprostorů jsou zkoumány afinní podprostory a jejich dimense, rovnoběžnost a mimoběžnost afinních podprostorů, souřadnicová zobrazení a standartní afinní prostory (uspořádaných n-tic prvků daného tělesa), soustavy nehomogenních lineárních rovnic nad daným tělesem.

Autorův zájem je však zaměřen na studium „symetrií“ afinního prostoru. V případě euklidovského prostoru šlo o dvě úplné grupy symetrií; transformace jedné z nich reprodukují vzdálenost, kdežto transformace druhé z nich reprodukují „relativní vzdálenosti“. Obdobně u afinních prostorů půjde o tři úplné grupy „symetrií“: grupu dilatací (dilatace převádí přímku na přímku a zachovává každý směr; každá translace je dilatací „násobena“ pevným číslem), grupu afinních transformací afinní transformace afinního prostoru A s translační grupou T nad tělesem F je definována jako permutace σ množiny A taková, že $t \in T \Rightarrow \sigma^{-1} t \sigma \in T$; $t \in T$, $\alpha \in F \Rightarrow \sigma^{-1}(\alpha \,.\, t)\, \sigma = \alpha \,.\, (\sigma^{-1} t \sigma)$; jde zde o transformaci, která reprodukuje „relativní délky“ paralelních vektorů) a grupu kolineací (kolineace afinního prostoru A je definována jako permutace množiny A, pro niž tři body leží na téže přímce právě tehdy, když jejich obrazy leží na téže přímce). Tyto tři grupy jsou podrobně studovány. Kapitola končí exkursí do reálných afinních prostorů (vyšetřen pojem objemu rovnoběžnostěnu, mřížové grupy a studovány kolineace). V případě 3-rozměrného reálného afinního prostoru jsou jednotlivé základní grupy situovány podle připojeného obrazce, v němž spojení znamená relaci být podgrupou. $D \cap E$ operuje transitivně na množině bodů, ne však přímek či rovin; E operuje transitivně na množině bodů, přímek i rovin, S je ostře dvojmo transitivní na množině bodů, ne však na párech různoběžných přímek či rovin; A je blízké k tomu být dvojmo transitivní na množině rovin resp. bodů. Obecněji, grupa afinních transformací afinního prostoru je dvojmo transitivní na množině nadrovin při omezení, aby šlo vždy současně o páry nadrovin rovnoběžných anebo současně o páry nadrovin různoběžných.



Obr. 1.

V kapitole 6 („Projektivní prostory“) se vyšetřují prostory, které připouštějí „symetrie“ dvojmo transitivní na množině nadrovin bez výjimky, což lze docílit nevelkou modifikací vektorových prostorů či afinních prostorů. Jde o známou „kolapsi“ vektorového prostoru (kdy se jednorozměrné podprostory daného vektorového prostoru prohlásí za body nového prostoru) resp. o rozšíření afinního prostoru o nevlastní elementy. Je diskutována vzájemná souvislost obou koncepcí, dále jsou studovány projektivní podprostory, desarguesovské projektivní roviny (pouze stručně, v jediném paragrafu), homogenní souřadnice a standartní projektivní prostory, soustavy homogenních lineárních rovnic nad daným tělesem a jejich geometrický význam. „Symetrie“ projektivního prostoru jsou chápány jako 1) perspektivní kolineace (jež jsou analogií dilatací afinního prostoru), 2) kolineace, definované jako permutace množiny všech bodů daného projektivního prostoru, které převádí každou přímku na přímku a 3) projektivní kolineace, jakožto transformace indukované lineárními transformacemi vektorového prostoru, jehož kolapsí daný projektivní prostor vzniká. Tyto tři typy symetrií jsou podrobně zkoumány užitím metod uvedených v předešlých kapitolách. Je podán zajímavý důkaz tzv. fundamentální věty projektivní geometrie (tento důkaz se opírá o použití perspektivních kolineací). Dále je studován duální prostor a pojem duality, korelace a semibilineární formy, kvadriky a polarity a provedena exkurse do reálných a konečných projektivních prostorů.

Učebnice vyniká perfektní stylovostí, matematicky i pedagogicky. Autor užívá orientujících komentářů před každou kapitolou i běžné uvnitř jednotlivých paragrafů; za každým paragrafem jsou zajímavé úlohy k vlastnímu čtenářovu promyšlení (některé jsou vhodné k seminárním tématům; případné je též při nich uvedení souvislostí s časopiseckou literaturou). Za každou kapitolou je výběr aktuální literatury se zasvěcenými komentáři. Nakonec jsou umístěny dva indexy: společný index věcný i jmenný a index v knize užitých označení.

Václav Havel, Brno

Robert Sauer: INGENIEUR-MATHEMATIK. Zweiter Band: Differentialgleichungen und Funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968. VIII + 192 stran, 98 obrázků.

Kniha navazuje na první díl, jehož recenze byla otištěna v Čas. pěst. mat. *90* (1965), str. 235; je opět určena především studentům na technikách a obsahuje zhruba látku, vykládanou ve třetím a čtvrtém semestru.

Látka je rozvržena do tří kapitol; číslování kapitol a paragrafů přitom navazuje na první díl. Ve velmi stručné čtvrté kapitole, nazvané „Vektorová analýza", jsou definovány operace gradientu, divergence a rotace a jsou uvedeny důležité věty — Gaussova, Greenova a Stokesova. Jsou uvažovány též válcové a sférické souřadnice a jeden paragraf je věnován vektorovým polím. Kapitola pátá, nazvaná „Diferenciální rovnice", je z převážné většiny věnována obyčejným diferenciálním rovnicím. Obsahuje obvyklou látku od existenční věty pro rovnici prvního řádu až po teorii lineárních rovnic n-tého řádu a systémů rovnic prvního řádu, kde je užito též maticového počtu. Teorie rovnic s konstantními koeficienty je pak použito v problematice kmitů. Rozsáhlejší paragraf je věnován teorii i praxi Fourierových řad. Všude je věnována poměrně velká pozornost numerickým (a grafickým) metodám. Otázky okrajových problémů a problému vlastních čísel pro obyčejné rovnice jakož i problematika parciálních diferenciálních rovnic jsou ilustrovány jen na příkladech — je zde uvedena např. vlnová rovnice a rovnice pro vedení tepla. Poslední šestá kapitola je úvodem do teorie funkcí jedné komplexní proměnné. Obsahuje obvyklý materiál od základních pojmů až po residuovou větu. Velmi mnoho místa je věnováno podrobnému studiu konformního zobrazení a z tohoto hlediska i elementárním funkcím. Samostatný paragraf se zabývá aplikacemi v aerodynamice a elektrotechnice. Dalších otázek (analytické pokračování, Riemannova plocha atd.) se autor jen velmi stručně dotýká. Kapitolu uzavírá paragraf věnovaný harmonickým funkcím a Dirichletově úloze.

Kniha tedy obsahuje hodně materiálu. Výklad je proto zhuštěný, řada důkazů je prováděna až na konci knihy ve zvláštním dodatku. Forma výkladu je v podstatě tradiční, autor však klade velký důraz na fyzikálně-technickou interpretaci vykládané látky a chce i využíváním geometrického a fyzikálního názoru usnadnit čtenáři pochopení vykládané látky a povzbudit jeho zájem o tuto problematiku. Je ovšem třeba zdůraznit, že autor tento svůj záměr uskutečňuje nikoliv na úkor matematické korektnosti.

Závěrem tedy lze říci, že v knize jsou stručně a přitom přesně vyloženy základy zmíněných partií matematiky a že jde o publikaci, která studentům rozhodně pomůže při studiu. Stejně jako první díl vychází i tento druhý díl již ve třetím, tentokrát poněkud rozšířeném vydání.

Alois Kufner, Praha

Hanna Neumann: VARIETIES OF GROUPS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1967. Stran VIII + 192.

Studium variet grup představuje jeden z nejmladších směrů, do kterého vyústila moderní teorie grup. Základním pojmem je tu zřejmě pojem variety grup, který je jen speciálním případem pojmu variety (v sovětské literatuře se používá častěji pojmu primitivní třída) universálních algeber. Je-li totiž pevně zvolen nějaký typ algeber (na příklad svazy, okruhy, grupy, pologrupy apod.), pak varietou algeber daného typu se rozumí třída všech algeber (daného typu), které splňují identicky nějakou množinu relací. Autorčina kniha tak dává vznik ucelené algebraické disciplině, která spadá svou problematikou právě na rozhraní mezi vlastní teorii grup a teorii universálních algeber.

Obsah knihy je rozdělen do pěti kapitol. První kapitola je úvodní a seznamuje čtenáře se základními pojmy a s nimi souvisejícími fakty. Sem patří na příklad věta, která je známa v teorii universálních algeber jako věta Birkhoffova. Druhá kapitola je věnována násobení variet.

Jsou-li $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{V}$ dvě variety grup, pak součinem $\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}$ se rozumí varieta všech grup, které vznikly jako rozšíření nějaké grupy z $\mathfrak{U}$ pomocí grupy z $\mathfrak{V}$. Ukazuje se tu, že toto násobení je asociativní a že každou varietu (která není ani varietou jednotkovou ani varietou všech grup) lze vyjádřit jednoznačně jako součin variet ireducibilních. Takže systém všech netriviálních variet grup tvoří v jistém smyslu pologrupu, volně generovanou ireducibilními varietami. První dvě kapitoly se tedy týkají variet zcela obecných grup, což už neplatí o posledních třech kapitolách, které pojednávají o grupách se speciální strukturou. Také formulace výsledků je tu komplikovanější a proto pouze ve stručnosti uvedeme, že ve třetí kapitole se studují variety nilpotentních grup, čtvrtá kapitola se zabývá relativně volnými grupami ve varietách a poslední pátá kapitola si všímá variet v souvislosti s konečnými grupami.

Kniha není určena matematikům — začátečníkům, neboť její studium předpokládá již dosti značný rozhled po teorii grup. Přitom však je psána velice elegantně a přehledně, ačkoliv jde o problematiku složitou. Kromě výsledků již dříve otištěných knížka obsahuje rovněž resultáty, které tu jsou publikovány po prvé (to se netýká jen výsledků autorčiných). Dále je tu formulováno celkem dvacet pět dosud neřešených problémů a v závěru je uveden podrobný seznam literatury.

Ladislav Procházka, Praha

DÁLE VYŠLO

Stanislav Šmakal - Bruno Budinský: GONIOMETRICKÉ FUNKCE, Praha 1968, vydal ÚV matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta, 148 stran, 43 obr., cena 4,50 Kčs.

Knížka vyšla jako 20. svazek edice Škola mladých matematiků. Je určena řešitelům matematické olympiády i dalším zájemcům o středoškolskou matematiku.

Redakce