Karel Cepák

Obecné vzorce pro převod součinu kosinů n-čísel na součet kosinů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 4, 482--483

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117639`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

RŮZNÉ

OBECNÉ VZORCE PRO PŘEVOD SOUČINU KOSINŮ n-ČÍSEL NA SOUČET KOSINŮ

KAREL CEPÁK, Praha

(Došlo dne 14. června 1966)

Známý vzorec $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2))$ lze snadno rozšířit na n-libovolných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tj. vyjádřit součin $\prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i$. Tato práce se zabývá několika takovými vzorci.

Věta 1. *Pro přirozené číslo $n \geqq 2$ buďte $(k_{1,1}, k_{2,1}, \ldots, k_{n-1,1})$, $(k_{1,2}, k_{2,2}, \ldots \ldots, k_{n-1,2})$, $\ldots$, $(k_{1,2^{n-1}}, k_{2,2^{n-1}}, \ldots, k_{n-1,2^{n-1}})$ posloupnosti těchto vlastností:*

$$(1) \qquad k_{i,j} = 0, 1 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\,;$$

$$(k_{1,j_1}, k_{2,j_1}, \ldots, k_{n-1,j_1}) \neq (k_{1,j_2}, k_{2,j_2}, \ldots, k_{n-1,j_2}) \quad \text{pro} \quad j_1 \neq j_2$$ [1])

(tedy všechny navzájem různé, $(n-1)$-členné binární posloupnosti). Pak platí:

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(1 - 2k_{i,j})\,\alpha_{i+1}\right).$$

Tato věta se dokáže snadno úplnou indukcí. Pro $n = 2$ se tvrzení redukuje na známý vzorec uvedený v úvodu článku. V druhém kroku důkazu vynásobíme obě strany rovnice (2) kosinem dalšího libovolného čísla α_{n+1} a po jednoduché úpravě pravé strany obdržíme

$$\prod_{i=1}^{n+1} \cos\alpha_i = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \cos\left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n}(1 - 2q_{i,j})\,\alpha_{i+1}\right)$$

kde $q_{i,j} = 0, 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Z indukčního předpokladu, že všechny zmíněné binární posloupnosti $(k_{1,1}, k_{2,1}, \ldots \ldots, k_{n-1,1})$, $(k_{1,2}, k_{2,2}, \ldots, k_{n-1,2})$, $\ldots$, $(k_{1,2^{n-1}}, k_{2,2^{n-1}}, \ldots, k_{n-1,2^{n-1}})$ jsou navzájem různé se pak dokáže, že také $(q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots, q_{n,1})$, $(q_{1,2}, q_{2,2}, \ldots, q_{n,2})$, $\ldots$, $(q_{1,2^n}, q_{2,2^n}, \ldots, q_{n,2^n})$ jsou navzájem různé. Tím je důkaz proveden.

[1]) Rovnost dvou posloupností $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ je definována takto: $n = m$ & $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

Označme $\beta_j = \alpha_1 + (1 - 2k_{1,j})\,\alpha_2 + (1 - 2k_{2,j})\,\alpha_3 + \ldots + (1 - 2k_{n-1,j})\,\alpha_n$ a hledejme nyní takový převodní vzorec, který by definoval jejich uspořádání. (Věta 1 připouští libovolné uspořádání).

Každé β_j je (pro daná $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) zřejmě definováno příslušnou binární posloupností $(k_{1,j}, k_{2,j}, \ldots, k_{n-1,j})$. Všechna lze tedy uspořádat nezávisle na $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ uspořádáním příslušných binárních posloupností. Zvolme nejobvyklejší uspořádání binárních posloupností, tj. uspořádání dané vztahem

$$(3) \qquad j - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,j} 2^{n-1-i} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\,.$$

Je jasné, že rovnice (1) a (3) definují implicitně všechny navzájem různé $(n - 1)$ členné binární posloupnosti a zároveň jejich uspořádání. Dále je zřejmé, že (pro $n \geqq 2$) můžeme každou $(n - 1)$-člennou binární posloupnost $(k_{1,j}, k_{2,j}, \ldots, k_{n-1,j})$ považovat za obecný tvar zápisu celého nezáporného čísla $j - 1$ $(j \leqq 2^{n-1})$ ve dvojkové soustavě. Odtud vyplývá snadné určení těchto posloupností, jejich uspořádání a tím i určení $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2^{n-1}}$.

Pokusme se nyní najít převodní vzorec ve tvaru jediné rovnice. Zaveďme funkci $g(m, i, j)$ rovnicí

$$(4) \qquad g(m, i, j) \overset{\text{df}}{=} (-1)^{\text{Entier}((j-1)2^{i-m})}\,.$$

Srovnejme nyní hodnoty koeficientů $k_{i,j}$ definovaných rovnicemi (1), (3) a hodnoty funkce $g(m, i, j)$ pro pevné $m = n - 1$ a pro $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, 2^m$. Snadno odvodíme tyto vztahy: Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$. Pak pro $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, 2^m$ a pro

$$2p\,2^{m-i} + 1 \leqq j \leqq (2p + 1)\,2^{m-i} \text{ je } k_{i,j} = 0;\; g(m, i, j) = 1,$$

$$(2p + 1)\,2^{m-i} + 1 \leqq j \leqq (2p + 2)\,2^{m-i} \text{ je } k_{i,j} = 1;\; g(m, i, j) = -1.$$

Tedy

$$g(m, i, j) = 1 - 2k_{i,j}$$

a vzorec (2) můžeme psát takto:

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos \left(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n-1} ((-1)^{\text{Entier}((j-1)2^{i-n+1})})\alpha_{i+1}\right)$$

pro všechna $n = 2, 3, \ldots$ a pro každých n čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tento vzorec zřejmě platí i pro hodnotu $n = 1$. Můžeme tedy vyslovit následující větu:

Věta 2. *Pro každé přirozené číslo n a pro každých n čísel* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *platí*

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos \left(\sum_{i=1}^{n} ((-1)^{\text{Entier}((j-1)2^{i-n})})\, \alpha_i \right).$$

[2]) Entier (x) je největší celé číslo, vyhovující nerovnosti Entier $(x) \leqq x$.