František Zítek
Sur la norme de Fourier

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 349--353

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117617`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

SUR LA NORME DE FOURIER

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 15 juin 1967)

Le but du présent article[1]) est de donner quelques résultats concrets concernant la norme de Fourier et ses rapports aux autres normes introduites par M. HARALD BERGSTRÖM dans sa monographie [1]. Nous avons introduit la notion de norme de Fourier pour les fonctions à variation bornée dans notre travail antérieur [2]; nous pourrions donc renvoyer le lecteur à [1] et [2] pour toutes les définitions nécessaires. Cependant, afin de rendre la lecture du présent article plus facile, nous allons commencer par faire un rappel sommaire des notions en question, en gardant le même système de notations utilisé déjà dans [2].

Soit donc M l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle, définies sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ entier, et jouissant des propriétés suivantes: elles sont non-négatives, non-décroissantes, bornées et „continues en moyenne", ce qui veut dire qu'elles vérifient

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] \tag{1}$$

pour tout x réel. Nous désignons ensuite par $\mathsf{R}(\mathsf{M})$ l'ensemble des fonctions qui sont des combinaisons linéaires (finies) à coefficients réels des fonctions de M. Il est aisé de voir que $\mathsf{R}(\mathsf{M})$ est précisément l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $(-\infty, +\infty)$, vérifiant (1).

Dans la suite, certains sous-ensembles particuliers de l'ensemble $\mathsf{R}(\mathsf{M})$ seront également considérés, à savoir: D — l'ensemble des fonctions de répartition, c'est-à-dire des fonctions $f \in \mathsf{M}$ vérifiant $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$; $\mathsf{R}(\mathsf{D})$ — l'ensemble des fonctions-combinaisons linéaires des fonctions $\in \mathsf{D}$, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$ vérifiant $f(-\infty) = 0$; Q — l'ensemble des $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$ qui sont non-décroissantes dans $(-\infty, 0)$ et dans $(0, +\infty)$; Q_0 — l'ensemble des $f \in \mathsf{Q}$ vérifiant $f(-\infty) = 0 = f(+\infty)$. On voit aisément que les relations suivantes ont lieu:

$$\mathsf{D} \subset \mathsf{M} \subset \mathsf{R}(\mathsf{M}), \quad \mathsf{D} \subset \mathsf{R}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{R}(\mathsf{M}), \quad \mathsf{Q}_0 \subset \mathsf{Q} \subset \mathsf{R}(\mathsf{M}), \quad \mathsf{Q}_0 \subset \mathsf{R}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{R}(\mathsf{M}).$$

[1]) Les résultats principaux reproduits ici ont fait objet du communiqué présenté à la Conférence sur les problèmes de convergence en Théorie des probabilités, qui a eu lieu au château de Liblice du 31 mai au 3 juin 1967.

Dans $\mathsf{R}(\mathsf{M})$, M. H. Bergström a introduit deux normes[2]): *la norme de Gauss*:

$$ {}_G\|f\|_\sigma = \sup_x \left| f(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right) \mathrm{d}f(t) \right| , \quad \sigma > 0 , $$

où

$$ \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u , $$

et *la norme majorante*, définie d'une façon implicite: pour $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, $\sigma > 0$, $|f|_\sigma$ sera le plus petit nombre réel vérifiant les quatre inégalités que voici (cfr. [1], p. 61):

(i) $|f(-\infty)| + \int_{-\infty}^{-\sigma} |\mathrm{d}f(t)| + \int_{+\sigma}^{+\infty} |\mathrm{d}f(t)| \leqq |f|_\sigma ,$

(ii) $$ |f(+\infty)| \leqq |f|_\sigma , $$

(iii) $$ \frac{1}{\sigma} \left| \int_{|t| \leqq \sigma} t \, \mathrm{d}f(t) \right| \leqq |f|_\sigma , $$

(iv) $$ \frac{1}{\sigma^2} \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 |\mathrm{d}f(t)| \leqq |f|_\sigma . $$

La norme de Fourier (voir [2]) est définie pour $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, $\sigma > 0$, par la formule

$$ {}_F\|f\|_\sigma = |f(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \, \mathrm{d}f(t) \right| . $$

Rappelons encore que toutes les trois normes vérifient les (in)égalités usuelles

$$ \|f_1 + f_2\| \leqq \|f_1\| + \|f_2\| $$

et

$$ \|af\| = |a| \, . \, \|f\| , \quad a \text{ réel} , $$

(identiquement en σ) et qu'elles coïncident sur M: si $f \in \mathsf{M}$, on a ${}_F\|f\|_\sigma = {}_G\|f\|_\sigma = |f|_\sigma = f(+\infty)$ pour tout $\sigma > 0$.

M. H. Bergström a montré (voir [1], p. 62 sqq) qu'il existe une constante positive α telle que

(2) $$ {}_G\|f\|_\sigma \leqq \alpha \, . \, |f|_\sigma $$

pour tout $\sigma > 0$ et pour toute $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$. Nous allons établir une inégalité analogue pour la norme de Fourier, à savoir:

---

[2]) Il s'agit en réalité de semi-normes dépendant d'un paramètre positif σ; il en va de même dans le cas de la norme de Fourier.

Pour toute $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$ on a

$$(3) \qquad {}_F\|f\|_\sigma \leqq 5 \,|\!|\!|f|\!|\!|_\sigma$$

pour tout $\sigma > 0$.

Pour démontrer l'inégalité (3) nous allons partir de l'inégalité suivante, valable pour toute $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$:

$$
\begin{aligned}
{}_F\|f\|_\sigma &= |f(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}\, \mathrm{d}f(t) \right| = \\
&= |f(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ist} - 1)\, \mathrm{d}f(t) \right| \leqq \\
&\leqq |f(-\infty)| + |f(+\infty) - f(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ist} - 1)\, \mathrm{d}f(t) \right| \leqq \\
&\leqq 2|f(-\infty)| + |f(+\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ist} - 1)\, \mathrm{d}f(t) \right| .
\end{aligned}
$$

Or, pour tout s tel que $|s\sigma| \leqq 1$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ist} - 1)\, \mathrm{d}f(t) \right| &= \left| \int_{|t| > \sigma} (e^{ist} - 1)\, \mathrm{d}f(t) + \int_{|t| \leqq \sigma} (e^{ist} - 1 - ist)\, \mathrm{d}f(t) + \right. \\
&\left. + \int_{|t| \leqq \sigma} ist\, \mathrm{d}f(t) \right| \leqq 2 \int_{|t| > \sigma} |\mathrm{d}f(t)| + \frac{1}{\sigma^2} \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 |\mathrm{d}f(t)| + \frac{1}{\sigma} \left| \int_{|t| \leqq \sigma} t\, \mathrm{d}f(t) \right| ;
\end{aligned}
$$

il en résulte donc en somme

$$
\begin{aligned}
{}_F\|f\|_\sigma \leqq 2 &\left[|f(-\infty)| + \int_{|t| > \sigma} |\mathrm{d}f(t)| \right] + |f(+\infty)| + \\
&+ \frac{1}{\sigma^2} \int_{|t| \leqq \sigma} t^2 |\mathrm{d}f(t)| + \frac{1}{\sigma} \left| \int_{|t| \leqq \sigma} t\, \mathrm{d}f(t) \right| .
\end{aligned}
$$

Maintenant, il suffit de se rappeler la définition de la norme majorante, c'est-à-dire les inégalités (i) – (iv), pour voir que (3) est bien vérifiée.

De plus, nous voyons que si $f(+\infty) = 0$, ce qui est le cas p. ex. des fonctions $f \in \mathsf{Q}_0$, l'inégalité (3) peut être remplacée par

$$(3') \qquad {}_F\|f\|_\sigma \leqq 4 |\!|\!|f|\!|\!|_\sigma$$

valable pour tout $\sigma > 0$.

En ce qui concerne la relation existant entre la norme de Fourier et celle de Gauss, rappelons que, comme l'a montré M. H. Bergström dans [1], p. 64 ssq, il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$(4) \qquad |\!|\!|f|\!|\!|_\sigma \leqq \beta \,{}_G\|f\|_\sigma$$

pour tout $\sigma > 0$ et pour toute $f \in \mathsf{Q}$. Il s'en ensuit que l'inégalité

$$ {}_F\|f\|_G \leqq 5\beta \, {}_G\|f\|_\sigma \tag{5} $$

est satisfaite pour $\sigma > 0$, $f \in \mathsf{Q}$.

Voilà donc une réponse partielle au problème posé à la fin du paragraphe 4 du travail [2]: dans Q, la norme de Fourier est plus faible ou (au plus) équivalente à la norme de Gauss. L'exemple donné dans [2], paragraphe 4, montre qu'elle peut être effectivement plus faible dans R(D), ce qui laisse soupçonner l'existence d'une relation analogue à (5) plus générale, mais cette partie du problème reste malheureusement encore ouverte.

Parmi les propriétés remarquables de la norme de Gauss, nous trouvons celle exprimée par le Théorème 2, donné dans [1], p. 66:

Il existe une constante positive γ telle que

$$ {}_G\|f * g\|_\sigma \leqq \gamma \, {}_G\|f\|_\sigma \, {}_G\|g\|_\sigma $$

pour tout $\sigma > 0$ et pour $f, g \in \mathsf{Q}$.[3])

Une inégalité analogue mais un peu plus générale est valable pour la norme de Fourier également. En effet:

Pour toutes $f_1, f_2 \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, on a

$$ {}_F\|f_1 * f_2\|_\sigma \leqq {}_F\|f_1\|_\sigma \cdot {}_F\|f_2\|_\sigma , \tag{6} $$

pour tout $\sigma > 0$.

Pour le démontrer, considérons d'abord le cas plus simple de $f_1, f_2 \in \mathsf{R}(\mathsf{D})$. Alors, en écrivant

$$ \varphi_j(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \, \mathrm{d}f_j(t) , \quad j = 1, 2, $$

nous voyons que

$$ {}_F\|f_1 * f_2\|_\sigma = \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s)| \leqq $$

$$ \leqq \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s)| \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_2(s)| = {}_F\|f_1\|_\sigma \cdot {}_F\|f_2\|_\sigma \, . $$

Dans le cas général de $f_1, f_2 \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, nous avons recours à la représentation (voir [1], p. 51)

$$ f_j = a_j + g_j , \quad j = 1, 2, $$

avec $a_j = f_j(-\infty)$, $g_j \in \mathsf{R}(\mathsf{D})$, $j = 1, 2$. Alors

$$ \varphi_j(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \, \mathrm{d}f_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \, \mathrm{d}g_j(t) , \quad j = 1, 2, $$

---

[3]) Le symbole de $*$ dénote, bien entendu, le produit de convolution au sens de [1].

et (cfr. [1])

$$(f_1 * f_2)(-\infty) = f_1(-\infty) f_2(-\infty) + f_1(-\infty)[f_2(+\infty) - f_2(-\infty)] + \\ + f_2(-\infty)[f_1(+\infty) - f_1(-\infty)] .$$

Or

$$|f_j(+\infty) - f_j(-\infty)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} f_j(t) \right| = |\varphi_j(0)| \leqq \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_j(s)| , \quad j = 1, 2,$$

pour tout $\sigma > 0$. Donc

$$\begin{aligned}
{}_F\|f_1 * f_2\|_\sigma &= |(f_1 * f_2)(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s) \quad \varphi_2(s)| = \\
&= |f_1(-\infty) f_2(-\infty) + f_1(-\infty)[f_2(+\infty) - f_2(-\infty)] + \\
&\quad + f_2(-\infty)[f_1(+\infty) - f_1(-\infty)]| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s) \varphi_2(s)| \leqq \\
&\leqq |f_1(-\infty)| . |f_2(-\infty)| + |f_1(-\infty)| . |f_2(+\infty) - f_2(-\infty)| + \\
&\quad + |f_2(-\infty)| . |f_1(+\infty) - f_1(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s) \varphi_2(s)| \leqq \\
&\leqq |f_1(-\infty)| . |f_2(-\infty)| + |f_1(-\infty)| . \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_2(s)| + |f_2(-\infty)| . \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s)| + \\
&\quad + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s)| . \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_2(s)| = \\
&= [|f_1(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_1(s)|] . [|f_2(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} |\varphi_2(s)|] = {}_F\|f_1\|_\sigma \cdot {}_F\|f_2\|_\sigma ,
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Il s'en ensuit, en particulier, l'inégalité

$${}_F\|f^{*n}\|_\sigma \leqq {}_F\|f\|_\sigma^n ,$$

valable pour $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, $\sigma > 0$, n entier positif; cette inégalité peut jouer un rôle très important dans l'étude des lois-limites.

Références

[1] *H. Bergström:* Limit Theorems for Convolutions. Stockholm—New York 1963.

[2] *F. Zítek:* Sur quelques théorèmes limites pour les fonctions aléatoires. Časopis pro pěstování matematiky, *91* (1966), 453—462.

Adresse de l'auteur: Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV).