Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Fuka

Заметка к максимальности некоторых алгебр функций

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 346--348

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117616

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

ЗАМЕТКА К МАКСИМАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ФУНКЦИЙ

JAROSLAV FUKA, Praha (Ярослав Фука), Прага

(Поступило в редакцию 7/VI. 1967 г.)

По известному результату Вермера, который является далекоидущим обобщением теоремы Фэйера, алгебра всех функций голоморфных в единичном круге и непрерывных вплоть до единичной окружности максимальна в алгебре всех функций непрерывных на единичной окружности. Если теперь X – вполне разрывное компактное множество на римановой сфере S, то вопрос по максимальности алгебры $A(X)$ всех функций голоморфных в $S \setminus X$ и непрерывных вплоть до X в алгебре всех функций непрерывных на X далеко еще не решен. Показано лишь (Рудин [1], Гоффман и Зингер [2]), что эта алгебра содержится в некоторой максимальной алгебре в предположении, что пересечение любого открытого круга с X или пусто или положительной лебеговой меры. В работе будет показано, что это предположение не в сути дела. Именно, будет показано, что если X – прямое произведение двух канторовых совершенных множеств, то $A(X)$ содержится в максимальной алгебре, хотя в етом случае X – множество нулевой лебеговой меры.

1. Пусть X – компактное хаусдорффово пространство, $C(X)$ – банахова алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на X с нормой $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$. Замкнутая подалгебра $A(X) \subset C(X)$ называется максимальной, если $A(X) = B(X)$ для любой собственной замкнутой подалгебры $B(X) \subset C(X)$, содержащей $A(X)$. $A(X)$ называется проникающей (pervasive, см. [1]), если для любой функции h, непрерывной на некотором собственном замкнутом подмножестве $K \subset X$,

$$\inf_{f \in A(X)} \max_{x \in K} |h(x) - f(x)| = 0\,.$$

Анализируя результат Рудина из [1], Гоффман и Зингер доказали следующую теорему (см. теорему 4.3 из [2]):

Пусть X – несвязное пространство, $A(X)$ собственная проникающая подалгебра $C(X)$. Тогда $A(X)$ содержится в некоторой максимальной субалгебре $B(X) \subset C(X)$. Если $f \in B(X)$, $f = u + iv$, то $u(X)$ – связное множество.

Всюду в дальнейшем X — нигде не плотное, несвязное компактное подмножество римановой сферы S, не разбивающее S, и такое, что существует непостоянная функция, непрерывная в S и голоморфная в $S \setminus X$. Обозначим A_X алгебру всех функций непрерывных на S и голоморфных в $S \setminus X$. Так как функции из A_X разделяют точки X (см. [3]), то в силу принципа максимума мы можем A_X отождествить с собственной замкнутой подалгеброй $A(X) \subset C(X)$. Всюду в дальнейшем $A(X)$ обозначает именно эту алгебру.

Если дополнительно предположить, что X обладает следующим свойством: пересечение любого открытого круга с X или пусто или положительной лебеговой меры, то можно доказать (см. например, [2]), что $A(X)$ будет проникающей и тем самым в силу приведенной выше теоремы будет содержаться в некоторой максимальной подалгебре $B(X) \subset C(X)$ (см. теорему 4.4 из [2]).

2. Пусть теперь X — произведение двух канторовых множеств, т. е. множество точек $z = x + iy$, где x и y принадлежит совершенному канторову множеству Π. Обозначим Q_n — множество 4^n квадратов n-того ранга, C_n — множество центров квадратов, составляющих Q_n. Как показал П. С. Урысон (см. [4]), последовательность функций

$$f_n(z) = \frac{1}{4^n} \sum_{\zeta \in C_n} \frac{1}{z - \zeta}$$

сходится всюду к непостоянной всюду в S непрерывной функции $f(z)$, голоморфной в $S \setminus X$, равной нулю на бесконечности, причем сходимость равномерная внутри $S \setminus X$.

Покажем, что $A(X)$ — проникающая алгебра. Пусть K — собственное замкнутое подмножество X. Возьмем точку $x_0 \in X \setminus K$ и обозначим δ ее расстояние от K. Существует такое n_0, что для всех $n \geqq n_0$ квадрат n-того ранга $\tilde{Q}_n$, содержащий x_0, не пересекается с $\delta/2$ — окрестностью K. Обозначим

$$X_n = X \cap \tilde{Q}_n\,, \quad C_k^{(n)} = C_k \cap \tilde{Q}_n\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

К последовательности

$$f_k^{(n)}(z) = \frac{1}{4^{k-n}} \sum_{\zeta \in C_k^{(n)}} \frac{1}{z - \zeta}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

можно, очевидно, применить все рассуждения Урысона и мы получаем, что последовательность $f_k^{(n)}$ всюду сходится к непостоянной непрерывной функции $f^{(n)}$, голоморфной в $S \setminus X_n$, равной нулю на бесконечности, причем сходимость равномерная внутри $S \setminus X_n$, тем самым равномерная на K. Оценим сначала модуль разности $R_k^{(n)} = 1/(z - x_0) - f_k^{(n)}(z)$ для всех z, расстояние которых от x_0 не меньше δ, и всех $k \geqq n$. Так как для таких k $C_k^{(n)}$ содержит 4^{k-n} точек, то достаточно оценить модуль разности $1/(z - x_0) - 1/(z - \zeta)$, $\zeta \in C_k^{(n)}$, числом не зависящим от $\zeta \in C_k^{(n)}$. Но так как $|z - x_0| \geqq \delta$, $|z - \zeta| \geqq |z - x_0| - |x_0 - \zeta| \geqq \geqq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$, то

$$\left|\frac{1}{z - x_0} - \frac{1}{z - \zeta}\right| = \left|\frac{\zeta - x_0}{(z - x_0)(z - \zeta)}\right| \leqq \frac{2|\zeta - x_0|}{\delta^2} \leqq \frac{2}{3^n \delta^2}.$$

Отсюда видно, что $|R_k^{(n)}| \to 0$ для $n \to \infty$. Так как $f_k^{(n)}$ стремится равномерно к $f^{(n)}$ вне δ — окрестности точки x_0, то отсюда следует, что

$$\left|\frac{1}{z - z_0} - f^{(n)}(z)\right| \leqq \left|\frac{1}{z - z_0} - f_{k_n}^{(n)}(z)\right| + |f_{k_n}^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| \to 0$$

для $n \to \infty$. Значит

$$\inf_{f \in A(X)} \sup_{z \in K} \left|\frac{1}{z - x_0} - f(z)\right| = 0 .$$

Но так как X и тем более K не разбивает S, то, в силу теоремы Мергеляна (см. [5]), всякую функцию из $C(X)$ можно равномерно приблизить с помощью полиномов от функции $1/(z - x_0)$ и тем самым для всякой функции $\varphi \in C(K)$ имеем $\inf_{f \in A(X)} \sup_{z \in K} |\varphi(z) - f(z)| = 0$ значит, алгебра $A(X)$ проникающая. Итак можно применить приведенную выше теорему Гоффмана и Зингера и мы можем заключить, что $A(X)$ содержится в некоторой максимальной подалгебре алгебры $C(X)$, хотя X — множество нулевой меры лебега.

Заметим еще, что этот результат можно доказать тоже с помощью теории, развинутой в работе [6].

Литература

[1] *W. Rudin:* Subalgebras of spaces of continuous functions, Proc. of the Amer. Math. Soc., 1956, *7*, No 5, 825—830.

[2] *I. M. Singer, K. Hoffman:* Maximal algebras of continuous functions, Acta Mathematica, 1960, *103*, 217—241.

[3] *J. Wermer:* Polynomial approximation on an arc in C^3, Ann. of Math., 1955, *62*, No 2, 269—270.

[4] *P. S. Urysohn:* Sur une fonction analytique partout continue, Fund. Math., 1922, *4*, 144—150.

[5] *С. Н. Мергелян:* Равномерные приближения функций комплексного переменного, Успехи матем. наук, 1952, *7*, 2 (48), 31—122.

[6] *R. Arens:* The maximal ideals of certain function algebras, Pacific journal of mathematics, 1958, *8*, 641—648.

Адресс автора: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).