O ISTEJ SÚSTAVE DIOFANTICKÝCH ROVNÍC

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 5. júla 1967)

V tejto úvahe sa zovšeobecní veta 3 z článku [1].

Ide o riešenie sústavy rovníc

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= a_1 x_1 , \\
x_1 + x_3 + \ldots + x_n &= a_2 x_2 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} &= a_n x_n ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

v prirodzených číslach x_i, a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 3$. O tom platí táto

veta. *Všetky riešenia sústavy* (1) *v prirodzených číslach x_i, a_i sa dostanú nasledovne*:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ je ľubovoľné riešenie rovnice

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1} = 1 \tag{2}$$

v prirodzených číslach a

$$x_i = \frac{M}{a_i + 1} \, . \, k \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

kde M je najmenší spoločný násobok čísel $a_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a k ľubovoľné prirodzené číslo.

Dôkaz. Pričítajme na obe strany i-tej rovnice (1), $i = 1, 2, \ldots, n$, číslo x_i, sústava dostane tvar

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (a_1 + 1) x_1 = (a_2 + 1) x_2 = \ldots = (a_n + 1) x_n \tag{4}$$

a teda

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1} =$$

$$= \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = 1$$

čiže (2) platí. Obrátene, nech a_i spĺňajú rovnicu (2)[1]). Sústavu (1) píšme v tvare

$$
\begin{array}{c}
-a_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \\
x_1 - a_2x_2 + \ldots + x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 + x_2 + \ldots - a_nx_n = 0
\end{array} \tag{5}
$$

Táto má netriviálne riešenie práve vtedy, keď

$$
D = \begin{vmatrix} -a, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & -a_2, & \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & -a_n \end{vmatrix} = 0 \tag{6}
$$

Podľa príkladu 2 na strane 32 z [2] platí

$$
D = (-1)^n (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1)\left(1 - \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{a_2 + 1} - \ldots - \frac{1}{a_n + 1}\right)
$$

a tak podmienka (6) je splnená. Ešte treba dokázať, že korene x_i sú dané rovnicami (3).

Determinant D má hodnosť $n - 1$. Je totiž podľa cit. vety z diela [2]

$$
\begin{vmatrix} -a_1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & -a_1, & \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & -a_{n-1} \end{vmatrix}
\begin{array}{l}
= (-1)^{n-1}(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_{n-1} + 1) \,. \\
\cdot \left(1 - \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{a_2 + 1} - \ldots - \frac{1}{a_{n-1} + 1}\right) = \\
= (-1)^n (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_{n-1} + 1) \,.\, \frac{1}{a_n + 1}
\end{array}
$$

a teda je rôzny od nuly, takže pri určitých $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tvoria korene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednoparametrovú množinu. Zo (4) je zrejmé, že

$$
x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \frac{1}{a_1 + 1} : \frac{1}{a_2 + 1} : \ldots : \frac{1}{a_n + 1}
$$

z čoho bezprostredne vyplývajú vzorce (3) pre všetky kladné celočíselné korene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sústavy (1) pri daných $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spĺňajúcich rovnicu (2).

Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ značia veľkosti strán n-uholníka (ktorý ponímame ako uzavretú lomenú čiaru pozostávajúcu z n úsečiek), potom vyhovujú len tie riešenia sústavy (1), v ktorých pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i > 1$. L'ahko sa

[1]) Použitím substitúcie $a_i = b_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dostane rovnica (2) tvar $(1/b_1) + (1/b_2) + \ldots + (1/b_n) = 1$, a teda ide o zvláštny prípad tzv. optickej rovnice.

presvedčíme, že pre $n = 4$ sú to tieto prípady (ak nehľadíme na možnosť permutovania a_i):

a_1	a_2	a_3	a_4	$a_1 + 1$	$a_2 + 1$	$a_3 + 1$	$a_4 + 1$
2	2	3	11	3	3	4	12
2	2	5	5	3	3	6	6
3	3	3	3	4	4	4	4

a teda čísla a_i sú prirodzené práve pre tie štvoruholníky, ktorých strany majú veľkosti v pomere

$$1)\ 4 : 4 : 3 : 1 ; \quad 2)\ 2 : 2 : 1 : 1 ; \quad 3)\ 1 : 1 : 1 : 1$$

a tak rovnostranné štvoruholníky nemajú tej výnimočnosti ako rovnostranné trojuholníky podľa vety 1 v článku [1].

Literatúra

[1] *P. Bartoš:* O jednej vlastnosti rovnostranného trojuholníka a niektorých iných trojuholníkov, Časopis pro pěstování matematiky, roč. *90* (1965), Praha, str. 101—103.

[2] *I. V. Proskurjakov:* Sbornik zadač po linejnoj algebre, Moskva, Goz. izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, 1962.