Časopis pro pěstování matematiky

Beloslav Riečan

О продолжении операторов с значениями в линейних полуупорядоченных пространствах

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 4, 459--471

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117637`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ С ЗНАЧЕНИЯМИ В ЛИНЕЙНИХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Beloslav Riečan (Белослав Риечан), Bratislava

(Поступило в редакцию 25. августа 1967 г.)

В статье [1] мы доказали теорему о продолжении функционалов некоторого типа.[1]) Следствием этой теоремы были теорема о продолжении интеграла и теорема о продолжении меры. В этой статье мы обобщим результаты из [1]. Мы будем изучать не только функционалы, а операторы с значениями в произвольном регулярном K-пространстве.

В первой части излагается общая теория, в следующих трех частьях ее приложения: продолжение интеграла Даниела на l-группах, продолжение линейных операторов и продолжение векторной меры. Некоторые из этих результатов являются улучшением известных результатов. Также общие результаты являются улучшением результатов работы [1].

I

В первую очередь мы введем некоторые обозначения. Структурные операции мы будем обозначать знаками $x \cup y$, $x \cap y$, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} x_\alpha$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\bigcup\{x : x \in B\}$, $\bigcap B$ итп. Мы будем писать $x_n \nearrow x$ в случае, когда $x_n \leqq x_{n+1}$ для всех n и $x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Подобный смысл имеет символ $x_n \searrow x$. Если D — непустое подмножество частично упордяоченного множества M, которое не ограничено сверху (снизу), то пишем $\bigcup D = \infty$ ($\bigcap D = -\infty$). Мы будем пользоваться терминологией из теории полуупорядоченных пространств следуя [3].

В настоящей работе мы будем продолжать оператор J_0 определенный на подмножестве A множества S со значениями в регулярном K-пространстве P. В следующих трех определениях мы дадим описание свойств S, A и J_0, необходимых в дальнейшем. Условие $i\,.\,j$ будет обозначать j-ое условие i-ого определения.

---

[1]) Краткое изложение результатов работы [1] содержит доклад [2].

Определение 1. Пусть S — непустое множество удовлетворяющее следующим условиям:

1. S — условно σ-полная структура (т.е. S — структура, в которой всякое ограниченное счетное подмножество обладает наименьшим верхним и наибольшим нижним ограничениями).

2. S — σ-непрерывная структура (т.е. $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y \Rightarrow x_n \cap y_n \nearrow x \cap y$; $x_n \searrow x$, $y_n \searrow y \Rightarrow x_n \cup y_n \searrow x \cup y$).

На структуре S определены бинарные операции $+$, $-$, для которых выполняется:

3. $x + y = y + x$ для всех $x, y \in S$.

4. Если $x, y, z \in S$ и $x \leqq y$, то $x + z \leqq y + z$, $x - z \leqq y - z$, $z - x \geqq z - y$.

5. Для любых последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ элементов из S таких, что $x_n \nearrow x$; $y_n \nearrow y$, справедливо $x_n + y_n \nearrow x + y$.

6. Для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов из S такой, что $x_n \nearrow x \in S$, и любого $y \in S$ справедливо $x_n - y \nearrow x - y$.

7. Для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов из S такой, что $x_n \searrow x \in S$, и любого $y \in S$ справедливо $y - x_n \nearrow y - x$.

8. Если $x \leqq y$, $x, y \in S$, то $y = x + (y - x)$.

Определение 2. Дано подмножество A множества S обладающее следующими двумя свойствами:

1. A — подструктура структуры S замкнутая относительно операций $+$, $-$.

2. Для произвольного $x \in S$ существуют последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ элементов из A так, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n \leqq x \leqq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Определение 3. Дано отображение J_0 множества A в регулярное K-пространство P, обладающее следующими свойствами:

1. $x \leqq y \Rightarrow J_0(x) \leqq J_0(y)$.

2. $J_0(x) + J_0(y) = J_0(x \cup y) + J_0(x \cap y)$ для всех $x, y \in A$.

3. $x \leqq y \Rightarrow J_0(y) = J_0(x) + J_0(y - x)$.

4. $J_0(x + y) \leqq J_0(x) + J_0(y)$ для произвольных $x, y \in A$.

5. Если $x_n \nearrow x$, $x_n \in A$, $x \in A$, то $J_0(x) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_0(x_n)$.

Определение 4. Через B (соответственно, через C) мы будем обозначать множество всех элементов $b \in S$, для которых существует последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $a_n \nearrow b$ (соответственно $a_n \searrow b$).

Лемма 1. *Пусть* $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ *произвольные последовательности элементов из* A, $c_n \nearrow c$, $d_n \nearrow d$, $c \leqq d$. *Тогда* $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(c_n) \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(d_n)$.

Доказательство. Для фиксированного m мы имеем $c_m \cap d_n \nearrow c_m \cap d = c_m(n \to \infty)$. В силу условий 3.5 и 3.1

$$J_0(c_m) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(c_m \cap d_n) \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(d_n),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 1 дает возможность дать следующее определение.

Определение 5. Пусть $b \in B$, $\{a_n\}$ — последовательность элементов A, $a_n \nearrow b$. Тогда мы положим

$$J_1(b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(a_n).^2)$$

Следующая лемма была доказана в [1] (леммы 2,1–2,3). То обстоятельство, что A здесь удовлетворяет более слабым условиям, не существенно. Кроме того идея доказательства известна (см. напр. [4], [5]).

Лемма 2. *B и C являются подструктурами структуры S, B замкнута относительно $+$. Если $b_n \in B$, $b_n \nearrow b$ (соотв. $b_n \in C$, $b_n \searrow b$), то $b \in B$ (соотв. $b \in C$). Более того, существуют $c_n \in A$ так, что $c_n \leqq b_n$ и $c_n \nearrow b$ (соотв. $c_n \geqq b_n$, $c_n \searrow b$).*

Лемма 3. *Оператор J_1 является продолжением оператора J_0. J_1 изотонный (т.е. $x \leqq y \Rightarrow J_1(x) \leqq J_1(y)$) и для всех $x, y \in B$ справедливо*

$$J_1(x) + J_1(y) = J_1(x \cup y) + J_1(x \cap y),$$
$$J_1(x + y) \leqq J_1(x) + J_1(y).^3)$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из определения, второе из леммы 1. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ последовательности элементов из A, $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y$. Если хотя бы одна из последовательностей $\{J_0(x_n)\}$, $\{J_0(y_n)\}$ не ограничена, то не ограничена тоже $\{J_0(x_n \cup y_n)\}$ и последние отношения приобретают форму $\infty = \infty$ соотв. $J_1(x + y) \leqq \infty$. В обратном случае доказательство очевидно.

Определение 6. Для $d \in S$ мы определяем

$$J(d) = \bigcap \{J_1(b) : d \leqq b \in B\}.$$

---

^{2}) Значение $J_1(b)$ может быть и ∞.

^{3}) Операция $+$ и отношение $\leqq$ с элементом ∞, с которым здесь мы можем встретиться, определяются очевидным образом.

Лемма 4. *Оператор J является продолжением оператора J_1. J изотонный и для всяких $x, y \in S$ справедливо*

$$J(x + y) \leqq J(x) + J(y)$$

всякий раз, когда $J(x) + J(y)$ определено.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Доказываемое неравенство справедливо, если $J(x) = \infty$ или $J(y) = \infty$. Пусть $-\infty \leqq J(a) < \infty$, $-\infty \leqq J(b) < \infty$. Тогда множества $A_1 = \{J_1(a_1) : a \leqq a_1 \in B\}$, $B_1 = \{J_1(b_1) : b \leqq b_1 \in B\}$ не пусты. Возьмем $a_1 \in B$, $b_1 \in B$ так, чтобы $a \leqq a_1$, $b \leqq b_1$. В силу леммы 3 $J_1(a_1) + J_1(b_1) \geqq J_1(a_1 + b_1) \geqq J(a + b)$. Значит, если хотя бы одно из множеств A_1, B_1 не ограничено снизу, то $J(a + b) = -\infty$. В противном случае зафиксируя a_1 мы получим неравенство $J_1(a_1) \geqq J(a + b) - J(b)$. Остаток доказательства очевиден.

Лемма 5. *Пусть $d_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$, $d_i \leqq d_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$, $b_i \geqq d_i$, $b_i \in B$ $(i = 1, \ldots, n)$ произвольные элементы и пусть $J(d_i) + \varepsilon u/2^{i+1} > J(b_i)$ для некоторого положительного числа ε и положительного элемента $u \in P$. Тогда*

$$J(d_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u > J(\bigcup_{i=1}^{n} b_i).$$

Доказательство проводится по индукции при помощи леммы 4, леммы 3 и не отличается от доказательства леммы 3.1 из [1].

Лемма 6. *Если $b_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $b_n \nearrow b$, то $J_1(b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_1(b_n)$.*

Доказателство. В силу леммы 2 существуют $c_n \in A$, $c_n \leqq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $c_n \nearrow b$. Но тогда

$$J_1(b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(c_n) \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_1(b_n) \leqq J_1(b).$$

Теорема 1. *Пусть $\{d_n\}$ произвольная последовательность элементов из S, $d_n \nearrow d \in S$, $J(d_1) > -\infty$. Тогда $J(d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n)$.*

Доказательство. Очевидно $\bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n) \leqq J(d)$ и теорема справедлива, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n) = \infty$. Пусть $\bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n) < \infty$. К произвольному d_i существует последовательность $\{b_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ элементов из B так, что $J(d_i) = \bigcap_{m=1}^{\infty} J(b_i^m)$, $b_i^m \geqq d_i$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Пусть $u > 0$ общий регулятор сходимости всех последовательностей

$\{J(b_i^m)\}_{m=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует $b_i \in B$ так, что $b_i \geqq d_i$ и

$$(1) \qquad J(d_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u > J(b_i) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

В силу условия 2.2 существует $b \in B$ так, что $d \leqq b$ мы можем предполагать, что

$$(2) \qquad d_i \leqq b_i \leqq b .$$

Положим $k_n = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$. Очевидно, $k_n \leqq k_{n+1}$, $k_n \in B$, $k_n \geqq d_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и в силу (2) $k_n \leqq b$. Отсюда вытекает существование $\bigcup_{n=1}^{\infty} k_n \leqq b$. В силу леммы 2 $\bigcup_{n=1}^{\infty} k_n \in B$ и в силу (1) и леммы 5

$$J(d_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u > J(k_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из последнего и леммы 6 вытекает, что

$$J(d) + \varepsilon u \geqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n) + \varepsilon u \geqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J(k_n) = J(\bigcup_{n=1}^{\infty} k_n) \geqq J(d),$$

откуда вытекает непосредственно утверждение теоремы.

Лемма 7. *Для произвольного $a \in C$ существует последовательность $\{b_n\}$ элементов из B так, что $b_n \searrow a$ и $J(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_1(b_n)$.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ соотв. $\{c_n\}$ последовательности элементов из A соотв. из B такие, что $c_n \geqq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_n \searrow a$, $J(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n)$ и $\{c_n\}$ невозрастающая. Тогда последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = a_n \cap c_n$, обладает всеми тревуемыми свойствами.

Теорема 2. *Пусть $a \leqq b$, $a \in C$, $b \in B$, $J(a) > -\infty$. Тогда*

$$(3) \qquad J(b - a) + J(a) = J(b).$$

Доказательство. Из леммы 4 вытекает

$$(4) \qquad J(b - a) + J(a) \geqq J(b).$$

Если $J(b) = \infty$, то (3) вытекает из (4). Пусть $J(b) < \infty$ и пусть $a \in A$. Построим $\{b_n\}$, $b_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы $a \leqq b_n \nearrow b$. (3) вытекает тогда из теоремы 1 и условий 1.6 и 3.3.

Пусть теперь $b \in B$, $a \in B$. Построим $\{b_n\}$, $b_n \in A$ так, чтобы $b_n \nearrow a \leqq b$. Тогда $J(b - a) \leqq J(b - b_n) = J(b) - J(b_n)$ и (3) вытекает из теоремы 1 и отношения (4).

Наконец, если $b \in B$ и $a \in C$, то (3) не трудно доказать, используя лемму 7.

Определение 7. Знаком L мы будем обозначать множество всех элементов $d \in S$, для которых справедливо

$$-\infty < \bigcup\{J(c) : d \geqq c \in C\} = \bigcap\{J(b) : d \leqq b \in B\} < \infty .$$

Теорема 3. *Пусть $a \leqq b$, $a \in L$, $b \in S$. Тогда*

$$J(b - a) + J(a) = J(b) .$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для $J(b) < \infty$ справедливо $J(b - a) + J(a) \leqq J(b)$. Пусть сначала $a \in C$. Пусть $b_1 \geqq b$ произвольный элемент из B. Тогда в силу теоремы 2

$$J(b - a) \leqq J(b_1) - J(a) ,$$

откуда вытекает требуемое неравенство. Если теперь $a \in L$, возьмем произвольное $a_1 \leqq a$, $a_1 \in C$, $J(a_1) > -\infty$. По доказанному

$$J(b - a) \leqq J(b) - J(a_1)$$

и доказываемое неравенство вытекает из определения L.

Теорема 4. *Пусть $\{c_n\}$ последовательность элементов из C, $c_n \searrow c$. Тогда $J(c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n)$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n) > -\infty$ и $c_1 \in A$. Тогда в силу теоремы 2 $J(c_1) = J(c_1 - c_1) + J(c_1)$, значит $J(c_1 - c_1) = 0$. В силу теорем 1 и 2 также справедливо

$$J(c_1 - c) = J(c_1) - \bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n) . \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что $-\infty < J(c_1 - c) < \infty$. Из леммы 4 вытекает, что $J(c_1) \leqq \leqq J(c_1 - c) + J(c)$, значит $J(c) > -\infty$. Из этой-же леммы и из (5) вытекает, что $J(c_1) - J(c) \leqq J(c_1) - \bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n)$, или, что то же самое, $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n) \leqq J(c)$. Обратное неравенство очевидно.

Теорема 5. *Пусть* $\{d_n\}$ *последовательность элементов из* L, $d_n \searrow d$. *Тогда* $J(d) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(d_n)$.

Доказателство. Доказывается на основе теоремы 3 подобным способом, как в теореме 4.

Лемма 8. *Для всех* $x, y \in C$ *справедливо*

$$J(x) + J(y) = J(x \cup y) + J(x \cap y).$$

Доказателство получается легко при помощи теоремы 4.

Лемма 9. *Пусть* $d_i \in S$, $c_i \leqq d_i$, $c_i \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$ $d_i \geqq d_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$ *произвольные элементы и пусть* $J(d_i) - \varepsilon u/2^{i+1} < J(c_i)$ $(i = 1 \ldots, n)$ *для некоторого числа* $\varepsilon > 0$ *и положительбого* $u \in P$. *Тогда*

$$J(d_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u < J(\bigcap_{i=1}^{n} c_i).$$

Доказательство проводится по индукции и двойственно доказательству леммы 5. Только вместо леммы 4 надо использовать лемму 8.

Определение 8. Мы будем говорить, что множество $K \subset S$ удовлетворяет условию (α), если справедливо следующее: Если $a_n \nearrow a$, или $a_n \searrow a$, $a_n \in K$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a \in S$ и последовательность $\{J(a_n)\}$ ограничена, то $a \in K$. Через N мы будем обозначать наименьшее множество содержащее A и удовлетворяющее условию (α).

Теорема 6. *Множество* L *удовлетворяет условию* (α).

Доказательство. Пусть $d_n \in L$, $d_n \nearrow d$, $\{J(d_n)\}$ ограничена. Нам надо доказать, что $d \in L$. Для того мы будем пользоваться только следующими утверждениями: леммой 5, теоремой 1 (но только для $d_n \in L$ или $d_n \in B$), леммой 2 (без утверждения, что B замкнуто относительно $+$) и условием 1.1.

Так как $d_n \nearrow d$, $d_n \in L$, то из тоеремы 1 вытекает, что $-\infty < J(d) < \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Подобным образом, как в теореме 1, мы можем доказать существование $u \in P$, $u > 0$ и $b_i \in B$, $b_i \geqq d_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$J(d_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u > J(b_i). \tag{6}$$

Мы можем даже предполагать, что существует $b \in B$, для которого $b_i \leqq b$

$(i = 1, 2, \ldots)$. Если положить $k_n = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$, то $k_n \leqq k_{n+1}$, $k_n \in B$, $d_n \leqq k_n \leqq b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и в силу (6) и леммы 5

$$J(d_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} u > J(k_n).$$

Очевидно, существует $k = \bigcup_{n=1}^{\infty} k_n$, $k \in B$, $k_n \nearrow k$, $d \leqq k$. Значит, $J(d) + \varepsilon u \geqq \geqq J(k) \geqq J(d)$, откуда вытекает, что $J(d) = \bigcap\{J(k) : d \leqq k \in B\}$. С другой стороны

$$J(d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(d_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup\{J(c) : d_n \geqq c \in C\} =$$

$$= \bigcup\{J(c)\text{: существуют } c \in C \text{ и } n \text{ так, что } d_n \geqq c\} \leqq \bigcup\{J(c) : d \geqq c \in C\}.$$

Для того, чтобы доказать двойственное утверждение, достаточно проверить справедливость утверждений двойственных к утверждениям софмулированным в начале доказательства теоремы. Но это следующие утверждения: лемма 9, теорема 4, теорема 5, лемма 2 и условие 1.1.

Теорема 7. *Множество N является подструктурой структуры S. J является отображением множества N в P, являющимся продолжением оператора J_0 и обладающим следующими свойствами:*

1. *Для произвольных $x, y \in N$, $x \leqq y$ справедливо $J(x) \leqq J(y)$.*
2. *$J(x) + J(y) = J(x \cup y) + J(x \cap y)$ для всех $x, y \in N$.*
3. *Для прозвольных $x, y \in N$, $x \leqq y$ справедливо $J(y) = J(x) + J(y - x)$.*
4. *$J(x + y) \leqq J(x) + J(y)$ для всех $x, y \in N$.*
5. *Если $x_n \nearrow x$ (соотв. $x_n \searrow x$), $x_n \in N$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\{J(x_n)\}$ ограничена, то $x \in N$ и $J(x_n) \nearrow J(x)$ (соотв. $J(x_n) \searrow J(x)$).*

Если F — произвольный оператор из N в P обладающий свойством 5 и являющийся продолжением J_0, то $F(x) = J(x)$ для всех $x \in N$.

Доказательство. Из теоремы 6 вытекает, что $L \supset N$. Отсюда вытекает, что $-\infty < J(d) < \infty$ для всех $d \in N$. Тот факт, что J является продолжением J_0, вытекает из леммы 4, точно так, как и утверждение 1 и 4. Утверждение 3 вытекает из теоремы 3.

Докажем утверждение 5. Пусть $x_n \nearrow x$ (соотв. $x_n \searrow x$), $x_n \in N$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\{J(x_n)\}$ ограничена: Тогда $x \in N$ в силу определения множества N и $J(x_n) \nearrow J(x)$ (соотв. $J(x_n) \searrow J(x)$) в силу теоремы 1 (теоремы 5).

Из 5 вытекает последнее утверждение теоремы. Положим $R = \{x \in N : J(x) = F(x)\}$. Очевидно $R \supset A$. Так как R обладает свойством (α), то $R \supset N$, значит

$F(x) = J(x)$ для всякого $x \in N$. Теперь докажем 2. Пусть Q множество всех $y \in N$, для которых

$$(7) \qquad J(x) + J(y) = J(x \cup y) + J(x \cap y)$$

при фиксированном $x \in A$. Очевидно $Q \supset A$. Не трудно доказать, что Q обладает свойством (α), значит $Q \supset N$ и (7) справедливо для всех $x \in A$, $y \in N$. Далее, для фиксированного $y \in N$ пусть T множество всех $x \in N$ удовлетворяющих (7). По прежнему $T \supset A$. Так как T обладает свойством (α), то $T \supset N$, значит (7) справедливо для всех $x, y \in N$.

Замкнутость N относительно структурных операций доказывается подобным способом.

Примечание. Теорема 3.4 из [1] является следствием теоремы 7. Достаточно в качестве P взять K-пространство всех действительных чисел. Более того, структура S и ее подструктура A подчинены здесь более слабым требованиям.

II

В этой части мы будем предполагать, что S – произвольная l-группа,[4]) + групповая операция, $x - y = x + (-y)$, где $-y$ элемент обратный y. Напомним, что l-группа S называется σ-польной, если она является условно σ-полной структурой. Хорошо известно, что такая группа коммутативна и σ-бесконечно дистрибутивна.

Гомоморфизм J l-группы G в l-группу H назовем изотонным, если из отношения $x \leqq y$ вытекает $J(x) \leqq J(y)$. (Очевино, что последнее условие равносильно условию: $J(x) \geqq 0$ для $x \geqq 0$.)

Лемма 10. *Для произвольного элемента $d \in N$ существует не возрастающая (соотв. не убывающая) последовательность $\{c_n\}$элементов из $B \cap N$ (соотв. $C \cap N$) так, что $c_n \geqq d$ (соотв. $c_n \leqq d$) для всех n и $J(d) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(c_n)$ (соотв. $J(d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(c_n)$).*

Доказательство вытекает из определения L, теоремы 6 и свойств регулярных K-пространств.

Теорема 8. *Пусть S – произвольная σ-полная l-группа. Пиcть A – подгруппа S являющаяся одновременно ее подструктурой. Пусть для произвольного $x \in S$ существуют последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ элементов из A, для которых*

[4]) Что касается терминологии см. [6].

$\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n \leqq x \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n$. *Пусть P — регулярное К-пространство. Пусть J_0 изотонный гомоморфизм из A в P удовлетворяющий следующему условию: Если $x_n \searrow 0$, то $J_0(x_n) \searrow 0$.*

Тогда существует подгруппа N l-группы S являющаяся одновременно ее подструктурой и изотонный гомоморфизм J из N в P являющийся продолжением J_0 и удовлетворяющий следующему условию: Если $\{x_n\}$ последовательность элементов из N, $x_n \nearrow x$ (соотв. $x_n \searrow x$), $x \in S$ и $\{J(x_n)\}$ ограничена, то $x \in N$ и $J(x_n) \searrow \searrow J(x)$ (соотв. $J(x_n) \nearrow J(x)$).

Доказательство. Операциям $+$, $-$ мы дадим выше определенный смысл. Ясно, что выполнены все условия определений 1 и 2 (см. [6], гл. XIV, следствие теоремы 18). Из определения 3 нуждаются в доказательстве лишь условия 2 и 5.

Но условие 2 вытекает из тождества $x + y = (x \cup y) + (x \cap y)$ которое справедливого во всякой коммутативной l-группе и условие 5 вытекает из следующего элементарного вычисления: Если $x_n \nearrow x$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(x_n) = J_0(x) - (J_0(x) - \bigcup_{n=1}^{\infty} J_0(x_n)) = J_0(x) - \bigcap_{n=1}^{\infty} J_0(x - x_n) = J_0(x)$.

Теперь мы вправе воспользоваться теоремой 7. Ясно, что доказательство будет завершено, если мы докажем, что N подгруппа и J гомоморфизм.

Ясно, что $J(x + y) = J(x) + J(y)$ для всех $x, y \in C \cap N$. Пусть $x, y \in N$. В силу леммы 10 существуют не убывающие последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ элементов из $C \cap N$ так, что $x_n \leqq x$, $y_n \leqq y$ и $J(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(x_n)$, $J(y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(y_n)$. Тогда

$$J(x) + J(y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (J(x_n) + J(y_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(x_n + y_n) \leqq J(x + y).$$

Доказательство утверждения, что N подгруппа, теперь не представляет собой никаких трудностей.

III

Оператор J K-линеала Q в K-линеал R назовем положительным, если $x \leqq y$ влечет $J(x) \leqq J(y)$.

Теорема 9. *Пусть S — произвольное K_σ-пространство, A — его линейняя подструктура σ-мажорирующая S (т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n \leqq x \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n$ для всякого $x \in S$ и некоторых $x_n, y_n \in A$). Пусть P — регулярное К-пространство и J_0 — линейний положительный оператор из A в P удовлетворяющий следующему условию: Если $x_n \searrow 0$, то $J_0(x_n) \searrow 0$.*

Тогда существует линейняя подструктура N K_σ-пространства S и линейний оператор J являющийся продолжением J_0 и удовлетворяющий следующему условию: Если $\{x_n\}$ последовательность элементов из N, $x_n \nearrow x$ (соотв. $x_n \searrow x$) и $\{J(x_n)\}$ ограничена, то $x \in N$ и $J(x_n) \nearrow J(x)$ (соотв. $J(x_n) \searrow J(x)$).

Доказательство. Очевидно, что в силу теоремы 8 достаточно доказать, что $x \in N$ и $J(\alpha x) = \alpha\, J(x)$ для всех $x \in N$ и всех действительных чисел α.

Из леммы 10 вытекает, что существуют последовательности $\{x_n\}$ соотв. $\{y_n\}$ элементов из $C \cap N$ (соотв. $B \cap N$) так, что $\{x_n\}$ не убывающая, $\{y_n\}$ не возрастающая, $x_n \leqq x \leqq y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $J(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(x_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(y_n)$. Очевидно, что $\alpha x_n \in C$, $\alpha y_n \in B$ и $J(\alpha x_n) = \alpha\, J(x_n)$, $J(\alpha y_n) = \alpha\, J(y_n)$ для любого n и $\alpha > 0$. Но тогда

$$J(\alpha x) \geqq \bigcup_{n=1}^{\infty} J(\alpha x_n) = \alpha \bigcup_{n=1}^{\infty} J(x_n) = \alpha\, J(x) = \alpha \bigcap_{n=1}^{\infty} J(y_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J(\alpha y_n) \geqq J(\alpha x)\,,$$

значит $J(\alpha x) = \alpha\, J(x)$ для всех $x \in N$ и всех чисел $\alpha > 0$.

Из теоремы 8 вытекает, что $J(-x) = -J(x)$ для всех $x \in N$. Значит, для произвольного $\alpha < 0$ мы имеем

$$J(\alpha x) = -J(-\alpha x) = -(-\alpha)\, J(x) = \alpha\, J(x)\,.$$

Наконец, справедливость равенства $J(0x) = 0\, J(x)$ очевидна и доказательство замкнутости N относительно умножения действительными числами не трудно.

Примечание. Теорема 9 является обобщением известной теоремы о продолжении положительного линейного оператора на замыкание его множества определения (см. [7], гл. IX, теорема 4.21; [3], гл. X, теорема X 5.1). Условие, что S K-пространство, нам удалось заменить более слабым условием, что S K_σ-пространство. Кроме того, вместо условия, что A мажорирует S (т.е. что для произвольного $x \in S$ существуют $y, z \in A$ так, что $y \leqq x \leqq z$) мы использовали более слабое условие, что A σ-мажорирует S.

IV

Терминологией из теории меры мы будем пользоваться следуя [8]. Для любого K-линеала P положим $P^* = P \cup \{\infty\}$, определяя $\infty + x = x + \infty = \infty + \infty = \infty$, $x < \infty$ для всех $x \in P$.

Определение 9. Пусть P – произвольное K_σ-пространство. Векторной мерой (с значениями в P) мы будем понимать всякую функцию множества μ определенную на кольце R подмножеств X, принимающую значения в P^* и удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. $\mu(E) \geqq 0$ для всех $E \in R$.

3. $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ для всех $E, E_i \in R$, для которых $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$.

Мера μ называется конечной, если $\mu(E) \in P$ для всех $E \in R$ и σ-конечной, если для всякого $E \in R$ существует последовательность $\{E_i\}$ множеств из R такая, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ и $\mu(E_i) \in P$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 10. *Функция множества μ определенная на кольце R с значениями в P^* является векторной мерой тогда и только тогда, если она обладает следующими свойствами:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(E) \geqq 0$ *для всех* $E \in R$.

2. $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$ *для всех* $E, F \in R$.

3. *Если $\{E_n\}$ неубывающая последовательность множеств из R и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in R$, то $\mu(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.*

Доказательство не отличается от доказательства аналогичной теоремы для скалярной меры.

Теорема 11. *Пусть μ — σ-конечная векторная мера определенная на кольце R со значениями в регулярном K-пространстве P^*. Тогда сутествует σ-конечная векторная мера $\bar{\mu}$ на σ-кольце M порожденном кольцом R, являющаяся продолжением μ. Мера $\bar{\mu}$ определена однозначно.*

Доказательство. Сначала заметим, что мы можем предполагать, что μ конечна. Положим $A = \{E \in R : \mu(E) < \infty\}$. Тогда A — кольцо, μ — конечна на A и в силу σ-конечности μ M является σ-кольцом порожденным кольцом A.

Теперь мы будем пользоваться теоремой 7. Пусть S класс всех подмножеств множества X. Для $E, F \in S$ определяем $E + F = E \cup F$, $E - F = \{x : x \in E, x \notin F\}$ и $E \leqq F$ тогда и только тогда, если $E \subset F$. Для $E \in A$ положим $J_0(E) = \mu(E)$. Очевидно, S, A, J_0 удовлетворяют всем условиям определений 1—3.

Пусть N — класс множеств определенный в определении 8, J — оператор определенный в определении 6. Нетрудно показать, что N — δ-кольцо порожденное кольцом A, значит $N \subset M$. Положим $\bar{\mu}(E) = J(E)$ для $E \in N$ и $\bar{\mu}(E) = \infty$ для $E \in M - N$. Мы должны доказать, что $\bar{\mu}$ является мерой.

Очевидно, что $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. Так как $E \geqq \emptyset$ для всех $E \in N$, то $\bar{\mu}(E) \geqq 0$. Теперь докажем следующее:

(8) Если $E \subset F, E, F \in M$ и $\bar{\mu}(F) \in P$, то также $\bar{\mu}(E) \in P$.

Для того положим $Q = \{G \in M : G \cap F \in N\}$. Очевидно, что $Q \supset A$. Не трудно показать, что класс Q монотонный, значит Q содержит M. Но тогда $E = E \cap F \in N$ и $\bar{\mu}(E) = J(E) \in P$.

Из (8) вытекает, что $\bar{\mu}$ неубывающая. Если $\{E_n\}$ неубывающая последовательность множеств из M, то $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$; равенство очевидно в случае, когда $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) = \infty$ и вытекает из теоремы 7, если $\{\bar{\mu}(E_n)\}$ ограничена. Подобным образом доказывается тождество $\bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F) = \bar{\mu}(E \cup F) + \bar{\mu}(E \cap F)$.

Однозначность и σ-конечность продолжения доказывается очевидным образом.

Примечание. Хотя мы не предполагали, что структура S дистрибутивна, во всех приведенных приложениях она является дистрибутивной.

Литература

[1] *Риечан Б.:* О непрерывном продолжении монотонных функционалов некоторого типа, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 116—125.
[2] *Riečan B.:* Sur une extension continue des certaines fonctions monotones, Spisy Přír. fak. Univ. J. E. Purkyně v Brně 1964, 481—483.
[3] *Вулих Б. З.:* Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Москва 1961.
[4] *Riesz F., Sz. - Nagy B.:* Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest 1953.
[5] *Loomis L. H.:* An introduction to abstract harmonic analysis, New York 1953.
[6] *Birkhoff G.:* Lattice theory, New York 1948.
[7] *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва 1950.
[8] *Halmos P. R.:* Measure theory, New York 1950.
[9] *Riečan B.:* O rozšírení miery na svázoch, Mat. časop. *19* (1969).

Адрес автора: Bratislava, Gottwaldovo nám. 2 (Slovenská vysoká škola technická).