Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 223--225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117655

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 1. Rozhodněte, zda platí následující věta: *Nechť f je reálná funkce na intervalu $I = (a, b)$, která má primitivní funkci na I a pro niž dále platí:*

(*) *Ke každému $x \in I$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje takové r, že $0 < r < \varepsilon$ a že $f(x) = \frac{1}{2}(f(x + r) + f(x - r))$.*

Pak je f lineární.

Poznámka. Je-li funkce f spojitá na I, je tvrzení pravdivé, jak plyne z této úvahy: Buď $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$; nechť $A\alpha + B = f(\alpha)$, $A\beta + B = f(\beta)$. Buď dále $g(x) = Ax + B$. Potom $h = f - g$ splňuje předpoklady věty a je $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Nechť je např. $\max \{h(x); x \in \langle \alpha, \beta \rangle\} = M > 0$; buď $x_0 = \inf \{x \in \langle \alpha, \beta \rangle; h(x) = M\}$. Pak $h(x_0) = M$ a $h(x) < M$ pro $x \in \langle \alpha, x_0)$, což je zřejmě spor s (*). Je tedy $h = 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$, z čehož už tvrzení lehce plyne.

Úloha č. 2. *Nechť E je separabilní nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Rozhodněte, zda existují $x_1, x_2, \ldots, \in E$ tak, že ke každému $x \in E$ existuje permutace π množiny všech přirozených čísel, pro niž $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.*

Karel Karták, Praha

Řešení úlohy č. 10 (autor Jan Mařík) z roč. *81* (1956), str. 470.

Úloha: *Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď f spojitá funkce na množině G, která je otevřená v m-rozměrném kartézském prostoru E_m. Nechť ke každému $s \in G$ existuje uzavřená koule K o středu s tak, že $K \subset G$ a že $\int_K f(x)\,dx = \int_K f(s)\,dx$ $(= f(s) \cdot V$, kde V je objem koule $K)$. Potom je funkce f harmonická na množině G.*

Ukážeme, že uvedená věta obecně neplatí.

Označení. Je-li $c \in E_m$, buďte $c_1, c_2, \ldots, c_m$ souřadnice bodu c. Pro $M \subset E_m$ buď $|M|$ vnější Lebesgueova míra množiny M. Pro $c \in E_m$, $R > 0$ buď $\Omega(c, R) = \{x; |x - c| < R\}$ (koule). Konečně buď $|\Omega(c, 1)| = \varkappa_m$.

Lemma 1. *Nechť $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n$. Potom $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} \gamma_k > 0$.*

Důkaz. Součet má tvar buď $\gamma_n - \gamma_{n-1} + \ldots + \gamma_2 - \gamma_1$ nebo $\gamma_n - \gamma_{n-1} + \ldots$ $\ldots + \gamma_3 - \gamma_2 + \gamma_1$.

Lemma 2. *Buď $c \in E_m$, $\alpha < 0$, $\beta > c_1$. Buď f spojitá v E_m, omezená pro $x_1 \leqq \beta$*

a buď $f(x) = \alpha + x_1 - \beta$ pro $x_1 > \beta$. Potom

$$\lim_{R\to\infty} R^{-m} \int_{\Omega(c,R)} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $m > 1$. Buď $A > 0$. Určeme $B > 0$, aby bylo $|f(x)| < B$ pro $x_1 < \beta$. Dále určeme λ, aby bylo $\lambda\varkappa_{m-1} > 2^m(A + B\varkappa_m)$. Buď nyní $R > 4(\lambda - \alpha + \beta - c_1)$. Položme

$$M = \{x; c_1 + \tfrac{1}{4}R < x_1 < c_1 + \tfrac{3}{4}R; \sum_{j=2}^{m}(x_j - c_j)^2 < \tfrac{1}{4}R^2\}\,.$$

Snadno se zjistí, že $|M| = R^m \,.\, 2^{-m} \,.\, \varkappa_{m-1}$, $M \subset \Omega(c, R)$ a že pro každé $x \in M$ je $x_1 > \lambda - \alpha + \beta > \beta$, tedy $f(x) = \alpha + x_1 - \beta > \lambda$. Je tudíž

$$\int_{\Omega(c,R)} f(x)\,\mathrm{d}x > \lambda|M| - B|\Omega(c, R)| = \lambda \,.\, 2^{-m} \,.\, R^m \,.\, \varkappa_{m-1} - B\varkappa_m R^m =$$

$$= R^m(\lambda \,.\, 2^{-m} \,.\, \varkappa_{m-1} - B\varkappa_m) > AR^m\,.$$

Pro $m = 1$ přenecháváme důkaz čtenáři.

Věta. *Existuje funkce F spojitá v E_m, která tam není harmonická a má tuto vlastnost: Ke každému $c \in E_m$ existuje takové $R > 0$, že*

$$\int_{\Omega(c,R)} (F(x) - F(c))\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Důkaz. Napřed sestrojíme posloupnost $a_0, a_1, \ldots$ takto: Položíme $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Je-li $n \geqq 1$ a je-li již sestrojena posloupnost $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že $a_k - a_{k-1} > a_{k-1} - a_{k-2}$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$, definujeme nejprve pomocné funkce φ, g předpisem $\varphi(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $\varphi(t) = (-1)^{j+n+1}$ pro $a_{j-1} < t \leqq a_j$, $\varphi(t) = 1$ pro $t > a_n$, $g(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi$. Pro $t > a_n$ je $g(t) = g(a_n) + t - a_n$. Dále je $g(a_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n+1} (a_k - a_{k-1})$, což je podle lemmatu 1 záporné. Vidíme, že předpoklady lemmatu 2 jsou splněny, položíme-li $c = [a_{n-1}, 0, \ldots, 0]$, $\beta = a_n$, $\alpha = g(a_n)$, $f(x) = g(x_1)$. Existuje tedy R_1 takové, že $\int_{\Omega(c,R_1)} f > g(a_{n-1})\,\varkappa_m \,.\, R_1^m$. Nyní určíme a_{n+1} tak, aby bylo $a_{n+1} - a_n > a_n - a_{n-1}$ a zároveň $a_{n+1} > a_{n-1} + R_1$.

Tím je sestrojena posloupnost $a_0, a_1, \ldots$; protože $a_n - a_{n-1} > a_1 - a_0 = 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$, je $a_n \to \infty$. Položme $\Phi(t) = 0$ pro $t \leqq 0$, $\Phi(t) = (-1)^j$ pro $a_{j-1} < t \leqq a_j$, $\Psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \Phi$, $F(x) = \Psi(x_1)$. Funkce F je zřejmě spojitá v E_m a není tam harmonická. Buď konečně $c \in E_m$. Není-li c_1 rovno žádnému z čísel a_j, je funkce F lineární v okolí bodu c a za hledané R můžeme volit libovolné dostatečně malé kladné číslo. Buď tedy $c_1 = a_{n-1}$. Položme $G(x) = (-1)^{n-1} F(x)$, $P(R) = \int_{\Omega(c,R)} (G(x) -$

$- G(c))\,dx$. Sestrojme funkce f, g a číslo R_1 jako na začátku důkazu. Pro $x_1 < a_{n+1}$ je zřejmě $f(x) = G(x)$; je $G(c) = g(a_{n-1})$. Podle volby R_1 je $P(R_1) = \int_{\Omega(c,R_1)} (f(x) - g(a_{n-1}))\,dx > 0$. Pro $a_{n-2} < x_1 < a_n$ (pro $n = 1$ zde volíme $a_{n-2} = -\infty$) je zřejmě $G(x) \leqq G(c)$ a tedy pro malá $R > 0$ je $P(R) \leqq 0$. Ze spojitosti funkce P plyne, že pro některé $R > 0$ je $P(R) = 0$. Toto R nám vyhovuje.

Věta je dokázána.

Děkuji prof. J. Maříkovi za rady, které umožnily zjednodušit důkaz.

Ivan Netuka, Praha