Jaroslav Fuka

O výsledcích sovětských matematiků v teorii stejnoměrných aproximací v komplexním oboru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 459--475

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117612`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

O VÝSLEDCÍCH SOVĚTSKÝCH MATEMATIKŮ V TEORII STEJNOMĚRNÝCH APROXIMACÍ V KOMPLEXNÍM OBORU

JAROSLAV FUKA, Praha

(Došlo dne 12. května 1967)

V tomto článku je podán přehled výsledků sovětských matematiků v teorii stejnoměrných aproximací spojitých funkcí pomocí analytických funkcí.

Mergeljanova věta, charakterizující ty rovinné kompakty, na nichž lze každou spojitou funkci holomorfní ve vnitřních bodech kompaktu stejnoměrně aproximovat s libovolnou přesností pomocí polynomů, patří dnes patrně ke všeobecnému matematickému vzdělání. Stala se běžně užívaným nástrojem matematiků, pracujících v teorii funkcí jedné i více komplexních proměnných, v teorii aproximace funkcí i v některých partiích funkcionální analysy, zejména v teorii Banachovských algeber. Není však u nás již tak běžně známo, že k důkazu této věty vytvořil S. N. MERGELJAN důmyslnou a zcela originální metodu, které lze užít k řešení řady dalších problémů v teorii aproximací. V tomto článku se proto pokusíme načrtnout hlavní myšlenky Mergeljanovy metody a podat přehled výsledků docílených její pomocí; zmíníme se však i o některých jiných otázkách teorie aproximací. Přitom si samozřejmě nečiníme nároky na úplnost: Jde nám jen o to, aby si čtenář mohl utvořit alespoň přibližnou představu o hloubce koncepcí a bohatosti výsledků, docílených sovětskými matematiky v tomto oboru.

1. V tomto odstavci budeme formulovat úlohy teorie stejnoměrné aproximace v komplexní rovině. Označení: E – kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$; $C(E)$-Banachova algebra všech komplexních funkcí spojitých na E s obvyklými operacemi sčítání a násobení funkcí a s normou $\|f\| = \max_{z\in E} |f(z)|$; $C_A(E)$-Banachova algebra všech komplexních funkcí spojitých na E a holomorfních ve vnitřních bodech E s normou prostoru $C(E)$; $A(E)$ – uzávěr v metrice prostoru $C(E)$ množiny všech funkcí holomorfních na E (t.j. holomorfních v nějakém, závisejícím na funkci, okolí kompaktu E); analogicky se definuje $R(E)$ resp. $P(E)$ jako uzávěr v metrice $C(E)$ množiny všech racionálních funkcí s póly vně E resp. množiny všech polynomů jedné komplexní proměnné. Zřejmě

$$P(E) \subset R(E) \subset A(E) \subset C_A(E) \subset C(E). \tag{1}$$

Teorie stejnoměrných aproximací se zabývá otázkami, kdy v (1) některé inkluse přecházejí v rovnost.

Z klasické Rungeho věty, která tvrdí, že každou funkci holomorfní na E lze na E s libovolnou přesností stejnoměrně aproximovat pomocí racionálních funkcí s póly mimo E resp. pomocí polynomů, jestliže E neroztíná $\mathbf{C}$ (tj. je-li $\mathbf{C} \setminus E$ souvislá množina), plyne, že rovnost $R(E) = A(E)$ platí pro každý kompakt E a rovnost $P(E) = A(E)$, jestliže E neroztíná $\mathbf{C}$. Jestliže však však E roztíná $\mathbf{C}$, pak má $\mathbf{C} \setminus E$ neprázdnou omezenou komponentu C_1, a tedy každá funkce z $P(E)$ (t.j. každá funkce, která je limitou posloupnosti polynomů, konvergující stejnoměrně na E, a tedy podle principu maxima i v C_1) musí být holomorfní i v C_1. Pak ale např. funkce $(z - z_1)^{-1}$, $z_1 \varepsilon C_1$, která leží v $R(E)$, nemůže ležet v $P(E)$. Rovnost $P(E) = A(E)$ platí tedy právě když E neroztíná $\mathbf{C}$. Na druhé straně je zřejmé, že $C_A(E) = C(E)$ platí právě tehdy, jestliže E neobsahuje vnitřní body, tj. je-li E řídký kompakt. Základní úlohou teorie stejnoměrných aproximací je tedy

Úloha I. *Charakterizovat ty kompakty, pro něž* $A(E) = C_A(E)$ a její speciální případy:

Úloha II. *Charakterizovat ty řídké kompakty, pro něž* $A(E) = C(E)$.

Úloha III. *Charakterizovat ty kompakty, neroztínající* $\mathbf{C}$, *pro něž* $P(E) = C_A(E)$

2. Zastavme se nejprve u úlohy III., po jejímž vyřešení S. N. Mergeljanem v r. 1951 [1] byly teprve úlohy I. a II. položeny. Prvním výsledkem v tomto směru je klasická Weierstrassova věta [2], která je konec konců podnětem a výchozím bodem ke vzniku teorie stejnoměrných aproximací v komplexní rovině: *Je-li E uzavřená úsečka na reálné ose, potom $P(E) = C(E)$ $(=C_A(E)$, neboť v tomto případě E neobsahuje vnitřní body).* V r. 1929 dokázal J. L. WALSH [3], [4] rovnost $P(E) = C(E)$ resp. $P(E) = C_A(E)$ s dodatečným, stále ještě velmi silným topologickým omezením: E je Jordanův oblouk resp. uzavřená Jordanova oblast. V r. 1931 ukázali F. HARTOGS a A. ROSENTHAL [5], že v případě řídkých kompaktů není již nutné žádné další omezení topologického charakteru: Dokázali totiž rovnost $P(E) = C(E)$ za předpokladu, že E neroztíná $\mathbf{C}$ a má (plošnou) Lebesgueovu míru nula. Konečně v r. 1934 vyřešil M. A. LAVRENTĚV [6], [7] úlohu III. pro případ řídkých kompaktů. Dokázal, že je-li E řídký kompakt, neroztínající $\mathbf{C}$, potom $P(E) = C(E)$. V r. 1945 dokázal M. V. KELDYŠ [8] rovnost $P(E) = C_A(E)$ v případě, že E neroztíná $\mathbf{C}$ a je uzávěrem omezené jednoduše souvislé oblasti. V r. 1951 publikoval S. N. Mergeljan v práci [9] nový, nepoměrně jednodušší důkaz Lavrentěvovy věty a pomocí zde rozvinuté metody vyřešil v citované již práci [1] definitivně úlohu III., dokázav tuto větu: *Budiž E kompaktní podmnožina komplexní roviny* $\mathbf{C}$. *K tomu, aby každou funkci, spojitou na E a holomorfní ve vnitřních bodech E bylo možno stejnoměrně aproximovat s libovolnou přesností na E pomocí polynomů, jest nutné a stačí, aby kompakt E neroztínal* $\mathbf{C}$. Podrobný důkaz této věty i řady dalších výsledků najde čtenář v Mergeljanově referátu [10].

3. Všimněme si, že netriviální část Mergeljanovy věty spočívá v tvrzení, že podmínka je postačující. Není proto příliš překvapující, že Mergeljanovy metody lze užít obecněji k nalezení postačujících podmínek v úloze I. a tedy i II. V této obecnější formě v tomto odstavci Mergeljanovu metodu popíšeme.

Metoda se zakládá na užití Greenovy formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\dfrac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \quad (z \in G,\ \zeta = \xi + i\eta) \tag{2}$$

a vhodné aproximaci jádra $(\zeta - z)^{-1}$ ve druhém integrálu. Ve (2) je G libovolná oblast s dostatečně hladkou (např. po částech hladkou) hranicí Γ, $f(z)$ libovolná funkce, která má v $G \cup \Gamma$ spojité parciální derivace podle x i y,

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \eta}\right)$$

a integruje se podle (dvojrozměrné) Lebesgueovy míry $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$. Tato formule plyne obvyklým způsobem z Greenovy věty. Čtenář nechť si uvědomí toto: Je-li $f(z)$ holomorfní v G, je vzhledem ke Cauchy-Riemannovým podmínkám $\partial f/\partial \bar z = 0$, dvojný integrál ve (2) odpadne a (2) se redukuje na obvyklou Cauchyovu formuli.

Zvolme tedy libovolnou funkci $f \in C_A(E)$. Budeme se snažit aproximovat ji libovolně přesně funkcemi z $A(E)$. Abychom mohli na f aplikovat formuli (2), je třeba f nejdříve zhladit. To je první krok Mergeljanova postupu: Prodloužíme f spojitě na dostatečně velký uzavřený kruh $K(0, R)$ se středem v počátku a poloměrem R, obsahující E ve svém vnitřku. Prodlouženou funkci budeme dále označovat f, $\omega(\delta)$ označíme její modul spojitosti

$$\omega(\delta) = \sup_{z_1, z_2 \in K(0,R), |z_1 - z_2| < \delta} |f(z_1) - f(z_2)|\,.$$

Zvolíme nyní pevně δ, $0 < \delta < 1$, a způsobem běžným v teorii reálných funkcí zhladíme $f(z)$ pomocí nezáporného rotačně symetrického jádra $K_\delta(r)$ (t.j. závislého jen na $r = |z|$). Tak dostaneme funkci

$$f_\delta(z) = \iint_{\mathbf{C}} f(\zeta)\, K_\delta(|\zeta - z|)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

(pro body z vně $K(0, R)$ klademe $f(z) = 0$). Na jádro $K_\delta(r)$ klademe jako obvykle tyto požadavky: $K_\delta(r) = 0$ pro $r > \delta$;

$K_\delta(r)$ je (jakožto funkce proměnných x, y) natolik hladká, aby f_δ měla uvnitř $K(0, R)$ spojité parciální derivace podle x i y.

Ihned je vidět, že platí

$$\|f - f_\delta\| \leqq \omega(\delta) \tag{3}$$

a že $f_\delta(z) = f(z)$ v těch bodech z, které i se svým δ-okolím leží v E, tj. že v takových bodech bude f_δ holomorfní (to plyne lehce užitím residuové věty vzhledem k rotační symetrii K_δ). Z rotační symetrie K_δ dále plyne

$$\iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial K_\delta(|\zeta - z|)}{\partial \bar{z}} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = 0 .$$

Jádro $K_\delta(r)$ lze dokonce zvolit tak, že platí

$$\iint_{\mathbf{C}} \left| \frac{\partial K_\delta(|\zeta - z|)}{\partial \bar{z}} \right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \leqq \frac{C}{\delta} .$$

Z posledních dvou vlastností plyne odhad

$$\left| \frac{\partial f_\delta(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leqq \frac{C \, \omega(\delta)}{\delta} . \tag{4}$$

Poznamenejme, že jádro se všemi požadovanými vlastnostmi je např. jádro $K_\delta(r) = 0$ pro $r > \delta$, $K_\delta(r) = (2/\pi\delta^2)(1 - r^2/\delta^2)$ pro $0 \leqq r \leqq \delta$.

Poněvadž f je spojitá, tedy $\omega(\delta) \to 0$ pro $\delta \to 0$, plyne ze (3), že stačí aproximovat funkci f_δ.

Druhý krok spočívá v užití formule (2) na f_δ. To se provede takto: Sestrojíme uvnitř $K(0, R)$ konečný systém D oblastí s dostatečně hladkou hranicí Γ, pokrývající E, tak, aby Lebesgueova míra množiny $D \setminus E$ byla libovolně malá. Na D a f_δ nyní užijeme (2). Dostáváme

$$f_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_\delta(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta . \tag{5}$$

První integrál v (5) je funkce holomorfní na E, stačí tedy aproximovat druhý integrál v (5), tj. „neanalytickou část" funkce f_δ. V tom je smysl užití formule (2). Dále

$$\iint_D \frac{\dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = \iint_{D \setminus E} \frac{\dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta + \iint_E \frac{\dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta . \tag{6}$$

Odhadněme první integrál na pravé straně (6). Jest

$$\left| \iint_{D \setminus E} \frac{\dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \right| \leqq \iint_{D \setminus E} \frac{\left| \dfrac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right|}{|\zeta - z|} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \leqq C \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint_{D \setminus E} \frac{1}{|\zeta - z|} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta$$

vzhledem ke (4). Je patrno, že $\iint_{D \setminus E} (\zeta - z)^{-1} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta$ nabude největší hodnoty v tom případě, kdy množina $D \setminus E$ bude „nejvíce soustředěna" okolo bodu z, tj. když $D \setminus E$ bude kruh se středem v bodě z. V tom případě se však integrál snadno spočítá přechodem k polárním souřadnicím a je, nezávisle na z, roven $2\pi r$, kde r je poloměr kruhu, tedy roven $2\pi\sqrt{(M/\pi)}$, kde M je míra $D \setminus E$. Tu jsme však mohli zvolit libovolně malou, např. menší než δ^2. Pak ale

$$\left|\iint_{D \setminus E} \frac{\frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta\right| \leqq C\,\omega(\delta) \to 0 \quad \text{pro} \quad \delta \to 0\,.$$

Úloha je tedy převedena na aproximaci integrálu

$$\iint_E \frac{\frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta\,.$$

Vzpomeňme si však, že v těch bodech $\zeta \in E$, které i se svým δ-okolím leží v E, je $f_\delta(z)$ holomorfní, tedy v nich platí $\partial f_\delta(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = 0$, odkud

$$\iint_E \frac{\frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = \iint_{E_\delta} \frac{\frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta\,,$$

kde E_δ je průnik uzávěru δ-okolí hranice kompaktu E s E.

Dosavadní úvahy, i když byly podstatné, byly poměrně jednoduché. Nejobtížnější úkol je právě aproximace integrálu

$$F_\delta(z) = \iint_{E_\delta} \frac{\frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta\,.$$

V tom spočívá třetí krok Mergeljanovy metody. Jeho idea spočívá v aproximaci jádra $(\zeta - z)^{-1}$ pomocí funkcí holomorfních na E. Jde o to, přemístit singularity funkce $(\zeta - z)^{-1}$ mimo E tak, aby se přitom příliš nezměnilo chování funkce $(\zeta - z)^{-1}$ vně malého okolí bodu ζ.

Představme si, že se nám pro každé $\zeta \in E_\delta$ podaří sestrojit funkci $\varphi_\delta(\zeta, z)$, holomorfní (v proměnné z) na E a splňující podmínky

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \varphi_\delta(\zeta, z)\right| \leqq \frac{C\delta^2}{|\zeta - z|^3} \quad \text{pro} \quad z \in E\,, \quad |\zeta - z| \geqq 2\delta\,. \tag{7}$$

$$|\varphi_\delta(\zeta, z)| \leqq \frac{C}{\delta} \quad \text{pro} \quad z \in E\,. \tag{8}$$

kde C je konstanta, závisející jen na ζ. Vzhledem ke kompaktnosti E_δ můžeme předpokládat, že $\varphi_\delta(\zeta, z)$ je po částech konstantní v proměnné ζ (přesně řečeno: existuje konečně mnoho bodů $\zeta_i \in E_\delta$, $i = 1, 2, \ldots, s$, tak, že pro každé $\zeta \in E$ $\varphi_\delta(\zeta, z) = \varphi_\delta(\zeta_i, z)$ pro některé ζ_i). Funkce

$$\Phi_\delta(z) = \iint_{E_\delta} \frac{\partial f_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \varphi_\delta(\zeta, z) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta$$

bude pak holomorfní na E a bude aproximovat $F_\delta(z)$ tím přesněji, čím menší bude δ. Vskutku

$$|F_\delta(z) - \Phi_\delta(z)| \leqq \frac{C\,\omega(\delta)}{\delta} \iint_{E_\delta} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \varphi_\delta(\zeta, z) \right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \tag{9}$$

vzhledem ke (4). Rozložme E_δ na dvě disjunktní množiny E_1, E_2, kde

$$E_1 = \{\zeta \in E_\delta;\ |\zeta - z| \geqq 2\delta\}\,, \quad E_2 = E_\delta \setminus E_1 = \{\zeta \in E_\delta,\ |\zeta - z| < 2\delta\}\,. \tag{10}$$

Zavedením polárních souřadnic dostaneme vzhledem k (7) a (8)

$$\iint_{E_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \varphi_\delta(\zeta, z) \right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \leqq C\delta^2 \int_0^{2\pi} \int_{2\delta}^R \varrho^{-3} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi \leqq C_1 \delta\,, \tag{11}$$

$$\iint_{E_2} |\varphi_\delta(\zeta, z)| \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \leqq \frac{C}{\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi = C_2 \delta \tag{12}$$

a dále

$$\iint_{E_2} \frac{1}{|\zeta - z|} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \leqq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi = C_3 \delta\,. \tag{13}$$

Z (11) až (13) vzhledem k (10) a (9) plyne pro libovolné $z \in E$ $|F_\delta(z) - \Phi_\delta(z)| \leqq C_4\,\omega(\delta)$, tedy $\|F_\delta - \Phi_\delta\| \to 0$ pro $\delta \to 0$. Jestliže tedy najdeme nějaké podmínky, zaručující existenci funkce $\varphi_\delta(\zeta, z)$ s vlastnostmi (7) a (8), bude tím současně ukázáno, že tyto podmínky stačí k tomu, aby platilo $A_E = C_A(E)$.

4. Nastíníme nyní, jak Mergeljan sestrojil v [1] funkci $\varphi_\delta(\zeta, z)$ pro úlohu III. I když je tu základní myšlenka opět jednoduchá, je tentokrát příliš speciální a nelze ji přenést na řešení úlohy I. Spočívá v tom, že v libovolném 2δ-okolí bodu $\zeta \in E_\delta$ lze najít kontinuum, neprotínající E, jehož průměr má velikost řádu δ, totiž Jordanův oblouk j_δ o průměru např. $\frac{1}{2}\delta$, spojující vně E dva vhodně zvolené body $z_1, z_2 \in \mathbf{C} \setminus E$, z nichž první je vzdálen od ζ např. $\frac{5}{4}\delta$, druhý $\frac{7}{4}\delta$. Takový j_δ existuje, neboť E neroztíná $\mathbf{C}$. Pomocí konformního zobrazení vnějšku jednotkového kruhu na vnějšek j_δ sestrojil Mergeljan nejdříve funkci $\varphi(z)$, pro niž lze pomocí silného aparátu teorie konformních zobrazení (podrobnosti důkazu viz v [10]) dokázat odhad (8) a odhad

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \varphi(z) \right| \leqq C \frac{\delta}{|\zeta - z|^2} \quad \text{pro} \quad |z - \zeta| \geqq 2\delta\,. \tag{14}$$

Odhad (14) však k důkazu $P(E) = C_A(E)$ nestačí, neboť místo (11) dostáváme nyní

$$(15) \qquad \iint_{E_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \varphi(z) \right| d\xi \, d\eta \leqq C\delta \int_0^{2\pi} \int_{2\delta}^{R} \varrho^{-2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = C\delta \log \frac{1}{\delta} .$$

a tedy

$$|F_\delta(z) - \Phi_\delta(z)| \leqq C\,\omega(\delta) \log \frac{1}{\delta} .$$

Tento výraz však obecně nekonverguje k nule pro všechny funkce z $C_A(E)$, jestliže $\delta \to 0$. Šťastný nápad vzít místo $\varphi(z)$ lineární kombinaci $\varphi(z)$ a jejího kvadrátu umožnil nakonec Mergeljanovi sestrojit funkci $\varphi_\delta(\zeta, z)$, pro niž již platí lepší odhad (7).

Této myšlenky nelze bezprostředně užít k nalezení postačujících podmínek netopologického charakteru pro rovnost $A(E) = C_A(E)$. Příčina je nasnadě: Jordanův oblouk o průměru řádu δ lze sice popsaným způsobem sestrojit v libovolném δ-okolí hraničního bodu ζ kompaktu E vždy, je-li ζ současně hraničním bodem nějaké komponenty doplňku k E. Jestliže však otevřená množina $\mathbf{C} \setminus E$ má nekonečně (t.j. spočetně) mnoho komponent, mohou existovat hraniční body, jež neleží na hranici žádné komponenty $\mathbf{C} \setminus E$ a není pak jasné, zda vůbec j_δ požadovaného průměru existuje.

Podrobnou analysou, provedenou v Mergeljanově semináři v létech 1953–54 se ukázalo, že podmínky k rovnosti $A(E) = C_A(E)$ a k řešení úlohy II. je třeba hledat v lokální formě v termínech analytické kapacity, zavedené v r. 1947 L. V. AHLFORSEM [11]. Řešení úlohy II. a postačující podmínka k rovnosti $A(E) = C_A(E)$ v termínech analytické kapacity však bylo dáno teprve v r. 1958 a 1959 A. G. VITUŠKINEM [12], [13], jehož přínos nyní stručně popíšeme.

Nejprve budeme definovat analytickou kapacitu. Budiž F kompaktní podmnožina $\mathbf{C}$. Označme $B(F)$ množinu všech funkcí, které jsou holomorfní v otevřené množině $\mathbf{C} \setminus F$ a v nekonečnu, rovny nule v nekonečnu a $|f(z)| \leqq 1$ pro $z \in \mathbf{C} \setminus F$. Analytická kapacita F se definuje takto:

$$(16) \qquad \gamma(F) = \sup_{f \in B(F)} |f'(\infty)| = \sup_{f \in B(F)} \lim_{z \to \infty} |z f(z)| .$$

Zřejmě platí

$$(17) \qquad \gamma(F) = \sup_{f \in B(F)} \left| \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(z) \, dz \right| ,$$

kde Γ je libovolná (hladká) křivka, obsahující F ve svém vnitřku. Pro libovolnou omezenou množinu S definujeme $\gamma(S) = \sup \gamma(F)$, kde supremum se bere přes všechny kompakty $F \subset S$.

Podstatou Vituškinovy myšlenky je odhad koeficientů v Laurentově rozvoji funkce $f \in B(F)$.

Lemma ([13]): *Nechť kompaktní množina F leží v kruhu $|z - \zeta| < \delta$. Nechť $f \in B(F)$ má vně $|z - \zeta| \leqq \delta$ Laurentův rozvoj*

$$f(z) = \frac{a_1}{z - \zeta} + \frac{a_2}{(z - \zeta)^2} + \frac{a_3}{(z - \zeta)^3} + \dots . \tag{18}$$

Potom pro koeficienty a_n, $n = 1, 2, \dots$, platí odhad

$$|a_n| \leqq 2e\, \gamma(F)\, n\delta^{n-1} . \tag{19}$$

Odhad (19) dostaneme užitím Cauchyova vzorce pro a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\Delta} f(z)\,(z - \zeta)^{n-1}\, dz , \tag{20}$$

kde Δ je libovolné číslo větší než δ. K tomu je třeba odhadnout maximum absolutní hodnoty $f(z)$ na kružnici $|z - \zeta| = \Delta$. Avšak pro taková z dostaneme užitím Cauchyovy formule

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta|=\delta} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, dt . \tag{21}$$

Jest totiž

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|t-\zeta|=R} \frac{f(t)}{t - z}\, dt - \int_{|t-\zeta|=\delta} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, dt \right)$$

pro každé $R > |z|$, ale první integrál je roven nule vzhledem k $f(\infty) = 0$. Integrand ve (21) je pro pevné z jakožto funkce proměnné t holomorfní vně F, rovná se nule v nekonečnu a jeho absolutní hodnota je nejvýše rovna $2/(\Delta - \delta)$. Funkce $-(f(t) - f(z))(\Delta - \delta)/2(t - z)$ leží tedy v $B(F)$ a podle definice analytické kapacity (viz vzorec (17)) tedy ze vztahu (21) dostáváme $|f(z)| \leqq 2\gamma(F)/(\Delta - \delta)$ pro $|z - \zeta| = \Delta$. Odtud volbou $\Delta = (1 + 1/n)\,\delta$ ve (20) dostáváme

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi\Delta \frac{2}{\Delta - \delta} \gamma(F)\, \Delta^{n-1} = 2n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \delta^{n-1}\, \gamma(F) < 2en\delta^{n-1}\, \gamma(F) ,$$

což je (19).

Představme si nyní, že se nám v δ-okolí nějakého hraničního bodu $\zeta \in E$ podaří najít kompakt F, $F \cap E = \emptyset$, jehož analytická kapacita $\gamma(F)$ je kladná. Podle definice $\gamma(F)$ se najde funkce $f \in B(F)$ tak, že pro ni platí $f'(\infty) > \gamma(F)/2$. f má vně kruhu $|t - \zeta| \leqq \delta$ Laurentův rozvoj (18). Jest

$$|f(z)| \leqq 1 , \quad |a_1| \geqq \tfrac{1}{2}\, \gamma(F) . \tag{22}$$

Pro funkci $\varphi(z) = -f(z)/a_1$ tedy platí pro $|\zeta - z| \geqq 2\delta$ vzhledem k odhadům (19)

$$(23) \qquad \left|\frac{1}{\zeta - z} - \varphi(z)\right| \leqq \frac{2}{\gamma(F)} \frac{1}{|\zeta - z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e\,\gamma(F)\, n\delta^{n-1}}{(2\delta)^{n-2}} =$$

$$= \frac{16e\delta}{|\zeta - z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = C \frac{\delta}{|\zeta - z|^2},$$

což je odhad typu (14). Dále zřejmě platí $|\varphi(z)| \leqq 2/\gamma(F)$. My však potřebujeme lepší odhad (7). K tomu je třeba odstranit člen $a_2/(z - \zeta)\, a_1$ z rozdílu $\varphi(z) = (\zeta - z)^{-1} - \varphi(z)$. Ale je jasné, jak to provést: Kvadrát funkce $f(z)$ má u $(\zeta - z)^{-2}$ koeficient a_1^2. Vezmeme-li tedy funkci

$$\varphi_\delta(z) = -\frac{f(z)}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^3} f^2(z),$$

dostaneme analogickými úvahami pomocí (19) odhad (7) a bude

$$|\varphi_\delta(\zeta, z)| \leqq \frac{2}{\gamma(F)} + \frac{4\delta}{\gamma^2(F)}.$$

Uvážíme-li ještě, že pro analytickou kapacitu platí $\gamma(F') \leqq \gamma(F)$ je-li $F' \subset F$ a že $\gamma(K(a, r)) = r$, tedy $\gamma(F) \leqq \delta$, dostáváme konečně

$$(24) \qquad |\varphi_\delta(\zeta, z)| \leqq C \frac{\delta}{\gamma^2(F)}.$$

K tomu, abychom dostali odhad (8), tedy podle (24) stačí, aby existovala konstanta C_ζ taková, že $\gamma(K(\zeta, \delta) \setminus E) \geqq C_\zeta \delta$. Z výsledků odst. 3 pak plyne tato věta [12]. *Budiž E kompakt v $\mathbf{C}$, $K(\zeta, \delta)$ kruh se středem v bodě ζ a poloměrem δ. Jestliže existuje posloupnost $\delta_n \to 0$ a konstanta C tak, že pro každý hraniční bod $\zeta \in E$ platí $\gamma(K(\zeta, \delta_n) \setminus E) \geqq C\delta_n$, přičemž C nezávisí ani na ζ ani na n, potom $A(E) = C_A(E)$.*

Tato krásná věta není ovšem jediným Vituškinovým přínosem k teorii stejnoměrných aproximací v rovině. V práci [13] vyřešil Vituškin úlohu II. Jeho výsledek zní takto: *Budiž E řídký kompakt v $\mathbf{C}$. Označme*

$$\gamma(\zeta, \delta) = \gamma(K(\zeta, \delta) \setminus E), \quad \gamma(\delta) = \inf_{\zeta \in E} \gamma(\zeta, \delta).$$

Každá z následujících podmínek je nutná a postačující k tomu, aby platilo $A(E) = C(E)$

$$(25) \qquad \varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\gamma(\delta)}{\delta^2} = \infty$$

$$(26) \qquad \gamma(\delta) = \delta$$

(27) *Pro libovolnou omezenou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{C}$ platí $\gamma(G \setminus E) = \gamma(G)$.* Důkaz postačitelnosti podmínky (25) se dostane vyloženou metodou. Poznamenejme jen, že úloha II. má „resolventu“

$$\varphi_E(z) = \iint_E \frac{1}{\zeta - z} \, d\xi \, d\eta \, .$$

To znamená, že k tomu, aby platilo $A(E) = C(E)$, stačí, aby bylo $\varphi_E \in A(E)$ (jak ukázal A. DENJOY [14], je φ_E spojitá v $\mathbf{C}$ a je zřejmě holomorfní vně E). Proto první i druhý krok metody vyložené v odst. 3 odpadají a k odhadu jádra $(\zeta - z)^{-1}$ stačí užít slabšího odhadu (14), tj. odhadu (23). V tom tkví podstata rozdílu mezi úlohou I. a II. K důkazu nutnosti podmínky (25) odkazujeme čtenáře na Vituškinovu práci [13] nebo na krásný Mergeljanův výklad v dodatku k ruskému překladu knihy [15].

Poznamenejme, že podmínky (25) a (26) (a (27)) vyjadřují pozoruhodnou nestabilitu analytické kapacity řídkých kompaktů: platí-li podstatně slabší podmínka (25), platí již i podmínka (26). Přímý důkaz tohoto tvrzení bez přechodu k aproximační větě není znám.

5. V tomto odstavci uvedeme některé výsledky, které lze dokázat pomocí metody vyložené v odstavci 3. a 4.

Především lze metodu i výsledky odstavců 3. a 4. přenést na aproximaci pomocí analytických funkcí v metrice L_p, $p \geqq 1$. Je jen třeba příslušně modifikovat definici analytické kapacity. To provedl S. O. SINANJAN v práci [16]. Definuje analytickou p-kapacitu kompaktu $F \subset \mathbf{C}$ takto: $\gamma_p(F) = \sup\limits_{f \in B_p(F)} |f'(\infty)|$, kde $B_p(F)$ je třída všech funkcí holomorfních v otevřené množině $\mathbf{C} \setminus F$ a v bodě ∞, rovných nule v bodě ∞ a takových, že

$$\sup_K \left\{ \frac{1}{\mu(K \setminus F)} \iint_{K \setminus F} |f(z)|^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} \leqq 1 \, ,$$

kde K je libovolný kruh, obsahující F, $\mu(K \setminus F)$ Lebesgueova míra množiny $K \setminus F$. Označme ještě $A_p(E)$ uzávěr v metrice $L_p(E)$ funkcí holomorfních na E. Sinanjan dokázal větu: *Budiž $p \geqq 2$. Je-li E řídký kompakt a je-li $p \geqq 2$, potom $A_p(E) = L_p(E)$ právě když platí $\gamma_p(K_\delta \setminus E) \geqq 2^{-1/p}\delta$ pro každý kruh $K_\delta \subset \mathbf{C}$ o poloměru δ. Je-li $1 \leqq p < 2$, platí vždy $A_p(E) = L_p(E)$.* Je zajímavé, že odtud neplyne Vituškinova věta. Sinanjan sestrojil takový řídký kompakt E, že platí $A_p(E) = L_p(E)$ pro libovolné $p \geqq 1$, zatímco $A(E) \neq C(E)$.

Mergeljanovy metody lze užít k řešení úlohy o stejnoměrné aproximaci funkcí na uzavřených podmnožinách $\mathbf{C}$ (nikoliv nutně omezených) pomocí celistvých funkcí. M.V. Keldyš a M. A. Lavrentěv ([17]) dokázali v r. 1939, že libovolnou funkci spojitou na dané řídké souvislé uzavřené množině $E \subset \mathbf{C}$ lze s libovolnou přesností stejnoměrně aproximovat pomocí celistvých funkcí právě když E je K-

množina. Přitom uzavřená podmnožina $E \subset \mathbf{C}$ se nazývá K-množinou, jestliže existuje taková nezáporná neklesající funkce $r_E(t)$, $r_E(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$, že libovolný bod $z \in \mathbf{C} \setminus E$ $(z \neq 0)$ lze s bodem ∞ spojit Jordanovým obloukem ležícím v $\mathbf{C} \setminus E$ a vně kruhu $|\zeta| \leqq r_E(|z|)$ (představme si, že E je „pevnina", $\mathbf{C} \setminus E$ obklopující ji „moře" a „jezera". Je-li E K-množina, nesmí být v E „jezera" a „moře" nesmí mít zhruba řečeno příliš hluboké „zálivy" nebo „průlivy"). Pomocí Mergeljanovy metody dokázal v r. 1964 N. U. ARAKELJAN [18] tento hluboký výsledek: *K tomu, aby každou funkci, spojitou na E a holomorfní ve vnitřních bodech E bylo možno s libovolnou přesností stejnoměrně aproximovat na E pomocí celistvých funkcí, jest nutné a stačí, aby E byla K-množinou.* Tato věta zřejmě obsahuje jako speciální případ Mergeljanovu větu, neboť kompaktní množina, neroztínající $\mathbf{C}$, je zřejmě K-množina (je-li R poloměr kruhu se středem v počátku, obsahující E, lze volit $r_E(t) = 0$ pro $t \leqq R$, $r_E(t) = t$ pro $t > R$).

Nejpozoruhodnějším výsledkem tohoto typu jsou však věty A. A. GONČARA [19], [20], které ukazují, že mezi úlohou II. a úlohou o stejnoměrné aproximaci všech funkcí spojitých na (řídkých) kompaktních podmnožinách R_n, $n \geqq 3$, pomocí harmonických funkcí existuje překvapující analogie. Zaveďme nejdříve označení: $\mathscr{E}$ – kompaktní podmnožina eukleidovského prostoru R_n, $n \geqq 3$; $H(\mathscr{E})$ – uzávěr v metrice prostoru $C(\mathscr{E})$ všech funkcí harmonických na $\mathscr{E}$ (t.j. harmonických v nějakém, závisejícím na funkci, okolí kompaktu $\mathscr{E}$); $c(\mathscr{E})$ – Newtonovská kapacita $\mathscr{E}$, tj. největší náboj, který lze rozložit na $\mathscr{E}$ tak, aby příslušný k němu Newtonovský potenciál byl nejvýše roven jedné (přesně: $c(\mathscr{E}) = \sup \mu(\mathscr{E})$, kde supremum se bere přes všechny nezáporné míry na $\mathscr{E}$, pro něž $\int_{\mathscr{E}} |P - Q|^{-n+2} \, d\mu(Q) \leqq 1$); $K(Q, \delta)$ – koule se středem v bodě Q a poloměrem δ.487Gončarův výsledek zní takto: *Budiž $\mathscr{E}$ řídký kompakt v R_n, $n \geqq 3$. Označme* $c(Q, \delta) = c(K(Q, \delta) \setminus \mathscr{E})$, $c(\delta) = \inf\limits_{Q \in \mathscr{E}} c(Q, \delta)$. *Každá z následujících tří podmínek je nutná a postačující k tomu, aby platilo* $H(\mathscr{E}) = C(\mathscr{E})$

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{c(\delta)}{\delta^n} = \infty \tag{28}$$

$$c(\delta) = \delta^{n-2} \tag{29}$$

(30) *Pro libovolnou omezenou otevřenou množinu $G \subset R_n$ platí $c(G \setminus \mathscr{E}) = c(G)$.*

Důkaz tohoto výsledku je zcela analogický důkazu Vituškinova řešení úlohy II., ukázaného v odst. 4. V souvislosti s touto analogií poznamenejme toto: Úloha II. je, jak ukázal americký matematik E. BISHOP [21], ekvivalentní s úlohou charakterizovat ty rovinné kompakty E, na nichž lze každou reálnou spojitou funkci s libovolnou přesností stejnoměrně aproximovat pomocí reálných částí funkcí holomorfních na E. Z druhé strany třída všech funkcí harmonických na E je podstatně rozsáhlejší než třída těch funkcí harmonických na E, které jsou reálnými částmi funkcí holomorfních na E, neboť sdružená funkce může být mnohoznačná. Proto jsou úlohy „harmonické" a „analytické" aproximace v rovině principiálně odlišné. Ačkoliv tedy úloha o aproximaci pomocí harmonických funkcí v prostoru R_n, $n \geqq 3$, je téhož typu jako úloha o „harmonické" aproximaci v rovině, forma jejího řešení je analogická úloze o „analytické" aproximaci v rovině. Čtenář nechť si srovná podmínky (28) až (30) s podmínkami (25) až (27) (zejména pro $n = 3$).

Nakonec poznamenejme, že Gončarova věta osvětluje v nových souvislostech i známá starší řešení úlohy o harmonické aproximaci v R_n, $n \geqq 3$. To však spadá mimo rámec článku a proto odkazujeme čtenáře na citované již Gončarovy práce nebo na společný Mergeljanův a Gončarův referát [22].

6. Jestliže pro kompakt E neplatí $A(E) = C_A(E)$, resp. $A(E) = C(E)$, vzniká otázka po vnitřní charakterizaci algebry $A(E)$. Řešení takto obecně formulovaného problému teorie stejnoměrných aproximací v rovině je patrně otázkou velmi vzdálené budoucnosti. Jsou s ním spojeny zajímavé otázky, vztahující se ke studiu chování holomorfních funkcí na kompaktních množinách a ve vícenásobně souvislých oblastech. Dříve než uvedeme některé byť i speciální výsledky v tomto směru, ukážeme příklady kompaktů, pro něž $A(E) \neq C(E)$ resp. $A(E) \neq C_A(E)$. První z nich pochází od S. N. Mergeljana [10].

Budiž K otevřený jednotkový kruh, Γ_0 jeho hranice. Odstraňme z $\bar{K}$ spočetný počet otevřených kruhů K_i s hranicemi Γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, tak, aby platilo: $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j = 0$ pro $i \neq j$; $\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i < \infty$, kde ϱ_i je poloměr Γ_i; množina $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ je hustá v $\bar{K}$. Dostaneme tak řídký souvislý kompakt E a tvrdíme, že platí $A(E) \neq C(E)$. Vskutku je-li r racionální funkce s póly mimo E, platí zřejmě

$$\int_\Gamma r(z)\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{31}$$

kde $\Gamma = \Gamma_0 - \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. Limitním přechodem dostaneme, že vztah (31) platí pro každou funkci z $A(E)$. Zvolme N tak, aby platilo $\sum_{i=N}^{\infty} \varrho_i < \frac{1}{2}$ a definujme funkci $f(z)$ takto: $f(z) = 1/z$ pro $z \in \Gamma_0$, $f(z) = 0$ na Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, N - 1$. Rozšiřme ji spojitě na E tak, aby bylo $|f(z)| \leqq 1$. Potom bude

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geqq \left|\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Gamma_i} |f(z)|\,\mathrm{d}s \geqq 2\pi - 2\pi \sum_{i=N}^{\infty} \varrho_i > \pi > 0\,.$$

Pro $f(z)$ tedy neplatí (31), tedy $f \notin A(E)$.

Druhý příklad pochází od A. A. Gončara [22]. Abychom jej mohli vyložit, potřebujeme pojem analytické C-kapacity, zavedené E. P. DOLŽENKEM v [23]. Jak bude patrno z následujícího odstavce, je tento pojem přirozený pro formulaci řešení úlohy I. Analytická C-kapacita kompaktu $F \subset \mathbf{C}$ se definuje vztahem

$$\alpha(E) = \sup |f'(\infty)|\,, \tag{32}$$

kde supremum se bere ve třídě funkcí $f(z)$ spojitých v $\mathbf{C}$, holomorfních v $\mathbf{C} \setminus F$

a v nekonečnu, rovných nule v nekonečnu a takových, že $|f(z)| \leqq 1$ pro $z \in \mathbf{C}$. Pro libovolnou omezenou množinu S definujeme $\alpha(S) = \sup \alpha(F)$, kde supremum se bere přes všechny kompakty $F \subset S$. Zřejmě $\alpha(S) \leqq \gamma(S)$. Gončar sestrojil uzavřenou oblast E, pro niž $A(E) \neq C_A(E)$. Ponechme označení z předchozího příkladu a zvolme v K řídký kompakt F, neroztínající $\mathbf{C}$ a takový, že $\alpha(F) > 0$. Konstrukce E je táž jako v předchozím příkladě s tím rozdílem, že kruhy nevybíráme z $\bar{K}$, ale z $\bar{K} \setminus F$ a místo hustoty množiny $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ v $\bar{K}$ požadujeme, aby množina všech hromadných bodů množiny středů kruhů K_i byla totožná s F. Kompakt $E = \bar{K} \setminus \setminus F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ je pak zřejmě uzávěrem oblasti $E^\circ = K \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Stejně jako v předchozím příkladě dostaneme vzhledem k $\sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i < \infty$, že pro každou $f \in A(E)$ platí (31). Avšak poněvadž $\alpha(F) > 0$ a F neroztíná $\mathbf{C}$, existuje funkce φ_F spojitá v $\mathbf{C}$ a holomorfní všude vně F tak, že

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} \varphi_F(z)\,\mathrm{d}z\right| = |\varphi_F'(\infty)| > \tfrac{1}{2}\alpha(F) > 0\,.$$

Odtud plyne, že

$$\left|\int_{\Gamma} \varphi_F(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\Gamma_0} \varphi_F(z)\,\mathrm{d}z\right| > 0\,.$$

Tedy zúžení φ_F na E neleží v $A(E)$, ačkoliv leží v $C_A(E)$. Uveďme ještě konkrétní příklad kompaktu F s požadovanými vlastnostmi. Je to např. libovolný uzavřený Jordanův oblouk j, ležící v K, jehož dvojrozměrná Lebesgueova míra $\mu(j)$ je kladná. Vskutku pro funkci

$$\varphi_j(z) = \iint_j \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,,$$

spojitou v $\mathbf{C}$ a holomorfní v $\mathbf{C} \setminus j$ (viz odst. 4), pak platí

$$|\varphi_j'(\infty)| = \left|\lim_{z\to\infty} \iint_j \frac{z}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right| = \left|-\iint_j \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right| = \mu(j) > 0\,,$$

tedy $\alpha(j) > 0$.

Vraťme se nyní k základnímu problému, položenému na počátku tohoto odstavce a pokusme se jej rozumně zúžit. Jde pak o to, charakterizovat ty kompakty, pro něž sice $A(E) \neq C_A(E)$ resp. $A(E) \neq C(E)$, avšak $A(E)$ zachovává některé základní vlastnosti analytických funkcí. První takovou vlastností je diferencovatelnost. E. P. Dolženko [24] ukázal, že v $A(E)$ vždycky existují funkce, které nemají ani v jednom bodě z E derivaci vzhledem ke množině E, jestliže E je řídký. Tento výsledek ukazuje, že studium diferenciálních vlastností funkcí z $A(E)$ je třeba zjemnit. Analytické funkce však mají i jiné základní vlastnosti, které lze, na rozdíl od diferencovatelnosti, přenést na obecné algebry funkcí. Především algebra všech funkcí spojiých v uzavřeném jednotkovém kruhu $\bar{K}$ a holomorfních v jeho vnitřku je antisymetrická (t.j. neobsahuje neokonstantní reálnou funkci) a má vlastnost jednoznačnosti: Jestliže se dvě takové funkce rovnají na nějaké podmnožině kruhu $\bar{K}$, otevřené v $\bar{K}$, pak jsou si identicky rovny. Algebru $A(E)$ budeme tedy nazývat analytickou, jestliže platí: Je-li $G \subset E$ otevřená v E a je-li $f \in A(E)$ rovna nule v G, potom f je rovna nule všude v E. Pokud jde o antisymetrické algebry, poznamenejme, že hrají značnou roli v teorii funkčních algeber (t.j. zhruba Banachovských podalgeber algebry $C(X)$, kde X je kompaktní Hausdorffův prostor). Jak ukázal E. Bishop [25], lze každou funkční algebru v jistém smyslu složit z antisymetrických algeber. Byla vyslovena domněnka, že každá algebra $A(E)$ Mergeljanova typu (viz první příklad tohoto odst.) je antisymetrická. Tuto domněnku vyvrátil důmyslnou konstrukcí protipříkladu americký matematik L. A. Steen [26]. Pokud jde o analytické algebry $A(E)$, zůstává i tu problém nevyřešen. Na základě myšlenky M. V. Keldyše sestrojil S. O. Sinanjan [27] řídký kompakt E takový, že $A(E)$ je analytická. Dokonce platí více: Je-li $f \in A_2(E)$ (viz odst. 5), f rovna nule skoro všude na nějaké otevřené podmnožině E, je $f = 0$ skoro všude v E.

Závěrem tohoto odstavce se zmiňme o aproximaci spojitých funkcí více komplexních proměnných. Zde je situace podstatně složitější. Jak ukázal americký matematik J. Wermer [28], existuje v $\mathbf{C}^3$ takový Jordanův oblouk j, že $P(j) \neq C(j)$. Z druhé strany E. Bishop (viz. o tom v [29]) ukázal, že je-li j diferencovatelný, platí již $P(j) = C(j)$. Zatím nejsilnější výsledek v tomto směru dokázal E. M. Čirka [30], který ukázal, že je-li projekce $j \subset \mathbf{C}^2$ na některou ze souřadnicových rovin $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ řídký kompakt, potom $A(j) = C(j)$.

7. V tomto závěrečném odstavci se jen velmi stručně zmíníme o některých jiných řešeních úlohy II. a o řešení úlohy I.

První je řešení E. Bishopa v termínech minimální hranice algebry $A(E)$. Bod $\zeta \in E$ nazveme vrcholkem algebry $A(E)$, jestliže existuje funkce $f \in A(E)$ tak, že $|f(\zeta)| > |f(z)|$ pro všechny $z \in E$, $z \neq \zeta$. Množinu všech vrcholků algebry $A(E)$ nazveme minimální hranicí $M(A)$ algebry $A(E)$. Poznamenejme, že pojem minimální hranice lze definovat obecně pro podprostory Banachovských prostorů a že je mu nyní ve funkcionální analyze věnována značná pozornost. Čtenáře, zajímajícího se o tuto problematiku, odkazujeme na knihu [31]. E. Bishop, který v [21] zavedl pojem minimální hranice, dokázal tuto větu [21]: *$A(E) = C(E)$ platí právě když $M(A) = E$.* Význam této krásné věty spočívá v tom, že ukazuje funkcionálně analytický přístup k řešení problémů klasické analysy a dává podnět k položení dalších obecnějších otázek.

Další řešení úlohy II. pochází od S. N. Mergeljana [15]. Mergeljan definuje funkci $m_A(\zeta)$. Budiž $\zeta \in E$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Položme $m_A(\zeta, \varepsilon, \delta) = \sup |f(\zeta)|$, kde supremum se bere ve třídě všech funkcí z $A(E)$, splňujících podmínky $\|f\| \leqq 1$, $|f(z)| < \varepsilon$ pro $|z - \zeta| > \delta$, $z \in E$. Nyní definujeme pro $\zeta \in E$, $m_A(\zeta) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0} m_A(\zeta, \varepsilon, \delta)$. Zřejmě $0 \leqq m_A(\zeta) \leqq 1$. Mergeljan vyslovil tuto větu: *$A(E) = C(E)$ právě když $m_A(\zeta) = 1$*

pro všechny $\zeta \in E$. V práci [32] dokázal A. A. Gončar, že funkce $m_A(\zeta)$ je charakteristickou funkcí $M(A)$, tj. $m_A(\zeta) = 1$ pro $\zeta \in M(A)$, $m_A(\zeta) = 0$ pro $\zeta \in E \setminus M(A)$, čímž je věta dokázána v důsledku Bishopovy věty. V [32] je dokázáno i kritérium, aby bod $\zeta \in E$ byl vrcholkem $A(E)$. Poznamenejme, že nedávno dostal M. S. Mel'nikov [33] úplnou lokální charakterizaci vrcholku $A(E)$ v termínech analytické kapacity. Jeho výsledek zní takto: *Budiž* $\zeta \in E$, $K(n)$ *mezikruží* $1/2^n \geqq |\zeta - z| \geqq 1/2^{n+1}$, $\gamma_n = \gamma(K(n) \setminus E)$. *K tomu, aby bod* $\zeta \in E$ *byl vrcholek* $A(E)$ *jest nutné a stačí, aby* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \gamma_n = \infty$.

Vraťme se nyní k řešení úlohy I. K jejímu řešení byly na základě analogie s úlohou II formulovány dvě hypotézy. První, která není dosud dokázána ani vyvrácena, formuloval A. A. Gončar: $A(E) = C_A(E)$ *platí právě když* $M(A) = M(C_A)$, *nebo ekvivalentně* $A(E) = C_A(E)$ *právě když* $m_A(\zeta) = m_{C_A}(\zeta)$ *pro každé* $\zeta \in E$ ($M(C_A)$, m_{C_A} se definují analogicky jako $M(A)$, m_A).

Druhou hypotézu formuloval S. N. Mergeljan: $A(E) = C_A(E)$ *právě když* $\alpha(K \setminus E) = \alpha(K \setminus E^\circ)$ *pro libovolný kruh* $K \subset \mathbf{C}$. Zde $\alpha(S)$ je analytická C-kapacita množiny S (viz (32) v odst. 6), E° vnitřek množiny E.

Tato hypotéza byla nedávno dokázána zcela novou metodou, technicky velmi komplikovanou, A. G. Vituškinem [34]. Novými hlubokými výsledky A. G. Vituškina je dovršena teorie stejnoměrných aproximací, i když stále zůstávají otevřeny, jak jsme se pokusili naznačit v odst. 6 a 7, velmi zajímavé a těžké problémy. Závěrem uveďme formulaci hlavních výsledků A. G. Vituškina, dokázaných v [34], [35] a [36].

Budiž E kompaktní podmnožina $\mathbf{C}$. *Každá z následujících dvou podmínek je nutná a stačí k tomu, aby platilo* $A(E) = C_A(E)$:

(33) *Ke každému bodu* $\zeta \in E$ *existuje konstanta* $r \geqq 1$, *závisející na* ζ, *tak, že platí*

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\alpha(K(\zeta, \delta) \setminus E^\circ)}{\alpha(K(\zeta, r\delta) \setminus E)} < \infty$$

(34) *Pro každou omezenou otevřenou množinu* $G \subset \mathbf{C}$ *platí* $\alpha(G \setminus E) = \alpha(G \setminus E^\circ)$.
Tato věta je dokázána v [34].

K formulaci dalšího Vituškinova výsledku označme $R(z, \delta)$ čtverec se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, středem v bodě z a délkou strany δ, $\Gamma(\delta)$ jeho hranici.

Budiž E kompaktní podmnožina $\mathbf{C}$, $f(z)$ *funkce spojitá v* $\mathbf{C}$ *s modulem spojitosti* $\omega(\delta)$. *K tomu, aby bylo* $f \in A(E)$, *je nutné a stačí, aby pro každý čtverec* $R(z, \delta)$ *platila nerovnost*

$$\left| \int_{\Gamma(\delta)} f(z) \, dz \right| \leqq C \, \omega(\delta) \, \gamma(R(z, \delta) \setminus E), \tag{35}$$

kde C je konstanta nezávisející ani na z ani na δ. To, že podmínka (35) je postačující, je ukázáno v [35], nutnost podmínky (35) je dokázána v [36].

[1] *С. Н. Мергелян:* О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов на замкнутых множествах, Доклады Акад. Наук СССР, *78*, № 3, (1951), 405—408.

[2] *K. Weierstrass:* Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1895, 633—639 a 789—805.

[3] *J. L. Walsh:* Über die Entwickelung einer analytischen Funktion nach Polynomen, Math. Annalen, *96* (1926), 430—436.

[4] *J. L. Walsh:* Über die Entwickelung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Polynomen, Math. Annalen, *96* (1926), 437—450.

[5] *F. Hartogs, A. Rosenthal:* Über Folgen analytischen Funktionen, Mathematische Annalen, *100* (1928), 212—263.

[6] *М. А. Лаврентьев:* К теории конформных отображений, Труды физ.-матем. института АН СССР им. В. А. Стеклова, 1934, вып. *5*, 159—246.

[7] *M. A. Lavrentieff:* Sur les fonctions d'une variable complexe, représentable par des séries de polynomes, Actualité Sci. et Ind. No 441, Paris 1936.

[8] *М. В. Келдыш:* О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутой области, Математический Сборник *16* (*58*) 3 (1945), 249—257.

[9] *С. Н. Мергелян:* О теореме М. А. Лаврентьева, Доклады Акад. Наук СССР, *77*, № 4 (1951), 565—568.

[10] *С. Н. Мергелян:* Равномерные приближения функций комплексного переменного, Успехи математических наук *7*, вып. 2 (48), 1952, 31—122.

[11] *L. V. Ahlfors:* Bounded analytic functions, Duke Math. J., *14* (1947), 1—11.

[12] *А. Г. Витушкин:* Некоторые теоремы о возможности равномерного приближения непрерывных функций аналитическими функциями, Доклады Акад. Наук СССР, *123* (1958), 959—962.

[13] *А. Г. Витушкин:* Условия на множество, необходимые и достаточные для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множестве функции, Доклады Акад. Наук СССР, *128* (1959), 17—20.

[14] *A. Denjoy:* Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensamble parfait discontinue de singularités, Comptes Rendus, *148* (1909), 1154—1156.

[15] *С. Н. Мергелян:* О некоторых результатах в теории равномерных и наилучших приближений полиномами и рациональными функциями. Приложение к книге Дж. Л. Уолша Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, Москва 1961.

[16] *С. О. Синанян:* Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади, Доклады Акад. Наук Армянской ССР, *35* (1962), 107—112.

[17] *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев:* Об одной задачи Карлемана, Доклады Акад. Наук СССР, *23* (1939), 746—748.

[18] *Н. У. Аракелян:* О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах, Известия Акад. Наук СССР, сер.-мат., *28* (1964), 1187—1206.

[19] *А. А. Гончар:* О равномерном приближении непрерывных функций гармоническими, Известия Акад. Наук СССР, сер.-мат., *27* (1963), 1239—1250.

[20] *А. А. Гончар:* О свойстве неустойчивости гармонической емкости, Доклады Акад. Наук СССР, *165* (1965).

[21] *E. Bishop:* A minimal boundary for function algebras, Pacific J. Math., *9* (1959), 629—642.

[22] *А. А. Гончар, С. Н. Мергелян:* О равномерном приближении аналитическими и гармоническими функциями, Современные проблемы теории аналитических функций, 94—101, Изд. Наука, Москва 1966.

[23] *Е. П. Долженко:* О приближении на замкнутых областях и нульмножествах, Доклады Акад. Наук СССР, *143* (1962), 771—774.
[24] *Е. П. Долженко:* Построение на нигде не плотном континууме нигде не дифференцируемой функции, разлагающейся в ряд по рациональным функциям, Доклады Акад. Наук СССР, *125* (1959), 970—973.
[25] *E. Bishop:* A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific J. Math., *11* (1961), 777—783.
[26] *L. A. Steen:* On uniform approximation by rational functions, Proceedings Amer. Math. Soc., *17* (1966), 1007—1011.
[27] *С. О. Синанян:* Свойства единственности аналитических функций на замкнутых множествах без внутренних точек, Сибирский математический журнал, *6* (1965), 1365—1381.
[28] *J. Wermer:* Polynomial approximation on an arc in C^3, Annals of Math., *62* (1955), 269—270.
[29] *J. Wermer:* Uniform approximation and maximal ideal spaces, Bulletin Amer. Math. Soc., *68* (1962), 298—305.
[30] *Е. М. Чирка:* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, Доклады Акад. Наук СССР, *167* (1966), 38—40.
[31] *R. R. Phelps:* Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand, Princeton.
[32] *А. А. Гончар:* О минимальной границе алгебры $A(E)$, Известия Акад. Наук СССР, сер. мат., *27* (1963), 347—356.
[33] *М. С. Мельников:* Оценка интеграла Коши по аналитической кривой, Математический Сборник, *71* (113), (1966), 513—514.
[34] *А. Г. Витушкин:* Условия на множество, необходимые и достаточные для того, чтобы всякая непрерывная функция, аналитическая во внутренних его точках, допускала равномерное приближение рациональными дробями, Доклады Акад. Наук СССР, *171* (1966), 1255—1258.
[35] *А. Г. Витушкин:* О приближении функций рациональными дробями, Доклады Акад. Наук СССР, *171* (1966), 1023—1026.
[36] *А. Г. Витушкин:* Оценка интеграла Коши, Математический Сборник, *71* (*113*), (1966), 515—534.