# ÚLOHY A PROBLÉMY

**2.** Nechť $A_n(r \times r)$, $b_n(r \times 1)$, $r \geqq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou lebesgueovsky integrovatelné matice na $I = \langle 0, 1 \rangle$. Nechť

1° $A_n \to 0$, $b_n \to 0$ asymptoticky na $I$.

2° $A_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$ na $I$.

Nechť $\varphi_n$ je řešení rovnice

$$(\mathscr{E}_n) \qquad x(t) = 1 + \int_0^t (A_n x + b_n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

na $I$. (Takové řešení existuje právě jedno.)

Rozhodněte, zda platí následující věta:

$\varphi_n \to 1$ stejnoměrně na $I$, právě když funkce $\int_0^t A_n$, $\int_0^t b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou stejně absolutně spojité na $I$.

Poznámka. Pro $r = 1$ věta platí. Je totiž

$$(*) \qquad \varphi_n(t) = \exp \int_0^t A_n \left(1 + \int_0^t b_n(s) \exp\left(-\int_0^s A_n\right)\right)$$

a z Lebesgue-Vitaliho věty snadno plyne, že podmínka je postačující. Nechť obráceně $\varphi_n \to 1$ stejnoměrně na $I$. Protože

$$\varphi_n(t) \geqq \exp \int_0^t A_n \geqq 1\,, \quad \text{je} \quad \lim \int_0^1 A_n = 0 = \int_0^1 0\,,$$

tedy podle Lebesgue-Vitaliho věty $\int_0^t A_n$ jsou stejně absolutně spojité na $I$. Z(*) nyní vyplývá, že $\int_0^t b_n(s) \exp(-\int_0^s A_n)$ stejnoměrně na $I$. Buď $B_n(t) = \int_0^t b_n$, $t \in I$; pak $\int_0^t b_n(s) \exp(-\int_0^s A_n) = B_n(t) \exp(-\int_0^t A_n) + \int_0^t B_n(s) A_n(s) \exp(-\int_0^s A_n) \geqq B_n(t) \exp(-\int_0^1 A_n)$. Je tedy $\lim B_n(1) = 0 = \int_0^1 0$, a výsledek plyne zase z Lebesgue-Vitaliho věty.

*Karel Karták*, Praha

**Řešení úlohy č. 1** (autor J. Mařík) z roč. *81* (1956), str. 247:

*Úloha*: *Dokažte bez použití teorie Lebesgueova integrálu tuto větu*: *Buďte $f$, $g$ konečné funkce v intervalu* $(0,1)$; *funkce $g$ nechť je spojitá, funkce $f$ nechť má primitivní funkci a nechť je nezáporná. Potom funkce $fg$ má primitivní funkci.*

Řešení. Všechny uvažované funkce jsou definovány na $\langle 0,1 \rangle$ a jsou konečné. Řekneme, že $f \in \mathscr{N}$, jestliže existuje $F$ tak, že $F' = f$, přičemž derivace na hranici

$\langle 0, 1\rangle$ jsou jednostranné. Nechť $F(t) = \int_0^t f$; pak $F$ je neklesající, tedy pro každou spojitou $g$ existuje Riemann-Stieltjesův integrál $H(t) = \int_0^t g \, \mathrm{d}F$. Avšak jest např. $\int_t^{t+h} g \, \mathrm{d}F \leqq \max \{g(u); u \in \langle t, t + h\rangle\} [F(t + h) - F(t)]$, z čehož už lehce plyne, že $H'(t) = f(t) \, g(t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, takže $fg \in \mathcal{N}$.

**Řešení úlohy č. 10** (autor J. Mařík) z roč. *82* (1957) str. 454.

*Úloha*: *Buď $\mathfrak{M}$ nespočetný systém částí intervalu $\langle 0, 1\rangle$, z nichž každá má kladnou vnější míru. Rozhodněte, zda existuje bod $x \in \langle 0, 1\rangle$, který leží v nekonečně mnoha množinách ze systému $\mathfrak{M}$.*

Odpověď je záporná, jak vyplývá z článku N. Luzin, W. Sierpiński: Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non-dénombrable d'ensembles non-mesurables, C.r. Acad. Sci Paris, *165* (1917), str. 422–424.

*Karel Karták*, Praha