Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Bartoš

Euklidove vety v pravouhlých simplexoch

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 256--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117620

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

EUKLIDOVE VETY V PRAVOUHLÝCH SIMPLEXOCH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 20. októbra 1966)

Autor venuje túto prácu pamiatke svojho otca PAVLA BARTOŠA (1858—1937) *a svojej matky* ALŽBETY *rod.* MIKLÁŠOVEJ (1877—1948).

V tomto článku zovšeobecníme Euklidove vety o pravouhlých trojuholníkoch pre pravouhlé simplexy n-rozmerného euklidovského priestoru $(n \geqq 2)$.

Definície. Simplex $S \equiv S_1 S_2, \ldots, S_{n+1}$ n-rozmerného euklidovského priestoru E_n, $n \geqq 2$, nazveme pravouhlým vo vrchole S_{n+1}, ak vonkajšie normály jeho $(n-1)$-rozmerných stien[1]) obsahujúcich tento vrchol tvoria ortonormálnu bázu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ priestoru E_n. Tieto steny nazývame *odvesnami* a zvyšujúcu stenu *preponou pravouhlého simplexu* S.[2])

Rovinou φ, ktorá prechádza priesečnicou rovín dvoch odvesien (takže je kolmá k ostatným odvesnám) a je kolmá k prepone, rozrežeme simplex S na dva simplexy S' a S''. Spoločnú stenu oboch simplexov S' a S'' ležiacu v rovine φ nazveme *výškovou stenou simplexu* S. Pravouhlý simplex S má $\binom{n}{2}$ výškových stien.

V priestore E_n si zvolíme kartézsku sústavu súradníc so začiatkom v bode S_{n+1} a základnými vektormi $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \ldots, -\mathbf{e}_n$. Simplex S je potom prienikom polpriestorov

$$(1) \qquad x_1 \geqq 0\,, \quad x_2 \geqq 0\,, \quad \ldots\,, \quad x_n \geqq 0\,, \quad -\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + b \geqq 0 \quad (|\boldsymbol{a}| = 1)$$

kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ má kladné zložky a tiež $b > 0$.

Rovinu φ výškovej steny vedieme priesečnicou rovín $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, čo nie je na újmu všeobecnosti úvah. Jej rovnica v normovanom tvare znie

$$(2) \qquad \frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} = 0\,.$$

[1]) K pojmu vonkajšej normály pozri [1] § 1.

[2]) Táto definícia je v podstate totožná s definíciou pravouhlého simplexu prvého typu v [3] str. 183.

Simplex S' je prienikom polpriestorov

$$\frac{a_2x_1 - a_1x_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} \leqq 0\,, \quad x_1 \geqq 0\,, \quad x_3 \geqq 0\,, \quad x_4 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0\,, \tag{3}$$
$$-\boldsymbol{ax} + b \geqq 0$$

a simplex S'' je prienikom polpriestorov

$$\frac{a_2x_1 - a_1x_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}} \geqq 0\,, \quad x_2 \geqq 0\,, \quad x_3 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0\,, \quad -\boldsymbol{ax} + b \geqq 0\,. \tag{4}$$

Rovnice (1), (3) a (4) dovoľujú určiť n-rozmerné obsahy simplexov S, S', S''[3]) a $(n - 1)$-rozmerné obsahy ich stien.[4]) Bez podrobného výpočtu uvedieme obsahy $(n - 1)$-rozmerných stien simplexov S, S', S'' rozlíšené pomocou čiarok a uvedené v tom poriadku, ako sú rovnice ich rovín uvedené pod (1), (3) a (4). Ak označíme

$$\frac{b^{n-1}}{(n-1)!\, a_1a_2, \dots, a_n} = A \tag{5}$$

máme

$$V_i = a_iA \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,, \quad V_{n+1} = A$$

$$V_1' = \frac{a_1a_2A}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}\,, \quad V_2' = a_1A\,; \quad V_j' = \frac{a_1^2a_jA}{a_1^2 + a_2^2}\,, \quad j = 3, 4, \dots, n\,; \tag{6}$$
$$V_{n+1}' = \frac{a_1^2A}{a_1^2 + a_2^2}\,,$$
$$V_1'' = \frac{a_1a_2A}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}}\,, \quad V_2'' = a_2A\,; \quad V_j'' = \frac{a_2^2a_jA}{a_1^2 + a_2^2}\,, \quad j = 3, 4, \dots, n\,;$$
$$V_{n+1}'' = \frac{a_2^2A}{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

Tu je $V_1' = V_1''$ obsah výškovej steny spoločnej simplexom S' a S''. $V_1 = V_2'$ je obsah odvesny simplexu S v rovine $x_1 = 0$, ktorá je aj stenou simplexu S'. $V_2 = V_2''$ je obsah odvesny simplexu S v rovine $x_2 = 0$, ktorá je aj stenou simplexu S''. Pre ostatné odvesny $(j = 3, 4, \dots, n)$ a preponu $(j = n + 1)$ platí

$$V_j = V_j' + V_j'' \tag{7}$$

čo značí, že príslušná stena simplexu S je rovinou φ rozdelená na dve časti, z ktorých jedna je stenou simplexu S' a druhá stenou simplexu S''.

---

[3]) Pomocou vzorca (12) v práci [4] prípadne pomocou súradníc vrcholov, ktoré sa snadno určia.

[4]) Pomocou vzorca $V = V_iv_i/n$, kde V je n-rozmerný obsah simplexu, V_i $(n - 1)$-rozmerný obsah jeho steny a v_i veľkosť príslušnej výšky.

Veta 1. (Euklidova veta o odvesne.) *V pravouhlom simplexe S rozdelenom výškovou stenou prechádzajúcou priesečnicou roviny prvej a druhej odvesny (podľa poradia v* (1)) *na simplexy S′ a S″ platí*

$$(8) \qquad V_1^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V_j' = V_{n+1} V_{n+1}' \, ; \quad V_2^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V_j'' = V_{n+1} V_{n+1}''$$

kde V_1 (V_2) je obsah odvesny, ktorá je celá obsažená v simplexe S' (S''), V_j' (V_j'') je obsah k nej priľahlého úseku odvesny obsahu V_j, tj. obsah časti tejto odvesny obsaženej v simplexe S' (S'') a V_{n+1}' (V_{n+1}'') je obsah priľahlého úseku prepony obsahu V_{n+1}.

Poznámka. Pre $n = 2$ sa súčty v (8) redukujú na nulu. Kedže simplex má $\binom{n}{2}$ stenových výšok, možno napísať $\binom{n}{2}$ vzťahov (8).

Dôkaz. Podľa (6) je

$$V_1^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V_j' = a_1^2 + \frac{a_1^2 a_3^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_1^2 a_4^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} + \ldots + \frac{a_1^2 a_n^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} =$$

$$= \frac{a_1^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) A^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_1^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} = V_n V_{n+1}'$$

a obdobne

$$V_2^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V_j'' = a_2^2 A^2 + \frac{a_2^2 a_3^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2 a_4^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} + \ldots + \frac{a_2^2 a_n^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} =$$

$$= \frac{a_2^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) A^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_2^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} = V_{n+1} V_{n+1}'' \, .$$

Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. (Veta Pytagorova.) *V pravouhlom simplexe S platí*

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} V_j^2 = V_{n+1}^2 \, .$$

(*Súčet štvorcov obsahov všetkých odvesien sa rovná štvorcu obsahu prepony.*)

Dôkaz. Sčítaním oboch rovností (8) vzhľadom na (7) vyplýva (9).

Veta 2. (Euklidova veta o výške.) *V pravouhlom simplexe S rozdelenom výškovou stenou prechádzajúcou priesečnicou rovín prvej a druhej odvesny (podľa poradia v* (1)) *platí*

$$(10) \qquad V_{1,2}^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j' V_j'' = V_{n+1}' V_{n+1}'' \, .$$

Tu $V_{1,2}$ je obsah výškovej steny, V'_j, V''_j sú oba úseky ostatných odvesien (tretej, štvrtej, ..., n-tej podľa poradia v (1)) a V_{n+1}, V''_{n+1} sú oba úseky prepony na ktoré ich delí výšková stena.

Poznámka. Rovnosť (10) platí pre každů z $\binom{n}{2}$ výškových stien, pričom sú ovšem tak rozdelené odvesny, ako aj obsahy úsekov na nich a na prepone iné.

Dôkaz. Podľa 6) je

$$V_{1,2}^2 + \sum_{j=3}^{n} V'_j V''_j = \frac{a_1^2 a_2^2 A^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 A^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} + \frac{a_1^2 a_2^2 a_4^2 A^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{a_1^2 a_2^2 a_n^2 A^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} = \frac{a_1^2 a_2^2 A^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \frac{a_1^2 a_2^2 A^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} = V'_{n+1} V''_{n+1}$$

čím je veta dokázaná.

Literatúra

[1] *Alexandrov, A. D.:* Vypuklije mnogogranniki, Moskva—Leningrad 1950.

[2] *Čech, E.:* Základy analytické geometrie I, Praha 1951.

[3] *Fiedler, M.:* Geometrie simplexu v E_n, III. část. Časopis pro pěstování matematiky *81* (1956) str. 182—223.

[4] *Bartoš, P.:* O jednej metóde určenia polomeru vpísanej gule a gulí pripísaných simplexu v E_n a niektoré aplikácie. Tamže *92* (1967) str. 8—15.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Summary

THE THEOREMS OF EUCLID ON ORTHOGONAL SIMPLEXES

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In the paper the generalized theorems of Euclid on orthogonal simplexes in the space E_n are proved together with the theorem of Pythagoras as their consequence.