Josef Kateřiňák

O systémech zobrazení absolutních prostorů S_n do S_{n-k}

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 129--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117653

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 94 * PRAHA 14. 5. 1969 * ČÍSLO 2

O SYSTÉMECH ZOBRAZENÍ ABSOLUTNÍCH PROSTORŮ S_n DO S_{n-k}

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina

(Došlo dne 3. listopadu 1964, přepracované 7. prosince 1965)

1. ÚVOD

Absolutním prostorem S_n dimense (rozměru) $n \geqq 2$ rozumíme neprázdnou množinu s $n - 1$ systémy neprázdných podmnožin (podprostorů) splňujících zobecněné Hilbertovy axiomy incidence S1–S5 z [4], str. 17–18, na níž je definovaná relace *oddělování* $\mu \subset S_n \times S_n \times S_n$ splňující axiomy oddělování S6–S9 a axiom Dedekindův S10 z [4], str. 18, a relace *shodnost* $\sigma \subset S_n \times S_n \times S_n \times S_n$ splňující axiomy shodnosti S11–S16 z [4], str. 18–19. Body (tj. prvky) prostoru S_n budeme značit A, B, C, B', B'', apod., nebo jako jednobodové množiny S_0, S'_0, S''_0, apod. Podprostory dimense $k = 1, \ldots, n - 1$ (tj. podmnožiny k-tého systému) prostoru S_n budeme značit S_k, S'_k, S''_k, apod. Prázdnou množinu $\emptyset$ budeme též značit $S_{-1}, S'_{-1}, S''_{-1}$, apod. Přitom užíváme teorii množin (včetně teorie reálných čísel) podanou intuitivně v [1], kapitola I, str. 1–40. Protože [4] je těžko dostupná, uvedeme zde aspoň stručně formulaci axiomů S1–S16 a definici nezávislých bodů a definice spojení a kolmosti dvou podprostorů.

Definujme:

$B_0, \ldots, B_k \in S_n$ *nezávislé* v S_n (píšeme $B_0 \ldots B_k$) $\Leftrightarrow$ pro každý $S_{k-1} \subset S_n$ aspoň jeden $B_i \notin S_{k-1}$.

Zobecněné Hilbertovy axiomy incidence:

S1. $S_1 \subset S_n \Rightarrow$ existují nezávislé $B_0, B_1 \in S_1$.

S2. Pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$ existují nezávislé $B_0, \ldots, B_k \in S_n$.

S3. Nezávislé $B_0, \ldots, B_k \in S_n \Rightarrow$ existuje právě jeden $S_k \subset S_n$ tak, že $B_0, \ldots, B_k \in S_k$ (píšeme $S_k = B_0 \ldots B_k$).

S4. $S_k, S_{k+1} \subset S_n$ a nezávislé $B_0, \ldots, B_k \in S_k \cap S_{k+1} \Rightarrow S_k \subset S_{k+1}$.

S5. $S_k, S'_k \subset S_{k+1} \subset S_n$ a $S_k \cap S'_k \neq \emptyset \Rightarrow$ existují nezávislé $B_0, \ldots, B_{k-1} \in S_k \cap S'_k$.

Definujme:

Spojení $\mathbf{S}_s'' = \mathbf{S}_h\mathbf{S}_k' = \mathbf{S}_k'\mathbf{S}_h$ je $\mathbf{S}_s'' \subset \mathbf{S}_n$ minimální dimense s, pro který $\mathbf{S}_h, \mathbf{S}_k' \subset \mathbf{S}_s''$.

Axiomy oddělování:

S6. $(A, B, C) \in \mu \Rightarrow A, B, C \in \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_n,\ A \neq B \neq C \neq A,\ (C, B, A) \in \mu$.

S7. $A, B \in \mathbf{S}_n,\ A \neq B \Rightarrow$ existuje $(A, B, C) \in \mu$.

S8. $(A, B, C) \in \mu \Rightarrow (B, A, C), (A, C, B) \notin \mu$.

S9. $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_n \Rightarrow$ existují $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1$ tak, že

a) $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1,\ \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset$;

b) $X \in \mathbf{M}_1$ a $Y \in \mathbf{M}_2 \Rightarrow$ existuje $B \in \mathbf{S}_1$ tak, že $(X, B, Y) \in \mu$;

c) $X, Y \in \mathbf{M}_1$ nebo $X, Y \in \mathbf{M}_2 \Rightarrow$ neexistuje $B \in \mathbf{S}_1$ tak, že $(X, B, Y) \in \mu$.

Axiom Dedekindův pro oddělování:

S10. Jestliže $A, B \in \mathbf{S}_n,\ A \neq B,\ X \in \mathbf{D} \Leftrightarrow (A, X, B) \in \mu,\ \emptyset \neq \mathbf{D}' \subset \mathbf{D},\ \emptyset \neq \mathbf{D}'' \subset \mathbf{D}$, a platí-li

a) $\mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'' = \mathbf{D},\ \mathbf{D}' \cap \mathbf{D}'' = \emptyset$,

b) $Y \in \mathbf{D}'$ a $(A, X, Y) \in \mu \Rightarrow X \in \mathbf{D}'$,

c) $Y \in \mathbf{D}''$ a $(Y, X, B) \in \mu \Rightarrow X \in \mathbf{D}''$,

potom existuje $H \in \mathbf{D}$ tak, že

d) $(A, X, H) \in \mu \Rightarrow X \in \mathbf{D}'$
$(H, X, B) \in \mu \Rightarrow X \in \mathbf{D}''$.

Axiomy shodnosti:

S11. a) $(A, B, C, D) \in \sigma \Rightarrow A, B, C, D \in \mathbf{S}_n,\ A \neq B,\ C \neq D$.

b) $A, B \in \mathbf{S}_n$ a $A \neq B \Rightarrow (A, B, B, A) \in \sigma$.

S12. $A, B, C, E \in \mathbf{S}_n,\ A \neq B,\ C \neq E \Rightarrow$ existuje právě jeden $D \in CE = \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_n$ tak, že $(D, C, E) \notin \mu$ a $(A, B, C, D) \in \sigma$.

S13. $(A, B, C, D), (C, D, E, F) \in \sigma \Rightarrow (A, B, E, F) \in \sigma$.

S14. $(A, B, C), (D, E, F) \in \mu$ a $(A, B, D, E), (B, C, E, F) \in \sigma \Rightarrow (A, C, D, F) \in \sigma$.

S15. Jestliže nezávislé $A, B, C \in \mathbf{S}_n$, nezávislé $D, E, G \in \mathbf{S}_n$ a $(A, B, D, E) \in \sigma$, potom existuje právě jeden $F \in DEG = \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_n$ tak, že $F \notin DE = \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2$, $(A, C, D, F), (B, C, E, F) \in \sigma$ a $X \in DE \Rightarrow (F, X, G) \notin \mu$.

S16. Nezávislé $A, B, C \in \mathbf{S}_n$, nezávislé $D, E, F \in \mathbf{S}_n$, (A, B, D, E), (A, C, D, F), $(B, C, E, F) = \sigma$, $(A, G, B), (D, H, E) \in \mu$, $(A, G, D, H) \in \sigma \Rightarrow (C, G, F, H) \in \sigma$.

Kolmost $\perp$ dvou podprostorů $\boldsymbol{S}'_h, \boldsymbol{S}_k \subset \boldsymbol{S}_n$ pro $1 \leqq h \leqq k \leqq n - 1$ definujme takto:

$\boldsymbol{S}'_1 \perp \boldsymbol{S}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{S}'_1 \cap \boldsymbol{S}_1 = B$ a existují body $C, D \in \boldsymbol{S}'_1$ a $F \in \boldsymbol{S}_1$ různé od B tak, že $(C, B, D) \in \mu$ a $(B, C, B, D), (F, C, F, D) \in \sigma$.

$\boldsymbol{S}'_1 \perp \boldsymbol{S}_k \Leftrightarrow \boldsymbol{S}'_1 \cap \boldsymbol{S}_k = B$ a $\boldsymbol{S}'_1 \perp \boldsymbol{S}_1$ pro každou $\boldsymbol{S}_1 = BX \subset \boldsymbol{S}_k$.

$\boldsymbol{S}'_h \perp \boldsymbol{S}_k \Leftrightarrow \boldsymbol{S}'_h \cap \boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{S}''_{h-1}$ a existuje $\boldsymbol{S}'_1 \subset \boldsymbol{S}'_h$ tak, že $\boldsymbol{S}'_1 \perp \boldsymbol{S}_k$.

Z axiomů S1 – S5 a S6 – S9, S11 – S16 lze odvodit obvyklé věty o incidenci a kolmosti podprostorů, jejichž důkazy jsou podrobně uvedeny v [4].

Dále z axiomů S1 – S16 plyne, že každý absolutní prostor $\boldsymbol{S}_n$ splňuje buď axiom Euklidův E nebo axiom Lobačevského L (místo $\boldsymbol{S}$ pak píšeme $\boldsymbol{E}$ nebo $\boldsymbol{L}$; viz [4], str. 19, a [5], str. 92 – 93):

E. $\boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{E}_2 \subset \boldsymbol{E}_n$, $B \in \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 \Rightarrow$ existuje právě jedna $\boldsymbol{E}'_1 \subset \boldsymbol{E}_2$ tak, že $B \in \boldsymbol{E}'_1$ a $\boldsymbol{E}'_1 \cap \boldsymbol{E}_1 = \emptyset$.

L. $\boldsymbol{L}_1 \subset \boldsymbol{L}_2 \subset \boldsymbol{L}_n$, $B \in \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 \Rightarrow$ existují aspoň dvě různé $\boldsymbol{L}'_1 \subset \boldsymbol{L}_2$ tak, že $B \in \boldsymbol{L}'_1$ a $\boldsymbol{L}'_1 \cap \boldsymbol{L}_1 = \emptyset$.

Důležitým příkladem absolutního prostoru $\boldsymbol{S}_n$ je *analytický model* Euklidova prostoru $\boldsymbol{E}_n$ a *Beltrami-Kleinův model* Lobačevského prostoru $\boldsymbol{L}_n$ definované následovně.

Buď $\boldsymbol{E}_n$ euklidovský prostor dimense $n \geqq 2$ z [2], str. 13 – 14, a pro $k = 1, \ldots, n - 1$ buďte $\boldsymbol{E}_k \subset \boldsymbol{E}_n$ jeho k-rozměrné podprostory z [2], str. 50. Definujme podmnožinu $\mu_{\boldsymbol{E}} \subset \boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n$ a podmnožinu $\sigma_{\boldsymbol{E}} \subset \boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n$ takto:

$(A, B, C) \in \mu_{\boldsymbol{E}} \Leftrightarrow A, B, C \in \boldsymbol{E}_n$, $A \neq B \neq C \neq A$, a pro vzdálenosti v $\boldsymbol{E}_n$ platí $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$(A, B, C, D) \in \sigma_{\boldsymbol{E}} \Leftrightarrow A, B, C, D \in \boldsymbol{E}_n$, $A \neq B$, $C \neq D$, a pro vzdálenosti v $\boldsymbol{E}_n$ platí $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Užitím výsledků z [2] plyne, že tento $\boldsymbol{E}_n$ pak splňuje axiomy S1 – S16 a E, a nazveme ho *analytický model* Euklidova prostoru.

Buď dále $\boldsymbol{P}_n = \overline{\boldsymbol{E}}_n \supset \boldsymbol{E}_n$ jeho projektivní rozšíření z [3], str. 12 – 13, $\boldsymbol{Q}_{n-1} \subset \boldsymbol{E}_n$ $(n - 1)$-rozměrná koule z [3], str. 160 – 161, $\boldsymbol{L}_n \subset \boldsymbol{E}_n$ vnitřek $\boldsymbol{Q}_{n-1}$ z [3], str. 132. Definujme pro $k = 1, \ldots, n - 1$ podmnožiny $\boldsymbol{L}_k \subset \boldsymbol{L}_n$ a podmnožinu $\mu_{\boldsymbol{L}} \subset \boldsymbol{L}_n \times \boldsymbol{L}_n \times \boldsymbol{L}_n$ a podmnožinu $\sigma_{\boldsymbol{L}} \subset \boldsymbol{L}_n \times \boldsymbol{L}_n \times \boldsymbol{L}_n \times \boldsymbol{L}_n$ takto:

$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{L}_n \cap \boldsymbol{E}_k \neq \emptyset$, kde podprostor $\boldsymbol{E}_k \subset \boldsymbol{E}_n$ je z [2], str. 50.

$(A, B, C) \in \mu_{\boldsymbol{L}} \Leftrightarrow A, B, C \in \boldsymbol{L}_n \subset \boldsymbol{E}_n$, $A \neq B \neq C \neq A$, a pro vzdálenosti v $\boldsymbol{E}_n$ platí $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$(A, B, C, D) \in \sigma_{\boldsymbol{L}} \Leftrightarrow A, B, C, D \in \boldsymbol{L}_n \subset \boldsymbol{P}_n$, a existují body $X, Y, U, V \in \boldsymbol{Q}_{n-1} \subset \boldsymbol{P}_n$ tak, že mají v $\boldsymbol{P}_n$ dvojpoměry buď $(ABXY) = (CDUV)$ nebo $(ABXY) = (CDVU)$.

Místo předchozího lze definovat:

$(A, B, C, D) \in \sigma_L \Leftrightarrow A, B, C, D \in \mathbf{L}_n \subset \mathbf{P}_n,\ A \neq B,\ C \neq D$, a existuje kolineace K prostoru $\mathbf{P}_n$ z [3], str. 132, zobrazující $K(\mathbf{Q}_{n-1}) = \mathbf{Q}_{n-1}$ a $K(A) = C$, $K(B) = D$. (Zřejmě všechny K zobrazující $K(\mathbf{Q}_{n-1}) = \mathbf{Q}_{n-1}$ tvoří podgrupu grupy všech kolineací prostoru $\mathbf{P}_n$.)

Užitím výsledků z [2] a [3] plyne, že tento $\mathbf{L}_n \subset \mathbf{E}_n$ pak splňuje axiomy S1 – S16 a L, a nazveme ho *Beltrami-Kleinův model* Lobačevského prostoru.

2. PRAVOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ A OTÁČENÍ

Věty (1) – (11) uvádíme zde bez důkazů. Důkazy těchto vět jsou předmětem práce, která vyjde ve Sborníku prací Vysoké školy dopravní a Výzkumného ústavu dopravního.

Pravoúhlým promítáním f prostoru $\mathbf{S}_n$ do podprostoru $\mathbf{S}'_{n-1} \subset \mathbf{S}_n$ rozumíme zobrazení, které každému bodu $X \in \mathbf{S}_n$ přiřazuje bod $f(X) = \mathbf{S}_1^X \cap \mathbf{S}'_{n-1}$, kde $\mathbf{S}_1^X \perp \mathbf{S}'_{n-1}$ a $X \in \mathbf{S}_1^X$. Zřejmě platí: $f(X) = X \Leftrightarrow X \in \mathbf{S}'_{n-1}$.

Z axiomů S1 – S9 a S11 – S16 jsou pro pravoúhlé promítání f prostoru $\mathbf{S}_n$ do podprostoru $\mathbf{S}'_{n-1}$ odvozeny věty (1) – (7) ($\not\perp$ značí negaci $\perp$):

(1) a) $\mathbf{S}_k \perp \mathbf{S}'_{n-1},\ 1 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow f(\mathbf{S}_k) = \mathbf{S}'_{k-1} = \mathbf{S}_k \cap \mathbf{S}'_{n-1}$.

b) $f(\mathbf{S}_k) \subset \mathbf{S}'_{k-1},\ 1 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow \mathbf{S}_k \perp \mathbf{S}'_{n-1}$.

(2) $\mathbf{S}_k \not\perp \mathbf{S}'_{n-1},\ 1 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow f(\mathbf{S}_k) \subset \mathbf{S}'_k \subset \mathbf{S}'_{n-1},\ f(\mathbf{S}_k) \not\subset \mathbf{S}'_{k-1}$.

(3) $(A, X, B) \in \mu \Rightarrow$ buď $f(A) = f(X) = f(B)$ nebo $(f(A), f(X), f(B)) \in \mu$.

(4) $\mathbf{S}_k \cap \mathbf{S}'_{n-1} = \mathbf{S}''_{k-1},\ \mathbf{S}_k \not\perp \mathbf{S}'_{n-1},\ \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_k,\ \mathbf{S}_1 \perp \mathbf{S}''_{k-1},\ 2 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow f(\mathbf{S}_1) \subset \mathbf{S}'_1 \perp \mathbf{S}''_{k-1}, f(\mathbf{S}_1) \not\subset \mathbf{S}'_0$.

(5) $\mathbf{S}_k \cap \mathbf{S}'_{n-1} = \mathbf{S}''_{k-1},\ \mathbf{S}_k \not\perp \mathbf{S}'_{n-1},\ f(\mathbf{S}_k) \subset \mathbf{S}'_k,\ \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k\mathbf{S}'_k,\ \mathbf{S}_1 \perp \mathbf{S}_k,\ 2 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow f(\mathbf{S}_1) \subset \mathbf{S}'_1 \perp \mathbf{S}''_{k-1}, f(\mathbf{S}_1) \not\subset \mathbf{S}'_0$.

(6) $\mathbf{S}_k \cap \mathbf{S}'_{n-1} = \mathbf{S}''_{k-1},\ \mathbf{S}_k \perp \mathbf{S}'_{n-1},\ \mathbf{S}_1 \perp \mathbf{S}_k,\ 2 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow f(\mathbf{S}_1) \subset \mathbf{S}'_1 \perp \mathbf{S}''_{k-1}$, $f(\mathbf{S}_1) \not\subset \mathbf{S}'_0$.

(7) $\mathbf{S}_k \cap \mathbf{S}'_{n-1} = \mathbf{S}''_{k-1},\ \mathbf{S}_k \not\perp \mathbf{S}'_{n-1},\ A_i \in \mathbf{S}_k,\ A_i \notin \mathbf{S}''_{k-1},\ A_iB_i \perp \mathbf{S}''_{k-1},\ B_i \in \mathbf{S}''_{k-1},\ A'_i = f(A_i),\ i = 1, 2,\ 2 \leqq k \leqq n-1 \Rightarrow A'_i \notin \mathbf{S}_k,\ A'_iB_i \perp \mathbf{S}''_{k-1}$, a úhly $A_iB_iA'_i$ jsou *shodné* ve smyslu definice z [6], str. 93.

Z axiomů S1 – S9 jsou odvozeny věty (8) a (9):

(8) Buď $\mathbf{S}_k \subset \mathbf{S}_{k+1} \subset \mathbf{S}_n,\ 0 \leqq k \leqq n-1$. Potom existují právě dvě neprázdné množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{S}_{k+1} - \mathbf{S}_k$ (až na jejich pořadí) tak, že platí:

a) $\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{S}_{k+1} - \boldsymbol{S}_k$, $\boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 = \emptyset$.

b) $X \in \boldsymbol{M}_1$ a $Y \in \boldsymbol{M}_2 \Rightarrow$ existuje bod $B \in \boldsymbol{S}_k$ tak, že $(X, B, Y) \in \boldsymbol{\mu}$.

c) $X, Y \in \boldsymbol{M}_1$ nebo $X, Y \in \boldsymbol{M}_2 \Rightarrow$ neexistuje bod $B \in \boldsymbol{S}_k$ tak, že $(X, B, Y) \in \boldsymbol{\mu}$.

Množiny $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ nazýváme *opačné poloprostory* v $\boldsymbol{S}_{k+1}$ vzhledem k $\boldsymbol{S}_k$; pro $k = 0, 1$ užíváme názvy *opačné polopřímky*, *opačné poloroviny*.

(9) $\boldsymbol{S}_k, \overline{\boldsymbol{S}}_k \subset \boldsymbol{S}_{k+1} \subset \boldsymbol{S}_n, \boldsymbol{S}_k \cap \overline{\boldsymbol{S}}_k = \boldsymbol{S}_{k-1}, Z \in \boldsymbol{S}_{k+1}, 1 \leqq k \leqq n - 1 \Rightarrow$ existují $X \in \boldsymbol{S}_k$ a $Y \in \overline{\boldsymbol{S}}_k$ tak, že $X \neq Y$ a $Z \in XY$.

Buďte dány dva podprostory $\boldsymbol{S}_{n-1}, \boldsymbol{S}'_{n-1} \subset \boldsymbol{S}_n$ tak, že $\boldsymbol{S}_{n-1} \cap \boldsymbol{S}'_{n-1} = \boldsymbol{S}''_{n-2}$, $n \geqq 3$. Označme $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2 \subset \boldsymbol{S}_{n-1} - \boldsymbol{S}''_{n-2}$ a $\boldsymbol{M}'_1, \boldsymbol{M}'_2 \subset \boldsymbol{S}'_{n-1} - \boldsymbol{S}''_{n-2}$ opačné poloprostory v $\boldsymbol{S}_{n-1}$ a $\boldsymbol{S}'_{n-1}$ vzhledem k $\boldsymbol{S}''_{n-2}$. *Otáčením* f podprostoru $\boldsymbol{S}_{n-1}$ do $\boldsymbol{S}'_{n-1}$ kolem $\boldsymbol{S}''_{n-2}$ rozumíme zobrazení $\boldsymbol{S}_{n-1}$ do $\boldsymbol{S}'_{n-1}$ definované takto:

a) $X \in \boldsymbol{S}''_{n-2} \Rightarrow f(X) = X$.

b) $X \in \boldsymbol{M}_i$, $i = 1, 2$, $XX_0 \perp \boldsymbol{S}''_{n-2}$, $X_0 \in \boldsymbol{S}''_{n-2} \Rightarrow f(X) = X' \in \boldsymbol{M}'_i$, $X'X_0 \perp \boldsymbol{S}''_{n-2}$, $(X, X_0, X', X_0) \in \boldsymbol{\sigma}$.

Z axiomů S1 – S9 a S11 – S16 je pro otáčení f podprostoru $\boldsymbol{S}_{n-1}$ do $\boldsymbol{S}'_{n-1}$ odvozena věta (10):

(10) a) Otáčení f je vzájemně jednoznačné zobrazení $\boldsymbol{S}_{n-1}$ na $\boldsymbol{S}'_{n-1}$.

b) $\boldsymbol{S}_k \subset \boldsymbol{S}_{n-1} \Rightarrow f(\boldsymbol{S}_k) = \boldsymbol{S}'_k \subset \boldsymbol{S}'_{n-1}$.

c) $X, Y, Z \in \boldsymbol{S}_{n-1}$, $(X, Y, Z) \in \boldsymbol{\mu} \Rightarrow f(X, Y, Z) = (X', Y', Z') \in \boldsymbol{\mu}$.

d) $X, Y \in \boldsymbol{S}_{n-1}$, $X \neq Y$, $f(X) = X'$, $f(Y) = Y' \Rightarrow (X, Y, X', Y') \in \boldsymbol{\sigma}$.

e) $X, Y, U, V \in \boldsymbol{S}_{n-1}$, $(X, Y, U, V) \in \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow f(X, Y, U, V) = (X', Y', U', V') \in \boldsymbol{\sigma}$.

Z axiomů S1 – S16 plyne (viz [6], str. 48 – 67, a věta 25, str. 94) věta (11):

(11) Buďte dány dva různé body $A, B \in \boldsymbol{S}_n$. Potom existuje právě jedna funkce m (*míra* v $\boldsymbol{S}_n$), která každým dvěma různým bodům $X, Y \in \boldsymbol{S}_n$ přiřazuje reálné číslo $m(X, Y) > 0$ (*vzdálenost bodů* X, Y) tak, že platí:

a) $m(A, B) = 1$.

b) $(X, Y, Z) \in \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow m(X, Y) + m(Y, Z) = m(X, Z)$.

c) $(X, Y, U, V) \in \boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow m(X, Y) = m(U, V)$.

d) $X, Y \in \boldsymbol{S}_n$, $X \neq Y$, $r > 0$ reálné číslo $\Rightarrow$ existuje právě jeden bod $Z \in \boldsymbol{S}_1 = XY \subset \boldsymbol{S}_n$ tak, že $m(X, Z) = r$ a $(Z, X, Y) \notin \boldsymbol{\mu}$.

3. SYSTÉMY ZOBRAZENÍ ABSOLUTNÍCH PROSTORŮ $\boldsymbol{S}_n$ DO $\boldsymbol{S}_{n-k}$

Systémy zobrazení, jež jsou dále zavedeny, jsou zobecněním zobrazovacích metod prostoru do roviny studovaných v tzv. deskriptivní geometrii. Toto zobecnění se děje ve dvojím smyslu: jednak v dimensích $n \geqq 3$ a jednak bez užití Euklidova postulátu o rovnoběžkách. Jde přitom o zobrazení zachovávající pokud možno geometrické vlastnosti, tj. základní pojmy: podprostory, oddělování a shodnost, přičemž tato zobrazení budeme skládat z pravoúhlých promítání a otáčení. Kromě vyjmenovaných zobrazení budeme ještě užívat zobrazení, které nazveme *kótování.*

Buď dán podprostor $\boldsymbol{S}_{n-1} \subset \boldsymbol{S}_n$. Označme $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2 \subset \boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_{n-1}$ opačné poloprostory v $\boldsymbol{S}_n$ vzhledem k $\boldsymbol{S}_{n-1}$, f_1 pravoúhlé promítání $\boldsymbol{S}_n$ do $\boldsymbol{S}_{n-1}$, $f_1(X) = X_1$ pro $X \in \boldsymbol{S}_n$. *Kótováním t* prostoru $\boldsymbol{S}_n$ vzhledem k podprostoru $\boldsymbol{S}_{n-1}$ rozumíme zobrazení, které každému bodu $X \in \boldsymbol{S}_n$ přiřazuje reálné číslo $t(X)$ (*kóta bodu* X) takto:

a) Je-li $X \in \boldsymbol{S}_{n-1}$, pak $t(X) = 0$.

b) Je-li $X \in \boldsymbol{M}_1$ resp. $X \in \boldsymbol{M}_2$, pak $t(X) = +(\overline{X, X_1})$ resp. $t(X) = -(\overline{X, X_1})$, kde $(\overline{X, X_1})$ je vzdálenost bodů X, X_1 při určité zvolené míře v $\boldsymbol{S}_n$ (viz (11)).

Množinu všech reálných čísel budeme v dalším značit $\mathscr{R}$.

(H^k) **systémy zobrazení $\boldsymbol{S}_n$ do $\boldsymbol{S}^\pi_{n-k}$**. Nejdříve uvedeme předpoklady a označení.

a) Označení a předpoklady. $\boldsymbol{S}^\pi_{n-k} \subset \ldots \subset \boldsymbol{S}^\pi_{n-1} \subset \boldsymbol{S}^\pi_n = \boldsymbol{S}_n$, $2 \leqq n - k \leqq n - 1$, $n \geqq 3$. $\boldsymbol{S}^\nu_{n-i}, \boldsymbol{S}^\lambda_{n-i} \subset \boldsymbol{S}^\pi_{n-i+1}$, $\boldsymbol{S}^\nu_{n-i} \perp \boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$, $\boldsymbol{S}^\lambda_{n-i} \not\perp \boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$, $i = 1, \ldots, k$. $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-1} = \boldsymbol{S}^\nu_{n-i} \cap \cap \boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$ nebo $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-1} = \boldsymbol{S}^\lambda_{n-i} \cap \boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$, $i = 1, \ldots, k$. $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-j} \perp \boldsymbol{S}^\pi_{n-i-j}$, $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-j-1} = = \boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-j} \cap \boldsymbol{S}^\pi_{n-i-j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k - i$. $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-k-1} \neq \boldsymbol{S}^{xj}_{n-k-1}$ pro $i, j = = 1, \ldots, k$, $i \neq j$.

b) Označme: $f^i_1, f^i_\nu, f^i_\lambda$ pravoúhlé promítání $\boldsymbol{S}^\pi_{n-i+1}$ do $\boldsymbol{S}^\pi_{n-i}, \boldsymbol{S}^\nu_{n-i}, \boldsymbol{S}^\lambda_{n-i}$, $i = 1, \ldots \ldots, k$. f^i_0 otáčení $\boldsymbol{S}^\nu_{n-i}$ nebo $\boldsymbol{S}^\lambda_{n-i}$ do $\boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$ kolem $\boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-1}$, $i = 1, \ldots, k$. $f^i_2 = f^i_\nu f^i_0$ nebo $f^i_2 = f^i_\lambda f^i_0$ nebo $f^i_2 = f^i_\lambda f^i_1$, $i = 1, \ldots, k$. t^i kótování $\boldsymbol{S}^\pi_{n-i+1}$ vzhledem k $\boldsymbol{S}^\pi_{n-i}$, $i = = 1, \ldots, k$.

c) Pro $X \in \boldsymbol{S}_n$ označme:

$X^1_1 = f^1_1(X)$, $X^1_\nu = f^1_\nu(X)$, $X^1_\lambda = f^1_\lambda(X)$, $X^1_2 = f^1_2(X)$, $t^1_X = t^1(X)$,

$X^{i+1}_{j_1 \ldots j_i 1} = f^{i+1}_1(X^i_{j_1 \ldots j_i})$, $X^{i+1}_{j_1 \ldots j_i \nu} = f^{i+1}_\nu(X^i_{j_1 \ldots j_i})$,

$X^{i+1}_{j_1 \ldots j_i \lambda} = f^{i+1}_\lambda(X^i_{j_1 \ldots j_i})$, $X^{i+1}_{j_1 \ldots j_i 2} = f^{i+1}_2(X^i_{j_1 \ldots j_i})$, $t^{i+1}_X = t^{i+1}(X^i_{1 \ldots 1})$,

$i = 1, \ldots, k - 1$, indexy $j_1, \ldots, j_i$ jsou rovné 1 nebo 2.

d) Pro $X \in \boldsymbol{S}_n$ vybereme z bodů $X^k_{j_1 \ldots j_k} \in \boldsymbol{S}^\pi_{n-k}$ a z kót $t^1_X, \ldots, t^k_X \in \mathscr{R}$ právě $k + 1$ *hlavních obrazů* $h_s(X)$, $s = 1, \ldots, k + 1$ takto:

Pro $s = 1$ je $h_1(X) = X^k_{1 \ldots 1} \in \boldsymbol{S}^\pi_{n-k}$.

Pro $i = 1, \ldots, k$ je buď $h_{i+1}(X) = X^k_{j_1 \ldots j_k} \in \boldsymbol{S}^\pi_{n-k}$, kde $j_i = 2$, $j_r = 1$, $r = 1, \ldots, k$, $r \neq i$, nebo neexistuje-li tento vybraný bod $X^k_{j_1 \ldots j_k}$, je $h_{i+1}(X) = t^i_X \in \mathscr{R}$.

Podle předpokladů a), (5), (6) a (10) jsou body $h_1(X)$, $h_{i+1}(X) \in \boldsymbol{S}^i_1 \subset \boldsymbol{S}^\pi_{n-k}$, $\boldsymbol{S}^i_1 \perp \boldsymbol{S}^{xi}_{n-k-1}$.

(H^k) *systémem zobrazení* $\boldsymbol{S}_n$ do $\boldsymbol{S}^{\pi}_{n-k}$ rozumíme $(k+1)$-tici zobrazení $(h_1, h_2, \ldots$ $\ldots, h_{k+1})$.

Každý (H^k) systém je jednoznačně určen volbou jednotlivých k systémů $(I) = (f_1^i, t^i)$ resp. $(II) = (f_1^i, f_\nu^i f_0^i)$ resp. $(III) = (f_1^i, f_\lambda^i f_0^i)$ resp. $(IV) = (f_1^i, f_\lambda^i f_1^i)$ zobrazení $\boldsymbol{S}^{\pi}_{n-i+1}$ do $\boldsymbol{S}^{\pi}_{n-i}$ pro $i = 1, \ldots, k$, a budeme ho symbolicky značit $(H^k) = (H_1, \ldots, H_k)$, kde římské číslice H_i jsou rovné I resp. II resp. III resp. IV. Celkem máme 4^k systémů (H^k), z nichž každý lze převést na systém $(I^k) = (I, \ldots, I)$, a současně tak lze zjistit, zda k daným hlavním obrazům existuje vzor, přičemž předpokládáme, že pro jeden bod $D^i \in \boldsymbol{S}^{\nu}_{n-i}$ nebo $D^i \in \boldsymbol{S}^{\lambda}_{n-i}$, $D^i \notin \boldsymbol{S}^{xi}_{n-i-1}$, je dán bod $h_1(D^i) = D^{ik}_{1\ldots1}$ a kóty $t^i_{D^i} > 0$, $t^j_{D^i} = 0$, $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$.

Užitím vět (1), (2), (3) a (10) plynou snadno věty (12) a (13):

(12) Je-li $(h_1, \ldots, h_{k+1})$ systém (H^k) zobrazení $\boldsymbol{S}_n$ do $\boldsymbol{S}^{\pi}_{n-k}$, potom pro body $X, Y \in \boldsymbol{S}_n$, $X \neq Y$, je aspoň jeden hlavní obraz $h_i(X) \neq h_i(Y)$, $1 \leqq i \leqq k+1$.

(13) Je-li h_i zobrazení $\boldsymbol{S}_n$ do $\boldsymbol{S}^{\pi}_{n-k}$ z (H^k) systému $(h_1, \ldots, h_{k+1})$, potom platí:

a) $\boldsymbol{S}_r \subset \boldsymbol{S}_n$, $1 \leqq r \leqq n-1 \Rightarrow h_i(\boldsymbol{S}_r) \subset \boldsymbol{S}'_d$, $h_i(\boldsymbol{S}_r) \not\subset \boldsymbol{S}'_{d-1}$, $r - k \leqq d \leqq r$, $0 \leqq d \leqq n - k$.

b) $(X, Y, Z) \in \mu \Rightarrow$ buď $h_i(X) = h_i(Y) = h_i(Z)$ nebo $(h_i(X), h_i(Y), h_i(Z)) \in \mu$.

4. GRAFICKÝ VYJADŘOVACÍ JAZYK PRO $\boldsymbol{L}_n$ A $\boldsymbol{E}_n$

Zavedeme jej pomocí Beltrami-Kleinova modelu následujícími úmluvami 1a) – d).

Úmluvy 1. a) Předpokládáme znalost obvyklého grafického vyjadřování pro rovinu $\boldsymbol{E}^{\pi}_2 \subset \boldsymbol{E}_n$ Euklidova prostoru dimense $n \geqq 2$, přičemž body $B \in \boldsymbol{E}^{\pi}_2$, přímky $\boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{E}^{\pi}_2$, oddělování $\mu_{\boldsymbol{E}} \cap \boldsymbol{E}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{E}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{E}^{\pi}_2$ a shodnost $\sigma_{\boldsymbol{E}} \cap \boldsymbol{E}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{E}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{E}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{E}^{\pi}_2$, kde $\mu_{\boldsymbol{E}}$ a $\sigma_{\boldsymbol{E}}$ je oddělování a shodnost v $\boldsymbol{E}_n$, graficky interpretujeme neboli rýsujeme známým způsobem na čtvrtce papíru představující jako množina graficky interpretovaných bodů rovinu $\boldsymbol{E}^{\pi}_2$.

b) Podmnožiny $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{C} \not\subset \boldsymbol{E}^{\pi}_2$, budeme graficky interpretovat tak, že si vhodně zvolíme zobrazení množiny $\boldsymbol{C}$ do roviny $\boldsymbol{E}^{\pi}_2$ a budeme graficky interpretovat obraz množiny $\boldsymbol{C}$ v rovině $\boldsymbol{E}^{\pi}_2$.

c) Grafické vyjadřování pro rovinu $\boldsymbol{L}^{\pi}_2 \subset \boldsymbol{L}_n$ Lobačevského prostoru dimense $n \geqq 2$ převedeme užitím Beltrami-Kleinova modelu $\boldsymbol{L}_n \subset \boldsymbol{E}_n$ na grafické vyjadřování pro rovinu $\boldsymbol{E}^{\pi}_2 \supset \boldsymbol{L}^{\pi}_2$, $\boldsymbol{E}^{\pi}_2 \subset \boldsymbol{E}_n$, přičemž předpokládáme, že $(n-1)$-rozměrná koule $\boldsymbol{Q}_{n-1} \subset \boldsymbol{E}_n$ má střed $\Theta \in \boldsymbol{L}^{\pi}_2$. Přesněji řečeno body $B \in \boldsymbol{L}^{\pi}_2$, přímky $\boldsymbol{L}_1 \subset \boldsymbol{L}^{\pi}_2$, oddělování $\mu_{\boldsymbol{L}} \cap \boldsymbol{L}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{L}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{L}^{\pi}_2$ a shodnost $\sigma_{\boldsymbol{L}} \cap \boldsymbol{L}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{L}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{L}^{\pi}_2 \times \boldsymbol{L}^{\pi}_2$, kde $\mu_{\boldsymbol{L}}$ a $\sigma_{\boldsymbol{L}}$ je oddělování a shodnost v $\boldsymbol{L}_n$, graficky interpretujeme ve smyslu definice Beltrami-Kleinova modelu a známých interpretací z a) pro $\boldsymbol{E}^{\pi}_2 \supset \boldsymbol{L}^{\pi}_2$.

d) Podmnožiny $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{L}_n$, $\boldsymbol{C} \not\subset \boldsymbol{L}_2^\pi$, budeme graficky interpretovat tak, že si vhodně zvolíme zobrazení množiny $\boldsymbol{C}$ do roviny $\boldsymbol{L}_2^\pi$ a budeme graficky interpretovat obraz množiny $\boldsymbol{C}$ v rovině $\boldsymbol{L}_2^\pi$.

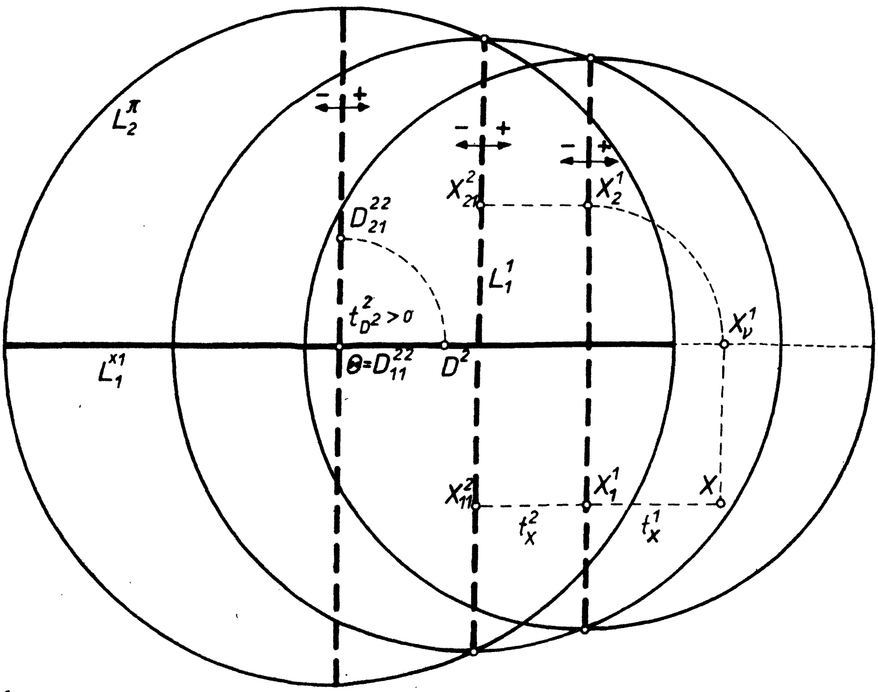
Ukážeme nejdříve grafické vyjadřování vztahů mezi hlavními obrazy $h_i(X)$, $i = 1, \ldots, k + 1$, a kótami $t_X^1, \ldots, t_X^k$ bodu $X \in \boldsymbol{L}_n$ při (H^k) systémech zobrazení $\boldsymbol{L}_n$ do $\boldsymbol{L}_{n-k}^\pi$ pro $n \geqq 3$.

Je-li $n - k > 2$, pak zvolíme $\boldsymbol{L}_2^\pi \subset \ldots \subset \boldsymbol{L}_{n-k}^\pi$ a místo $(\mathrm{H}^k) = (\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_k)$ systému zobrazení $\boldsymbol{L}_n$ do $\boldsymbol{L}_{n-k}^\pi$ užíváme některého ze systémů $(\mathrm{H}^{n-2}) = (\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_k, \mathrm{H}_{k+1}, \ldots, \mathrm{H}_{n-2})$ zobrazení $\boldsymbol{L}_n$ do $\boldsymbol{L}_2^\pi$.

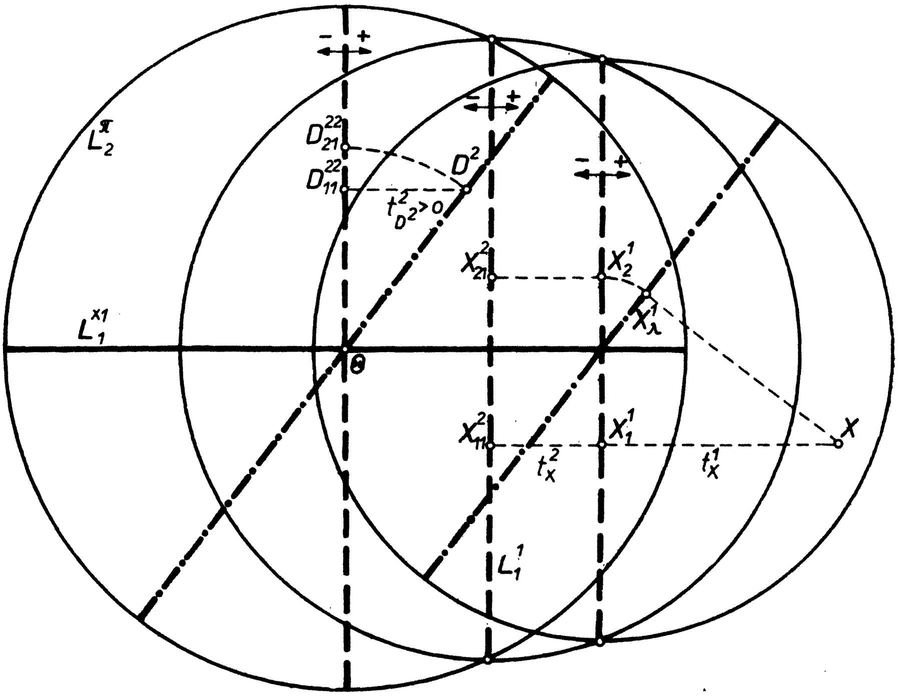
V dalším tedy můžeme předpokládat, že $n - k = 2$ neboli $k = n - 2$. Při grafickém vyjadřování pak předpokládáme, že $(n - 1)$-rozměrná koule $\boldsymbol{Q}_{n-1}$ má střed $\Theta \in \boldsymbol{L}_1^{xi} \subset \boldsymbol{E}_1^{xi}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n - 2$ (viz označení a předpoklady a)–d) pro (H^k) systémy), takže pro $\boldsymbol{L}'_r \perp \boldsymbol{L}_s$, $\Theta \in \boldsymbol{L}_s \subset \boldsymbol{E}_s$, $\boldsymbol{L}'_r \subset \boldsymbol{E}'_r$, $1 \leqq r \leqq s \leqq n - 1$, je současně $\boldsymbol{E}'_r \perp \boldsymbol{E}_s$.

Pro $n = 4$ jsou vztahy mezi hlavními obrazy a kótami bodu $X \in \boldsymbol{L}_4$ při systémech (II, I), (III, I), (IV, I) a (II, II)–(IV, IV) zobrazení $\boldsymbol{L}_4$ do $\boldsymbol{L}_2^\pi$ graficky vyjádřeny na obr. 1, 2, 3a 4. Systémy (I), (II), (III), (IV) pro $n = 3$ a systémy (I, I), (I, II), (I, III), (I, IV) pro $n = 4$ přenecháváme čtenáři.

Analogicky rekurentně pro $n = 5, 6, \ldots$ graficky vyjadřujeme vztahy mezi hlavními obrazy a kótami bodu $X \in \boldsymbol{L}_n$ při systémech (H^{n-2}) zobrazení $\boldsymbol{L}_n$ do $\boldsymbol{L}_2^\pi$.

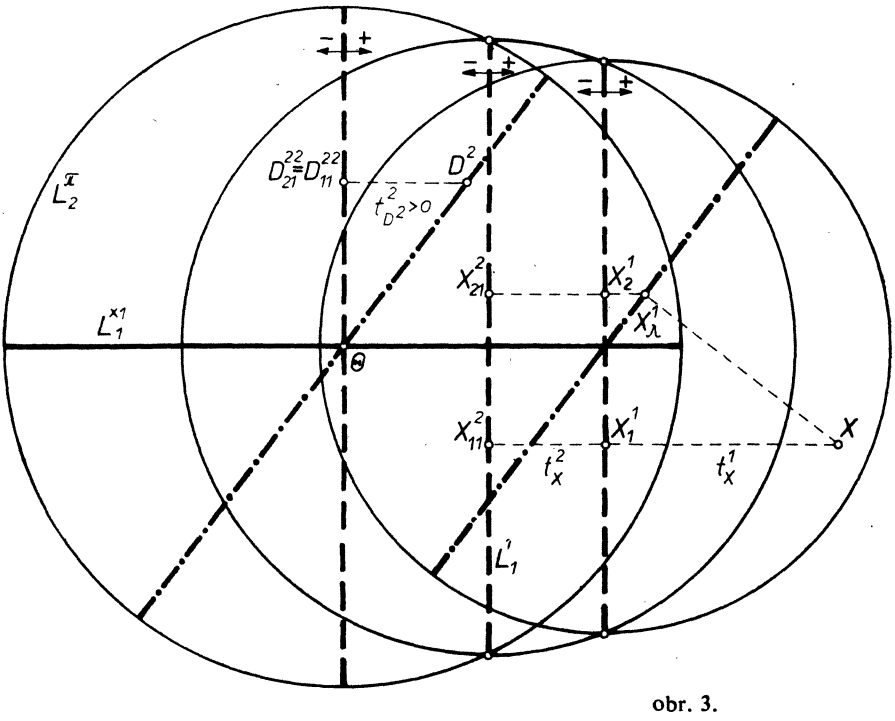


obr. 1.



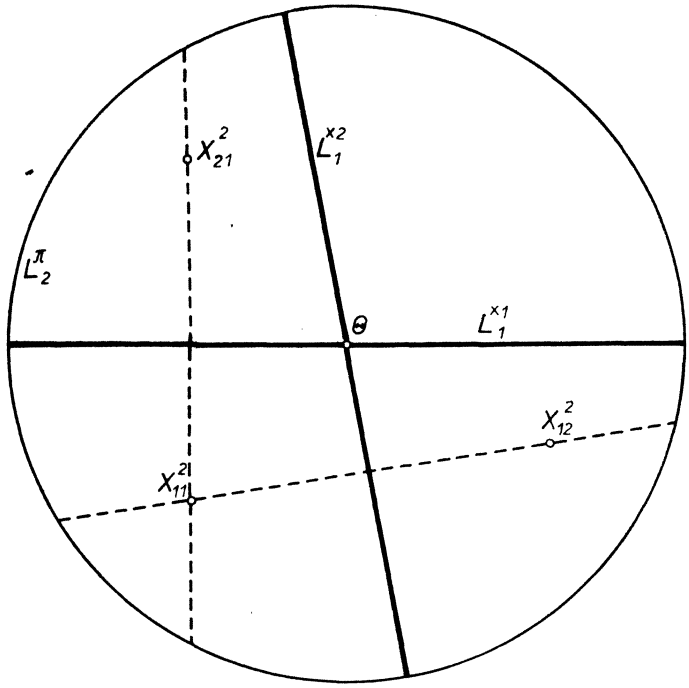
L_2^{π}
D_{21}^{22}
D_{11}^{22}
D^2
$t_{D^2}^2>0$
X_{21}^2
X_2^1
X_λ^1
L_1^{x1}
Θ
X_{11}^2
X_1^1
X
t_X^2
t_X^1
L_1^1

obr. 2.



L_2^{π}
$D_{21}^{22}=D_{11}^{22}$
D^2
$t_{D^2}^2>0$
X_{21}^2
X_2^1
X_λ^1
L_1^{x1}
Θ
X_{11}^2
X_1^1
X
t_X^2
t_X^1
L_1^1

obr. 3.



obr. 4

Užití (H^k) systémů ukážeme na několika příkladech, přičemž vycházíme z následujících úmluv 2a)–c).

Úmluvy 2. a) Bod $X \in \boldsymbol{L}_n$ budeme určovat jeho $n - 1$ hlavními obrazy při zvoleném (H^{n-2}) systému zobrazení $\boldsymbol{L}_n$ do $\boldsymbol{L}_2^{\pi}$.

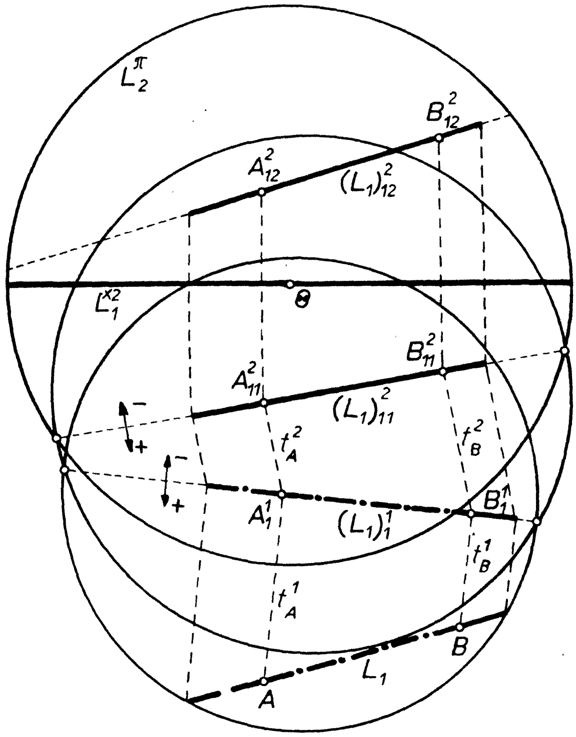
b) Podprostory $\boldsymbol{L}_i \subset \boldsymbol{L}_n$ pro $1 \leqq i \leqq n - 1$ budeme určovat jejich nezávislými body $B_0, \ldots, B_i \in \boldsymbol{L}_i$. Též ostatní podmnožiny $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{L}_n$ budeme určovat, je-li to možné, konečným počtem jejich bodů $B \in \boldsymbol{K}$ (není-li to možné, pak je zpravidla aproximujeme konečným počtem jejich bodů).

c) Předpokládáme znalost konstrukcí odvozených z axiomů S1–S16 a L pro roviny $\boldsymbol{L}_2 \subset \boldsymbol{L}_n$.

Příklad 1. Při zvoleném (H^2) systému zobrazení $\boldsymbol{L}_4$ do $\boldsymbol{L}_2^{\pi}$ je dána $\boldsymbol{L}_1 = AB \subset \boldsymbol{L}_4$ (dány hlavní obrazy bodů A, B). Určete vzdálenost $(\overline{A, B})$ bodů A, B a sestrojte hlavní obrazy přímky $\boldsymbol{L}_1$ v rovině $\boldsymbol{L}_2^{\pi}$.

Řešení. Zvolme systém (I, II), obr. 5. Řešení při systému (I, II) převedeme na řešení při systému (I, I) a vrátíme se pak zpět k systému (I, II).

Příklad 2. Při zvoleném (H^2) systému zobrazení $\mathbf{L}_4$ do $\mathbf{L}_2^\pi$ je dán $\mathbf{L}_3 = ABCD \subset \mathbf{L}_4$ a $\mathbf{L}_1 = FG \subset \mathbf{L}_4$ (dány hlavní obrazy bodů A, B, C, D a F, G). Určete vzájemnou polohu $\mathbf{L}_3$ a $\mathbf{L}_1$, tj. určete dimensi p a s jejich průniku $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_3$ a spojení $\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3$.



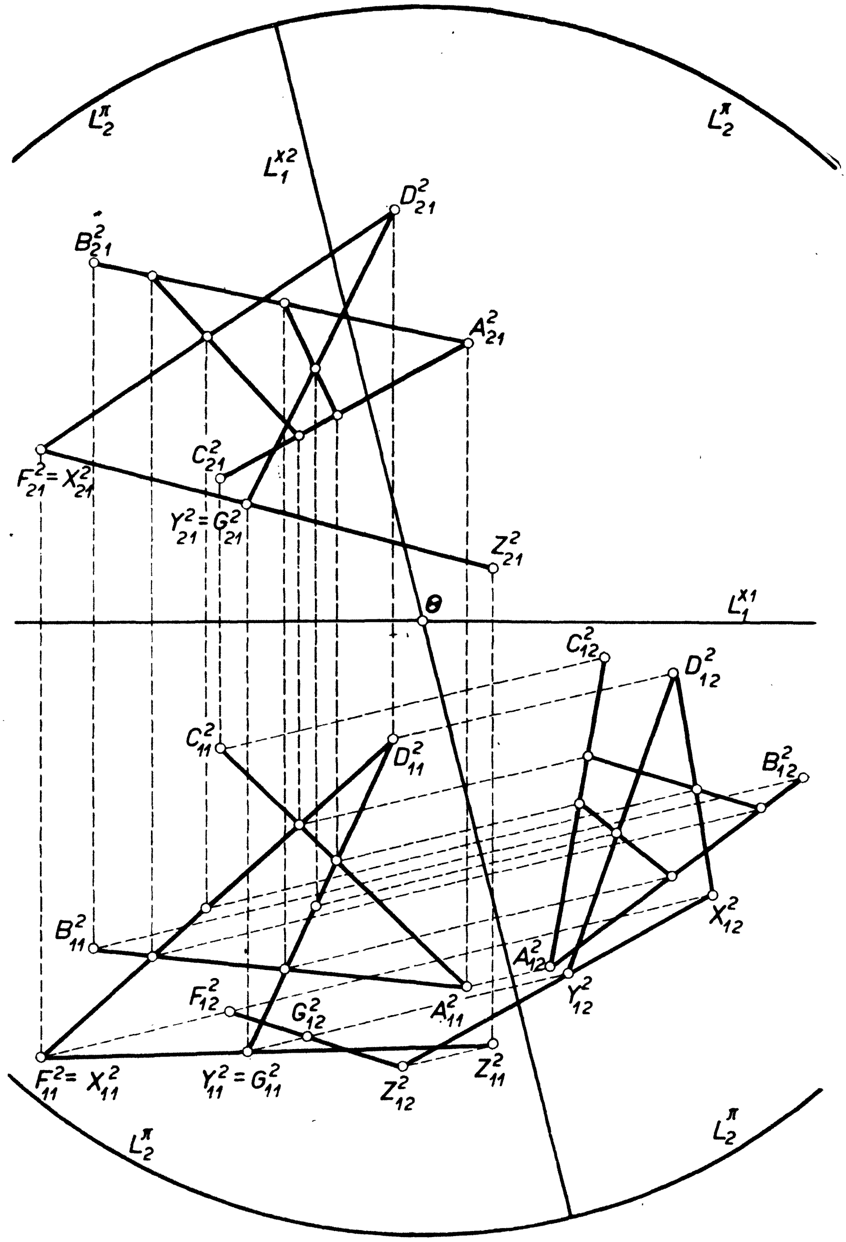
obr. 5.

Řešení. Dimensi s spojení $\mathbf{L}_s$ dvou podprostorů $\mathbf{L}_h = B_0 \dots B_h$ a $\mathbf{L}_k = C_0 \dots C_k$ určíme tak, že užitím (9) postupně zjišťujeme, zda $B_i \in C_0 \dots C_k B_0 \dots B_{i-1}$, a dimensi p jejich průniku $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_h \cap \mathbf{L}_k \neq \emptyset$ určíme (viz [4], str. 21–22) z rovnice $p + s = h + k$; přitom jako kritéria zjišťování, zda $\mathbf{L}_h \cap \mathbf{L}_k \neq \emptyset$, volíme podprostory $\mathbf{L}_{d+1} \supset \mathbf{L}_d \subset \mathbf{L}_h$, $\mathbf{L}_{d+1} \cap \mathbf{L}_k = \mathbf{L}'_d \neq \emptyset$, takže $\mathbf{L}_d \cap \mathbf{L}'_d \subset \mathbf{L}_h \cap \mathbf{L}_k$.

Zvolme některý ze systémů (II, II)–(IV, IV), obr. 6. (Protože hlavní obrazy $F_{11}^2 \neq G_{11}^2$, je též $F \neq G$. Protože hlavní obrazy $A_{11}^2, B_{11}^2, C_{11}^2$ jsou nezávislé body, pak též A, B, C jsou nezávislé body a přitom $D \notin ABC$.)

Protože v našem případě $F \notin ABCD$ a $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_4 = ABCDF$, je $\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_4$, tj. dimense $s = 4$.

Zvolme $\mathbf{L}_2 = FGX \supset \mathbf{L}_1$, kde $X \in \mathbf{L}_3$. Potom je v našem případě $\mathbf{L}_2 \cap \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}'_1 = XY$ a $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}'_1 = Z$ (pokud vzor $Z \in \mathbf{L}_4$ existuje), tj. dimense $p = 0$.



obr. 6.

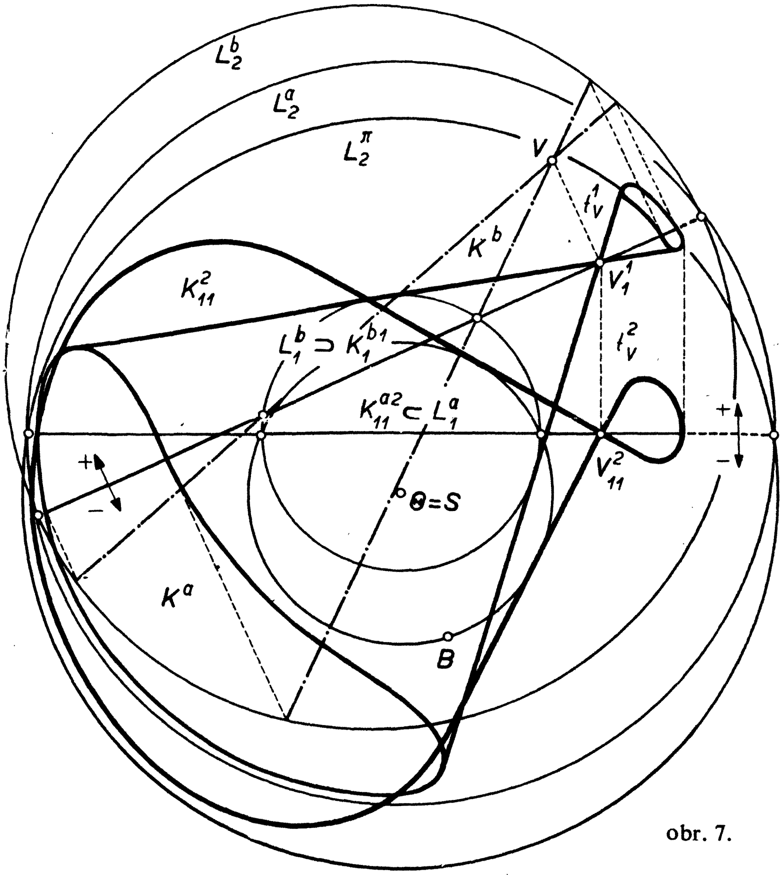
Příklad 3. Při zvoleném (H^2) systému zobrazení $\mathbf{L}_4$ do $\mathbf{L}_2^\pi$ jsou dány dva různé body $S, B \in \mathbf{L}_2^\pi$ a bod $V \in \mathbf{L}_4 - \mathbf{L}_3^\pi$ (dány hlavní obrazy bodů S, B a V). Označme $\mathbf{G}$ množinu všech bodů $X \in \mathbf{L}_3^\pi$ takových. že $(S, X, S, B) \in \sigma$. Dále označme $\mathbf{K}$ množinu všech bodů $Y \in VX \subset \mathbf{L}_4$, kde $X \in \mathbf{G}$. Sestrojte první hlavní obraz $\mathbf{K}_{11}^2$ množiny $\mathbf{K}$.

Řešení provedeme rozkladem na konstrukce v rovinách prostoru L_4.

a) Zvolme přímku $L_1^a \subset L_2^\pi$ tak, že první hlavní obraz $V_{11}^2 \in L_1^a$. Označme L_2^a takovou rovinu podprostoru L_3^π, že $L_1^a \subset L_2^a \perp L_2^\pi$, a dále označme $K_1^1 = f_1^1(K)$, $K^a = L_2^a \cap K_1^1$, $K_{11}^{a2} = f_1^2(K^a)$ neboli K_{11}^{a2} je pravoúhlý průmět množiny $K^a \subset L_2^a$ do přímky L_1^a (f_1^i je pravoúhlé promítání L_{4-i+1}^π do L_{4-i}^π). Hledaný K_{11}^2 je sjednocení všech $K_{11}^{a2} \subset L_1^a$. Třeba ovšem sestrojit množinu $K^a \subset L_2^a \subset L_3^a$, kde L_3^a je takový podprostor prostoru L_4, že $L_2^a \subset L_3^a \perp L_3^\pi$, což provedeme následovně.

b) Zvolme přímku $L_1^b \subset L_2^a$ tak, že $f_1^1(V) = V_1^1 \in L_1^b$. Označme L_2^b takovou rovinu podprostoru L_3^a, že $L_1^b \subset L_2^b \perp L_2^a$, a dále označme $K^b = L_2^b \cap K$, $K_1^{b1} = f_1^1(K^b)$ neboli K_1^{b1} je pravoúhlý průmět množiny $K^b \subset L_2^b$ do přímky L_1^b. Množina K^a je sjednocení všech $K_1^{b1} \subset L_1^b$.

Grafické vyjádření provedení při zvoleném systému (I, I) je na obr. 7.



obr. 7.

Poznámka. Obsáhlejší pojednání o systémech zobrazení prostorů, pro něž nepředpokládáme platnost některých zde vyjmenovaných axiomů, vyjdou ve Sborníku prací Vysoké školy dopravní a Výzkumného ústavu dopravního.

Literatura

[1] *Čech E.:* Bodové množiny. Academia, Praha 1966. (1. vydání JČMF, Praha 1936).
[2] *Čech E.:* Základy analytické geometrie I. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1951.
[3] *Čech E.:* Základy analytické geometrie II. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.
[4] *Kateřiňák J.:* Axiomatická metoda v *n*-rozměrné geometrii Lobačevského. Sborník prací Vysoké školy dopravní a Výzkumného ústavu dopravního, rok 1967, číslo 5, str. 17—29. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha 1967.
[5] *Pavlíček J. B.:* Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.
[6] *Vyšín J.:* Soustava axiomů eukleidovské geometrie. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1959.

Adresa autora: Žilina, Marxe-Engelse 25 (Vysoká škola dopravní).

Summary

ON THE SYSTEMS OF MAPPINGS OF ABSOLUTE SPACES $\boldsymbol{S}_n$ INTO $\boldsymbol{S}_{n-k}$

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina

Absolute space $\boldsymbol{S}_n$ of dimension $n \geqq 2$ is a non-empty set with $n - 1$ systems of non-empty subsets (subspaces) satisfying the generalized Hilbert axioms of incidence, and with the relation betweenness $\mu \subset \boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_n$ and congruence $\sigma \subset \boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_n$ satisfying the axioms of betwenness and congruence, respectively.

For this space, systems of the mappings of the space $\boldsymbol{S}_n$ into the subspace $\boldsymbol{S}_{n-k}$ consisting from ortogonal projections and rotations are defined. Using these systems of mappings there is given the theory of graphic expressions for $\boldsymbol{S}_n$ and some concrete examples realizing them for $\boldsymbol{L}_4$.