Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

POČÁTEČNÍ CAUCHYŮV PROBLÉM U HYPERBOLICKÝCH ROVNIC S MALÝM PARAMETREM

JOSEF NEDOMA, Brno

(Došlo dne 28. března 1966)

1. Zabývejme se počátečním Cauchyovým problémem u rovnice

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = F(x, t), \tag{1}$$

kde

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, u. \tag{2}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je bod v prostoru E_n, koeficienty $a_{ij}(x)$, $a(x)$ jsou definovány v E_n, pravá strana $F(x, t)$ je definována ve vrstvě $\bar{H} = E_n \times \langle 0, T \rangle$ a ε je malý kladný parametr. Předpokládejme, že koeficient $\beta(t)$ definovaný v intervalu $\langle 0, T \rangle$ splňuje podmínku

$$\beta(t) > 0 \tag{3}$$

a operátor Lu splňuje v E_n podmínky

$$a(x) \geqq 0, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha = \text{konst.} > 0. \tag{4}$$

Rovnice (1) je tedy v $\bar{H}$ hyperbolická. Počáteční podmínky mají tvar

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \tag{5}$$

kde funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definovány v E_n.

Cílem práce bude nalézt vztah mezi řešením tohoto problému a řešením analogického problému u zkrácené rovnice, kterou obdržíme z (1) jestliže položíme $\varepsilon = 0$, tedy u parabolické rovnice

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - LU = F(x, t). \tag{6}$$

V tomto případě lze pochopitelně předepsat jen jedinou počáteční podmínku

$$U(x, 0) = f(x) . \tag{7}$$

Zlámal ve své práci [1] se zabýval tímto problémem v případě, že eliptický operátor Lu v rovnici (1) je Laplaceův. Vycházel přitom z následující úvahy: Jestliže $\varepsilon = 0$, pak v rovnici (1) se sice nezmění její stupeň, ale změní se typ. Nelze proto očekávat, že $u(x, t)$ bude analytickou funkcí parametru ε v bodě $\varepsilon = 0$. Naopak lze očekávat, že ve vzorcích pro $u(x, t)$ se objeví tak zvané členy typu hraniční vrstvy (viz [2], str. 7 a 8). V rovnici (1) parametr ε však vystupuje pouze u druhé parciální derivace podle t a dále, hodnota řešení $u(x, t)$ pro $t = 0$ je rovna $U(x, 0)$. Tyto skutečnosti přivedly Zlámala k myšlence hledat řešení $u(x, t)$ ve tvaru

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon\, H(x, t) \left[1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}\right] + \varepsilon\, z(x, t, \varepsilon) .$$

Funkce $H(x, t)$ a $\nu(t)$ vybral tak, aby funkce $z(x, t, \varepsilon)$ vyhovovala homogenním počátečním podmínkám a aby platilo

$$\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial z}{\partial t} - Lz = O(1) . \tag{8}$$

Metodou Fourierovy transformace pak provedl odhad funkce $z(x, t, \varepsilon)$.

V práci vyjdeme z této Zlámalovy myšlenky. Řešení[1]) $u(x, t)$ problému (1), (5) hledáme ve tvaru

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon\, k(x) \left[1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}\right] + \varepsilon\, z(x, t, \varepsilon) , \tag{9}$$

kde $U(x, t)$ je řešením[1]) problému (6), (7) a funkce $k(x)$, $\nu(t)$, $z(x, t, \varepsilon)$ zvolíme tak, aby při každém $\varepsilon > 0$ platilo

$$z(x, 0, \varepsilon) = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{10}$$

a aby byl splněn vztah (8). Splnění tohoto vztahu je požadováno proto, aby bylo možno očekávat od samotné funkce z, že bude v jisté normě, kterou v dalším zavedeme, rovněž $O(1)$. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že uvedeným požadavkům vyhovují funkce

$$k(x) = \frac{\beta(0)\, g(x) - Lf - F(x, 0)}{\beta^2(0)} \tag{11}$$

$$\nu(t) = \int_0^t \beta(s)\, \mathrm{d}s \tag{12}$$

---

[1]) Pod pojmem řešení parciální diferenciální rovnice v nějaké oblasti $\mathfrak{A}$ rozumíme v celé své práci funkci, která je třídy C^1 v uzavřené oblasti $\overline{\mathfrak{A}}$, třídy C^2 v $\mathfrak{A}$, hoví daným okrajovým podmínkám a v $\mathfrak{A}$ splňuje danou rovnici. V literatuře se někdy taková řešení nazývají biregulárními.

přičemž funkce $z(x, t, \varepsilon)$ splňuje rovnici

$$\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial z}{\partial t} - Lz = P(x, t, \varepsilon), \tag{13}$$

kde

$$P(x, t, \varepsilon) = -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \beta'(t)\, k(x)\, e^{-\nu(t)/\varepsilon} + [1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}]\, Lk \tag{14}$$

a hoví při každém $\varepsilon > 0$ homogenním počátečním podmínkám (10).

Předpokládáme-li, že existuje nevlastní integrál po vrstvě $\bar{H}$ z kvadrátu funkce $z(x, t, \varepsilon)$ a integrál po E_n z kvadrátu funkce $k(x)$, pak z (9) dostáváme

$$\int_H [u(x, t) - U(x, t)]^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq \tag{15}$$

$$\leqq 2\varepsilon^2 \left\{ \int_H k^2(x) [1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}]^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_H z^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right\}.$$

Jestliže se nám podaří dokázat, že integrál po vrstvě $\bar{H}$ z kvadrátu funkce z je ohraničen konstantou nezávisející na ε, pak odtud dostáváme

$$\|u(x, t) - U(x, t)\|_{L_2(\bar{H})} = O(\varepsilon)$$

a přijdeme tak ke vztahu v normě $L_2(\bar{H})$ mezi řešeními $u(x, t)$ a $U(x, t)$. Jak se ukáže dále, vedlejším výsledkem našich úvah bude odvození vztahů i mezi derivacemi podle x_i a podle t řešení $u(x, t)$ a $U(x, t)$. Existenci nevlastního integrálu po E_n z kvadrátu funkce $k(x)$ snadno na základě (11) zajistíme patřičnými předpoklady o funkcích $f(x)$, $g(x)$ a $F(x, t)$. Jediným problémem tedy zůstává dokázat, že

$$\int_H z^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq M, \tag{16}$$

kde konstanta M nezávisí na ε. Víme, že funkce $z(x, t, \varepsilon)$ splňuje rovnici (13) a podmínky (10). Je přirozené, že se budeme nejdříve snažit odhadnout integrál v (16) pomocí pravé strany rovnice (13), tj. pomocí funkce $P(x, t, \varepsilon)$. Provedeme to v následující části *metodou energiových nerovností.*

II. Při odvozování energiových nerovností budeme často používat dobře známou Greenovu větu. Budeme používat její obecnější znění a proto je uvedeme.

Lemma 1. (Greenova věta, viz [3], str. 134.) 1. *Nechť E je uzavřenou a ohraničenou oblastí v $n + 1$ rozměrném prostoru E_{n+1} takovou, že její hranice $F(E)$ je plochou třídy C_a^1* [2]).

2. *Nechť* $\{Q_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, *je systém funkcí spojitých v* $\bar{E}$ *a třídy* C^1 *v* E.

3. *Nechť existuje integrál (v krajním případě jako nevlastní)*

$$\int_E \left| \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \right| \mathrm{d}x \,. \tag{17}$$

Potom platí

$$\int_E \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_{F(E)} \sum_{j=1}^{n+1} Q_j \cos(v, x_j) \,\mathrm{d}\sigma = 0 \,, \tag{18}$$

kde čísla $\cos(v, x_j)$ *jsou směrovými kosiny normály* v *k hranici* $F(E)$ *oblasti* E *v bodě* $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *orientované dovnitř oblasti* E.

Přistoupíme nyní k odvození energiové nerovnosti.

Pomocná věta 1. 1. *Nechť při libovolném* $\varepsilon > 0$ *funkce* $z(x, t, \varepsilon)$ *třídy* C^1 *v* $\bar{H}$ *a třídy* C^2 *v* H *splňuje rovnici* (13) *a podmínky* (10).

2. *Nechť* $a_{ij}(x) \in C^1(E_n)$, $a(x) \in C^1(E_n)$, *funkce* $\beta(t)$ *je spojitá v intervalu* $\langle 0, T \rangle$, *funkce* $a_{ij}(x)$ *jsou ohraničené v* E_n *a nechť platí* (3) *a* (4).

3. *Nechť při libovolném* $\varepsilon > 0$ *je funkce* $P(x, t, \varepsilon)$ *spojitá v* H *a existuje nevlastní integrál*

$$\int_H P^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,. \tag{19}$$

Potom platí

$$\int_H z^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq M_1 \int_H P^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,, \tag{20}$$

$$\int_H \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq M_1 \int_H P^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,, \tag{21}$$

$$\int_H \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq M_1 \int_H P^2(x, t, \varepsilon) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,, \tag{22}$$

kde konstanta M_1 *nezávisí na* ε.

Důkaz. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$. Označme $K_1 = n \max_{i,j} \sup_{E_n} |a_{ij}(x)|$. Zvolme libovolné $r > 0$. Sestrojme rotační kužel R s osou t tak, aby jeho řezem s rovinou $t = T$ byla n-rozměrná koule o poloměru r a aby jeho površky svíraly s rovinou $t = 0$

[2]) Definice plochy třídy C^1_σ je uvedena např. v [3], str. 132. Podotýkáme pouze, že koule, kruhový válec a komolý kruhový kužel jsou plochami třídy C^1_σ.

úhel γ takový, že $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{(\varepsilon/K_1)}$. Snadno se přesvědčíme, že rovnice boční plochy S kužele je

$$(23)\qquad G(x, t) \equiv \frac{\varepsilon}{K_1} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(t - T - r \sqrt{\frac{\varepsilon}{K_1}}\right)^2 = 0$$

a že všude na této ploše pro $t \in \langle 0, T \rangle$ platí

$$(24)\qquad \cos(\nu, t) < 0\,, \quad (\nu \ldots \text{normála orientovaná dovnitř kužele } R)\,.$$

Rovnici (13) vynásobíme funkcí $\partial z/\partial t$. Dostáváme

$$(25)\qquad \frac{\partial z}{\partial t}\left\{\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\right\} + \beta(t)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + a(x)\, z \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} P\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$(26)\qquad \frac{\partial z}{\partial t}\left\{\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\right\} + a(x)\, z \frac{\partial z}{\partial t} =$$
$$= - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + a z^2\right\}.$$

Po dosazení do (25) dostáváme

$$(27)\qquad - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + a z^2\right\} =$$
$$= P \frac{\partial z}{\partial t} - \beta(t)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

Rovnici (27) integrujeme po množině $\bar{R}_\xi = \bar{R} \cap \{0 \leqq t \leqq \xi\}$, kde $\xi \leqq T$ (lze to udělat, neboť podle předpokladů věty existuje integrál na pravé straně alespoň jako nevlastní) a na integrál na levé straně aplikujeme Greenovu větu.

Označme $S_\xi = S \cap \{0 \leqq t \leqq \xi\}$ a $\Omega_\xi = \bar{R} \cap \{t = \xi\}$. Vzhledem k (10) dostáváme

$$(28)\qquad \int_{S_\xi} \left\{\frac{\partial z}{\partial t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) - \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right] \cos(\nu, t)\right\} d\sigma -$$
$$- \frac{1}{2} \int_{S_\xi} a z^2 \cos(\nu, t)\, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\xi} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j}\, d\sigma + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_\xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\xi} a z^2\, d\sigma + \int_{R_\xi} \beta(t)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dt = \int_{R_\xi} \frac{\partial z}{\partial t} P\, dx\, dt\,.$$

První integrál na levé straně označíme písmenem J. Majorisujeme-li pravou stranu a vypustíme druhý, čtvrtý a pátý integrál na levé straně (jsou nezáporné), dostaneme na základě (3) a (4)

$$J + \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_\xi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma + \beta_0 \int_{R_\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dt \leqq \left|\int_{R_\xi} P\frac{\partial z}{\partial t}\, dx\, dt\right|, \tag{29}$$

kde $\beta_0 = \inf_t \beta(t)$. Dokážeme, že integrál J je nezáporný. K tomu stačí dokázat, že jeho integrand je nezáporný. Z (23) plyne, že plocha S_ξ má rovnici $G(x, t) = 0$, $t \in \langle 0, \xi \rangle$. V každém bodě $(x_1, \ldots, x_n, t) \in S_\xi$ platí

$$\cos(\nu, x_i) = \left(\frac{\partial G/\partial x_i}{\partial G/\partial t}\right)\cos(\nu, t), \quad \text{neboť} \quad \frac{\partial G}{\partial t} \neq 0\,.$$

Odtud po snadném výpočtu lze ověřit, že na S_ξ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) - \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right]\cos(\nu, t) = \\ = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial z/\partial t}{\partial G/\partial t}\right)^2\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2\right] - \right. \\ \left. - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left[\frac{\partial z}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial z/\partial t}{\partial G/\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial z}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial z/\partial t}{\partial G/\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial x_j}\right]\right\}\cos(\nu, t)\,. \end{aligned}$$

K tomu, aby tento výraz byl nezáporný, stačí vzhledem k (24) dokázat, že

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 \leqq 0\,. \tag{30}$$

Z (23) plyne

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{2\varepsilon}{K_1}x_i\,, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -2\left(t - T - r\sqrt{\frac{\varepsilon}{K_1}}\right).$$

Po dosazení do (30) opět s přihlédnutím k (23) dostaneme na S_ξ

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 = \frac{4\varepsilon^2}{K_1}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - 4\varepsilon\left(t - T - r\sqrt{\frac{\varepsilon}{K_1}}\right)^2 = \\ = \frac{4\varepsilon^2}{K_1^2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \frac{4\varepsilon^2}{K_1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 0\,. \end{aligned} \tag{31}$$

V nerovnosti (29) lze tedy integrál J vypustit. Použijeme-li na pravé straně (29) Schwartzovy nerovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega_\xi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma + \beta_0\int_{R_\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dt \leqq \\ \leqq \left(\int_{R_\xi} P^2\, dx\, dt\right)^{1/2}\left(\int_{R_\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\, dt\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Odtud dostáváme

$$\int_{R_\xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \frac{1}{\beta_0^2} \int_{R_\xi} P^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,. \tag{33}$$

Nerovnost (33) se neporuší, nahradíme-li na pravé straně integrál po $\bar{R}_\xi$ integrálem po $\bar{H}$. Poněvadž r je libovolné kladné číslo a úhel γ je ostrý, dostáváme odtud (21).

Z (32) a (33) plyne

$$\int_{\Omega_\xi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\sigma \leqq \frac{2}{\alpha\beta_0} \int_{R_\xi} P^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \frac{2}{\alpha\beta_0} \int_H P^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,. \tag{34}$$

Odtud máme

$$\int_H \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \frac{2T}{\alpha\beta_0} \int_H P^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,, \tag{35}$$

z čehož plyne (22). Při libovolném s platí

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-st} z^2\right) = -s e^{-st} z^2 + 2 e^{-st} z \frac{\partial z}{\partial t}\,. \tag{36}$$

Tedy

(37)

$$-\int_{S_\xi} e^{-st} z^2 \cos(v, t)\, \mathrm{d}\sigma + \int_{\Omega_\xi} e^{-st} z^2\, \mathrm{d}\sigma + s \int_{R_\xi} e^{-st} z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 2 \int_{R_\xi} e^{-st} z \frac{\partial z}{\partial t}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

Odtud

$$(s - 1) \int_{R_\xi} e^{-st} z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \int_{R_\xi} e^{-st} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,. \tag{38}$$

Zvolíme-li $s = 2$ a použijeme nerovnosti $e^{-2\xi} \leqq e^{-2t} \leqq 1$, dostáváme odtud

$$e^{-2\xi} \int_{R_\xi} z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \int_{R_\xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

Z (33) tedy plyne

$$\int_{R_\xi} z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq \frac{e^{2T}}{\beta_0^2} \int_H P^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

a odtud (20). Pomocná věta 1 je tím plně dokázána.

Energiových nerovností použijeme nyní k odhadu funkce $z(x, t, \varepsilon)$ a jejich derivací v normě $L_2(\bar{H})$. Ze vztahů (21), (22) a (23) vidíme, že stačí k tomu provést odhad nevlastního integrálu po $\bar{H}$ z kvadrátu funkce $P(x, t, \varepsilon)$. Z (14) plyne

$$P^2(x, t, \varepsilon) \leqq 3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 + 3\beta'^2(t)\, k^2(x) + 3(Lk)^2\,. \tag{39}$$

Integrujeme-li tuto nerovnost po vrstvě $\bar{H}$, dostáváme

$$\int_H P^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqq 3 \int_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + 3 \int_H [\beta'^2(t)\, k^2(x) + (Lk)^2] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,. \tag{40}$$

K existenci nevlastního integrálu na levé straně nerovnosti (40) stačí dokázat konvergenci dvou nevlastních integrálů na straně pravé. V případě druhého z nich je věc jednoduchá, neboť ji můžeme na základě (11) zajistit patřičnými předpoklady o funkcích $f(x)$, $g(x)$, $F(x, t)$ a $\beta(t)$. Problémem tedy zůstává zjistit předpoklady garantující existenci druhé derivace funkce $U(x, t)$ podle t v $\bar{H}$ a konvergenci nevlastního integrálu

$$\int_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \,. \tag{41}$$

Tomuto problému je věnována další část. Podotýkáme, že na základě (40) odhad integrálu (41) dostaneme nezávislý na ε.

III. Budeme se zabývat nejdříve obecnější parabolickou rovnicí, než je rovnice (6) a to

$$\mathfrak{L}U \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i} + C(x, t)\, U - \frac{\partial U}{\partial t} = \mathfrak{F}(x, t)\,, \tag{42}$$

kde

$$A_{ij} = A_{ji}\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{pro} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0\,. \tag{43}$$

Zavedeme nyní několik označení, která budeme dále často používat:

Ω znamená n-rozměrnou kouli v prostoru E_n.

$Q = \Omega \times (0, T)$ znamená válec, jeho hranici $F(Q)$ bez bodů ležících uvnitř horní základny označujeme Γ, tedy $\Gamma = \Omega \cup (F(\Omega) \times \langle 0, T \rangle)$.

S znamená množinu bodů náležejících do Γ a neležících v rovině $t = 0$, tedy $S = F(\Omega) \times (0, T\rangle$.

Q^δ znamená oblast sestávající z bodů válce $\bar{Q}$ takových, že jejich vzdálenost od S je větší než δ.

Budeme říkat, že funkce $U(x, t)$ splňuje rovnici (42) v nějakém bodě (x, t), jestliže $U(x, t)$ je v něm spojitá zároveň se všemi derivacemi vystupujícími v rovnici (42) a funkce zároveň s těmito derivacemi vyhovuje dané rovnici.

Uvedeme nejdříve bez důkazů několik vět z [4], jejichž znění přizpůsobíme naší potřebě.

Lemma 2. (Viz [4], str. 10, věta 5.) *Nechť funkce $U(x, t)$ je spojitá v $\bar{Q}$ a v $\bar{Q} \setminus \Gamma$ splňuje rovnici (42), přičemž platí (43). Nechť $\mathfrak{F}(x, t)$ je ohraničená funkce ($|\mathfrak{F}| \leqq M_2$) a koeficient $C(x, t) \leqq M_3$, kde $M_3 > 0$. Nechť $|U(x, t)|_\Gamma \leqq M_4$.*

Potom všude v $\bar{Q}$ platí

$$|U(x, t)| \leqq e^{M_3 t}(M_2 t + M_4)\,. \tag{44}$$

Lemma 3. (Viz [4], str. 22, věta 1 a poznámku na str. 25.) *Nechť funkce $U(x, t)$ splňuje rovnici (42) ve válci Q. Nechť $|U(x, t)| \leqq M_5$ v $\bar{Q} \setminus \Gamma$, koeficienty A_{ij}, B_i, C a funkce $\mathfrak{F}$ nechť jsou spojité v $\bar{Q} \setminus \Gamma$ zároveň se svými derivacemi prvého řádu podle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, přičemž platí*

$$A_{ij} = A_{ji}\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \geqq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \quad \mu = \text{const} > 0\,. \tag{45}$$

Nechť kromě toho funkce $U(x, t)$ má v $\bar{Q} \setminus \Gamma$ spojité derivace tvaru

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k} \text{ a } \frac{\partial^2 U}{\partial x_k\, \partial t} \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Potom ve válci $\bar{Q}^\delta = Q^\delta \cap \{\delta \leqq t \leqq T\}$, kde δ je libovolně malé číslo větší než nula, platí

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)^2 \leqq M_6\,, \tag{46}$$

kde M_6 závisí pouze na δ, M_5, μ a také na maximech modulů koeficientů rovnice, funkce $\mathfrak{F}$ a jejich prvních derivacích podle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v $\bar{Q}^{\delta/2}$.

V případě, že v rovnici (42) lze v $\bar{Q} \setminus \Gamma$ použít diferenciální operace tvaru

$$\frac{\delta^{k+s}}{\partial x_1^{k_1}, \ldots, \partial x_n^{k_n}\, \partial t^s}\,, \quad k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\,, \quad k + 2s \leqq r\,, \quad s \leqq \left[\frac{r}{2}\right] - 1 \quad (r \geqq 2)\,,$$

pak analogické odhady lze obdržet pro derivace tvaru

$$\frac{\partial^{p+qv}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}\, \partial t^q}\,, \quad p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n\,, \quad p + 2q \leqq r\,.$$

V dalším budeme říkat, že nějaká funkce $v(x, t)$ na množině $\mathfrak{E}$ je třídy $C^{m+\lambda}(\mathfrak{E})$, jestliže má na $\mathfrak{E}$ spojité derivace m-tého řádu splňující Hölderovu podmínku[3]) s exponentem λ, $0 < \lambda < 1$.

Lemma 4. (Viz [4], str. 43, věta 1 a poznámku na str. 49.) *Ve válci $\bar{Q}$ existuje jediná funkce $U(x, t)$ spojitá v $\bar{Q}$ zároveň se všemi derivacemi vystupujícími v rovnici (42), splňující tuto rovnici v Q a splňující podmínky*

$$U(x, 0) = \varphi(x)\,, \quad U(x, t)|_S = 0\,, \tag{47}$$

[3]) Že funkce $v(x, t)$ splňuje na množině $\mathfrak{E}$ Hölderovu podmínku s exponentem $\lambda > 0$, znamená jako obvykle, že zlomek $|v(P_1) - v(P_2)|/[r(P_1, P_2)]^\lambda$, kde $r(P_1, P_2)$ je vzdálenost bodů P_1 a P_2 je shora ohraničen pro libovolnou dvojici bodů P_1, P_2 z $\mathfrak{E}$.

jestliže jsou splněny následující předpoklady:

1. *Platí* (45) *pro* $(x, t) \in \bar{Q}$.

2. *Koeficienty* A_{ij}, B_i, C *a pravá strana* $\mathfrak{F}$ *rovnice* (42) *jsou ve válci* $\bar{Q}$ *třídy* $C^{4+\lambda}$ *jako funkce proměnných* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *a splňují Lipschitzovu podmínku vzhledem k* t *zároveň s prvními a druhými derivacemi podle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. $\varphi(x) \in C^{6+\lambda}(\Omega)$.

4. *Platí*

$$\varphi(x)|_{F(\Omega)} = 0 \tag{48}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, 0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + C(x, 0)\, \varphi\right]_{x \in F(\Omega)} = \mathfrak{F}(x, 0)|_{x \in F(\Omega)} \,. \tag{49}$$

Jestliže $\varphi(x) \in C^{r+4+\lambda}(\Omega)$, *kde* $r > 2$ *a jestliže v každé uzavřené oblasti* $\bar{Q}^* \subset \bar{Q} \setminus S$ *existují spojité a splňující vzhledem k* x *Hölderovu podmínku všechny derivace tvaru*

$$\frac{\partial^{k+s} A_{ij}(x, t)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^s}, \quad k + 2s \leqq r + 2\,, \quad s \leqq \left[\frac{r}{2}\right] \tag{50}$$

a tutéž vlastnost mají funkce B_i, C *a* $\mathfrak{F}$, *pak v* $\bar{Q} \setminus S$ *existují spojité derivace tvaru*

$$\frac{\partial^{p+q} U(x, t)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}, \ldots, \partial x_n^{k_n} \partial t^q}, \quad p + 2q \leqq r\,. \tag{51}$$

Lemma 5. (Viz [4], str. 84, věta 2 a poznámku na str. 86.) *Ve vrstvě* $\bar{H} = E_n \times \langle 0, T\rangle$ *existuje jediná ohraničená a spojitá funkce* $U(x, t)$ *splňující rovnici* (42) *ve vrstvě* $H = E_n \times \langle 0, T\rangle$ *a počáteční podmínku*

$$U(x, 0) = \psi(x)\,, \tag{52}$$

jestliže jsou splněny následující předpoklady:

1. *Platí* (45) *v* $\bar{H}$.

2. *Koeficienty* A_{ij}, B_i, C *a funkce* $\mathfrak{F}$ *v* $\bar{H}$ *jsou ohraničeny, spojité a splňují Hölderovu podmínku vzhledem k* x *a koeficienty* A_{ij} *též Hölderovu podmínku vzhledem k* t.

3. *Funkce* $\psi(x)$ *je spojitá a ohraničená v celém prostoru* E_n.

Jestliže $\psi(x) \in C^{2+\lambda}(E_n)$, *pak funkce* $U(x, t)$ *má v* $\bar{H}$ *spojité derivace*

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_s}, \quad i, k, s = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dokážeme nyní pomocnou větu

Pomocná věta 2. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

1. *Funkce $U(x, t)$ je řešením*[4]) *v Q prvního smíšeného problému* (42), (47).
2. *Platí* (45) *v $\bar{Q}$.*
3. *Funkce B_i, C a $\mathfrak{F}$ jsou spojité v $\bar{Q}$ a $A_{ij} \in C^1(\bar{Q})$.*

Potom platí

$$\int_Q \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M_7 \left\{\int_Q \mathfrak{F}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \left[\varphi^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2\right] \mathrm{d}x\right\}, \tag{53}$$

kde konstanta M_7 závisí jen na T, μ a na suprémech modulů funkcí A_{ij}, B_i, C, $\partial A_{ij}/\partial x_k$, $\partial A_{ij}/\partial t$.

Podobná věta je uvedena v [4]. Tam se však důkaz provádí za silnějšího předpokladu, že $U(x, t) \in C^2(\bar{Q})$ a z jejího znění není patrno, zda M_7 nezávisí rovněž na Q. Proto modifikovaný důkaz uvedeme. Postupujeme při tom podobně jako v [4].

Důkaz. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\frac{\partial U}{\partial t} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_j}\right) - \tag{54}$$

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{A_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\left(A_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}.$$

Rovnici (42) vynásobíme funkcí $\partial U/\partial t$. Vzhledem k (54) dostáváme

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} = \tag{55}$$

$$= \mathfrak{F} \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{\partial U}{\partial t} \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - CU \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2.$$

Výraz na levé straně má tvar divergence, pravá strana je funkcí spojitou v $\bar{Q}$. Můžeme proto obě strany rovnice integrovat po libovolném válci $\bar{Q}_\xi = \bar{Q} \cap$

[4]) Viz poznámku 1), kde je řečeno, co rozumíme pod pojmem řešení daného problému.

$\cap \{0 \leqq t \leqq \xi\}$, $\xi \in \langle 0, T\rangle$ a na pravou stranu aplikovat Greenovu větu. Vzhledem k (47) dostáváme

$$
(56) \qquad \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{t=\xi} \mathrm{d}x + \int_{Q_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =
$$

$$
= \int_{Q_\xi}\left[-\mathfrak{F}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial U}{\partial t}\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial U}{\partial x_i} + CU\frac{\partial U}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, 0)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Majorisujeme-li pravou stranu a vypustíme první integrál na levé straně, který je nezáporný, dostáváme

$$
\int_{Q_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq
$$

$$
\leqq K_1\left\{\int_{Q_\xi}\left[\left|\mathfrak{F}\frac{\partial U}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \left|U\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\right\} \leqq
$$

$$
\leqq \frac{1}{2}\int_{Q_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + K_2\left\{\int_{Q_\xi}\left[U^2 + \mathfrak{F}^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\right\},
$$

kde konstanty K_1, K_2 závisí jen na suprémech modulů funkcí A_{ij}, B_i, C, $\partial A_{ij}/\partial x_k$, $\partial A_{ij}/\partial t$. Dostali jsme tedy nerovnost

$$
(57) \qquad \int_{Q_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq
$$

$$
\leqq 2K_2\left\{\int_{Q_\xi}\mathfrak{F}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x + \int_{Q_\xi}\left[U^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right\}.
$$

Odhadneme nyní poslední integrál na pravé straně. Nechť r je libovolná nezáporná konstanta. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$
(58) \qquad e^{-rt}U\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-rt}A_{ij}U\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) -
$$

$$
- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-rt}U^2\right) - e^{-rt}\left(U\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{r}{2}U^2\right).
$$

Rovnici (42) vynásobíme funkcí $-e^{-rt}U$. Vzhledem k (58) dostáváme

$$
-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-rt}A_{ij}\,U\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-rt}U^2\right) =
$$

$$
= -e^{-rt}\left(\mathfrak{F}U - U\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial U}{\partial x_i} - CU^2 + U\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{r}{2}U^2\right).
$$

Obě strany rovnice lze opět integrovat po Q_ξ a na levé straně aplikovat Greenovu větu. Vzhledem k (47) dostáváme

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{-r\xi} U^2(x, \xi)\,dx + \int_{Q_\xi} e^{-rt} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\,dx\,dt + \frac{r}{2}\int_{Q_\xi} e^{-rt}U^2\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2\,dx - \int_{Q_\xi} \mathfrak{F} U e^{-rt}\,dx\,dt + \int_{Q_\xi} e^{-rt} C U^2\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q_\xi} e^{-rt} U \left[\sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\right] dx\,dt\,.$$

Majorisujeme-li pravou stranu této rovnice, vypustíme první integrál na levé straně, který je nezáporný a přihlédneme-li k (45), dostáváme

$$(59)\qquad \mu \int_{Q_\xi} e^{-rt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt + \frac{r}{2}\int_{Q_\xi} e^{-rt} U^2\,dx\,dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2\,dx + K_3\int_{Q_\xi} e^{-rt}\mathfrak{F}^2\,dx\,dt + K_3\int_{Q_\xi} e^{-rt}U^2\,dx\,dt +$$

$$+ K_3 \int_{Q_\xi} e^{-rt} |U| \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right| dx\,dt\,,$$

kde konstanta $K_3 > 0$ závisí jen na suprémech modulů funkcí B_i, C, $\partial A_{ij}/\partial x_k$. Poslední integrál na pravé straně lze odhadnout následovně

$$K_3 \int_{Q_\xi} |U|\, e^{-rt} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right| dx\,dt \leqq \frac{\mu}{2}\int_{Q_\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 e^{-rt}\,dx\,dt + \frac{nK_3^2}{2\mu}\int_{Q_\xi} e^{-rt}U^2\,dx\,dt\,,$$

neboť

$$K_3|U| \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right| = \left|\left(\frac{n}{\mu}\right)^{1/2} K_3 U\right| \sum_{i=1}^n \left|\left(\frac{\mu}{n}\right)^{1/2} \frac{\partial U}{\partial x_i}\right| \leqq \frac{nK_3^2}{2\mu} U^2 + \frac{\mu}{2n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2.$$

Zvolíme-li $r = 2nK_3^2/\mu + 4K_3$ dostáváme z (59)

$$\frac{\mu}{2}\int_{Q_\xi} e^{-rt}\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt + \frac{r}{4}\int_{Q_\xi} e^{-rt}U^2\,dx\,dt \leqq \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2\,dx + K_3\int_{Q_\xi} e^{-rt}\mathfrak{F}^2\,dx\,dt\,.$$

Přihlédneme-li k nerovnosti $e^{-r\xi} \leqq e^{-rt} \leqq 1$, dostáváme

$$\int_{Q_\xi}\left[U^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2\right] dx\,dt \leqq K_4 \left\{\int_{Q_\xi} \mathfrak{F}^2\,dx\,dt + \int_\Omega \varphi^2\,dx\right\},$$

kde K_4 závisí na týchž veličinách jako K_3 a na T, μ. Po dosazení do (57) dostáváme (53) a pomocná věta je dokázána.

Dokážeme nyní větu, na jejímž základě je již snadné řešit problém konvergence nevlastního integrálu (41).

Věta 1. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

1. *Koeficienty A_{ij}, B_i, C a funkce $\mathfrak{F}$ v rovnici (42) jsou ve vrstvě $\bar{H} = E_n \times \langle 0, T\rangle$ ohraničeny, spojité a splňují Hölderovu podmínku vzhledem k x a koeficienty A_{ij} též Hölderovu podmínku vzhledem k t. Při tom je splněna podmínka (45) v $\bar{H}$.*

2. *V $\bar{H}$ existují spojité derivace tvaru*

$$\frac{\partial^{p+q} A_{ij}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n} \partial t^q}, \quad p + 2q \leqq 8, \quad q \leqq 3 \tag{60}$$

splňující v každé ohraničené, uzavřené oblasti $\bar{Q}^* \subset \bar{H}$ Hölderovu podmínku vzhledem k x a tutéž vlastnost mají funkce B_i, C a $\mathfrak{F}$. Derivace $\partial A_{ij}/\partial x_k$, $\partial A_{ij}/\partial t$ jsou v $\bar{H}$ ohraničené.

3. *Existuje nevlastní integrál*

$$\int_H \mathfrak{F}^2(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

4. *Funkce $\psi(x)$ a $\mathfrak{F}(x, 0)$ mají kompaktní nosič[5]) v E_n.*

5. *$\psi(x) \in C^{10+\lambda}(E_n)$.*

Potom existuje v $\bar{H}$ jediná ohraničená a spojitá funkce $U(x, t)$, která splňuje v H rovnici (42) a vyhovuje počáteční podmínce (52). Při tom funkce $U(x, t)$ má v $\bar{H}$ spojité derivace tvaru

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_s}, \quad i, k, s = 1, 2, \ldots, n \tag{61}$$

a platí

$$\int_H \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t < \infty\,. \tag{62}$$

Důkaz. Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny všechny předpoklady lemmy 5. Existuje tedy v $\bar{H}$ jediná spojitá a ohraničená funkce splňující v H rovnici (42) a vyhovující počáteční podmínce (52). Jestliže se nám podaří zkonstruovat funkci $U(x, t)$ spojitou a ohraničenou v $\bar{H}$, splňující podmínku (52), splňující v H rovnici (42) a vyhovující vztahu (62), pak bude věta plně dokázána, neboť z téže lemmy 5 plyne, že $U(x, t)$ musí mít v $\bar{H}$ spojité derivace tvaru (61).

[5]) Znamená to, že existuje takové číslo N, že pro všechna $x \geqq N$ platí $\psi(x) \equiv \mathfrak{F}(x, 0) \equiv 0$.

Konstruujeme nyní funkci $U(x, t)$. Nechť $Q_m = \Omega_m \times (0, T)$, $m = 1, 2, \ldots$, je posloupnost válců, jejichž základna Ω_m je koule

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < ([N] + m)^2 .$$

Z lemmy 4 plyne, že v každém válci $\bar{Q}_m$ existuje funkce $U^m(x, t)$ spojitá v $\bar{Q}_m$ zároveň se všemi derivacemi vystupujícími v rovnici (42), která v Q_m splňuje tuto rovnici a vyhovuje podmínkám

$$U^m(x, 0) = \psi(x), \quad (x \in \Omega_m)$$

$$U^m(x, t)|_{S_n} = 0, \quad (S_m = F(\Omega_m) \times (0, T\rangle) .$$

Z téže lemmy dále plyne, že $\bar{Q}_m \setminus S_m$ existují spojité derivace tvaru

$$\frac{\partial^{p+q} U^m(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n} \partial t^q}, \quad p + 2q \leqq 6 . \tag{63}$$

Z lemmy 2 plyne, že

$$|U^m(x, t)| \leqq K_1 , \tag{64}$$

kde konstanta K_1 nezávisí na m. Nechť R, δ jsou libovolná kladná čísla, přičemž $\delta < T$. Ve válci

$$\bar{Q}_{R,\delta} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq (R + 2\delta)^2\} \times \langle 0, T\rangle$$

jsou definovány všechny funkce $U^m(x, t)$ pro dostatečně velká m (jmenovitě pro $m > \max([N], R + 2\delta)$). Na základě (64) vzhledem k existenci derivací (63) plyne z lemmy 3, že ve válci

$$\bar{Q}^*_{R,\delta} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq R^2\} \times \langle \delta, T\rangle$$

jsou stejnoměrně ohraničeny systémy funkcí

$$\frac{\partial^{p+q} U^m(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n} \partial t^q}, \quad p + 2q \leqq 4 .$$

Odtud na základě dobře známé Arzelovy věty (viz např. [5], str. 519) plyne, že pro dostatečně velká m jsou systémy funkcí

$$\{U^m\}, \quad \left\{\frac{\partial U^m}{\partial x_i}\right\}, \quad \left\{\frac{\partial^2 U^m}{\partial x_i \partial x_j}\right\}, \quad \left\{\frac{\partial U^m}{\partial t}\right\}$$

kompaktní ve smyslu stejnoměrné konvergence ve válci $\bar{Q}^*_{R,\delta}$. Z posloupnosti $\{U^m\}$

lze tedy vybrat podposloupnost (budeme ji značit opět U^m) konvergující v $\bar{Q}^*_{R,\delta}$ k nějaké funkci $U(x, t)$ takovou, že

$$(65) \qquad U^m \Rightarrow U\,, \quad \frac{\partial U^m}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_i}\,, \quad \frac{\partial^2 U^m}{\partial x_i\, \partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_j}\,, \quad \frac{\partial U^m}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t}\,.$$

Odtud a z (64) plyne, že funkce $U(x, t)$ je ohraničená konstantou K_1 a splňuje rovnici (42) v $\bar{Q}^*_{R,\delta}$. Z (65) plyne

$$(66) \qquad \int_{\bar{Q}^*_{R,\delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_{\bar{Q}^*_{R,\delta}} \left(\frac{\partial U^m}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,.$$

Z pomocné věty 2 plyne

$$\int_{\bar{Q}^*_{R,\delta}} \left(\frac{\partial U^m}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq K_2 \left\{\int_{Q_m} \mathfrak{F}^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{\Omega_m} \left[\psi^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right] \mathrm{d}x\right\},$$

kde konstanta K_2 nezávisí na m. Odtud vzhledem k (66) dostáváme

$$(67) \qquad \int_{\bar{Q}^*_{R,\delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqq K_2 \left\{\int_{H} \mathfrak{F}^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{E_n} \left[\psi^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right] \mathrm{d}x\right\}.$$

Jestliže necháme probíhat R k nekonečnu a δ k nule, pak „diagonálním procesem" lze z posloupnosti $\{U^m\}$ vybrat podposloupnost $\{U^{m_k}\}$ konvergující v každém bodě $(x, t) \in H$ k ohraničené funkci $U(x, t)$ splňující v H rovnici (42). Z nerovnosti (67) ihned plyne, že funkce $U(x, t)$ splňuje vztah (62). Zbývá nám tedy dokázat, že funkce $U(x, t)$ je spojitá při $t = 0$ a splňuje podmínku (52). Použijeme k tomu známou metodu „bariér" (viz např. [6]).

Zavedeme následující označení:

$$\alpha_{ij} = \sup_{(x,t)\in H} |A_{ij}(x, t)|\,, \quad \beta_i = \sup_{(x,t)\in H} |B_i(x, t)|\,,$$

$$\gamma_0 = \max\{\sup_{(x,t)\in H} |C(x, t)|, 1\}\,, \quad \gamma_1 = \sup_{(x,t)\in H} |\mathfrak{F}(x, t)|\,.$$

Nechť $A = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, 0)$ je libovolný bod. Ke každému $\varepsilon < 1/\gamma_0$ existuje takové kruhové okolí $\Omega_{\varepsilon,A} \subset E_n$ bodu A o poloměru $\delta_\varepsilon < 1$, že

$$(68) \qquad |\psi(x) - \psi(A)| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad x \in \Omega_{\varepsilon,A}\,.$$

Pro dostatečně velká m_k jsou všechny funkce $U^{m_k}(x, t)$ definovány ve válci $\bar{Q}_{\varepsilon,A} = \Omega_{\varepsilon,A} \times \langle 0, \varepsilon\rangle$. Definujme funkci

$$W_A(x, t) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 + K_3 t\,,$$

kde

$$K_3 = \frac{2\sum_{i=1}^{n}[\alpha_{ii} + \beta_i] + \gamma_0 + 1}{1 - \varepsilon\gamma_0}.$$

Je zřejmé, že pro všechna $(x, t) \in \bar{Q}_{\varepsilon,A}$ platí

$$W_A(x, t) \geqq 0\,. \tag{69}$$

V $\bar{Q}_{\varepsilon,A}$ platí dále nerovnost

$$\mathfrak{L}W_A \leqq -1\,, \tag{70}$$

neboť

$$\mathfrak{L}W_A = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 W_A}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial W_A}{\partial x_i} + CW_A - \frac{\partial W_A}{\partial t} =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + 2\sum_{i=1}^{n} B_i(x_i - x_i^0) + C\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 + CK_3t - K_3 \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{i=1}^{n}[\alpha_{ii} + \beta_i] + \gamma_0 + K_3(\gamma_0\varepsilon - 1) = -1\,.$$

Definujeme dále funkce:

$$p(x, t) = \quad U^{m_\kappa}(x, t) - \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2\, W_A(x, t)\,,$$
$$q(x, t) = -U^{m_\kappa}(x, t) + \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2\, W_A(x, t)\,,$$

kde

$$\gamma_2 = \max\left\{\frac{2K_1}{\delta_\varepsilon^2},\ \gamma_1 + \gamma_0(\psi(A) + 1)\right\}, \quad (K_1 \text{ je konstanta ze vztahu (64))}\,.$$

Dokážeme, že platí

$$p(x, t) \geqq 0\,, \quad q(x, t) \geqq 0 \quad \text{pro} \quad (x, t) \in \Gamma_{\varepsilon,A} \tag{71}$$
$$(\Gamma_{\varepsilon,A} = \Omega_{\varepsilon,A} \cup (F(\Omega_{\varepsilon,A}) \times \langle 0, \varepsilon\rangle)\,,$$

$$\mathfrak{L}p \leqq 0\,, \quad \mathfrak{L}q \leqq 0 \quad \text{pro} \quad (x, t) \in \bar{Q}_{\varepsilon,A} \setminus \Gamma_{\varepsilon,A}\,. \tag{72}$$

Skutečně

$$p(x, 0) = \quad \psi(x) - \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2\, W_A(x, 0)\,,$$
$$q(x, 0) = -\psi(x) + \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2\, W_A(x, 0)\,.$$

Odtud a na základě (68) plyne (71) pro $x \in \Omega_{\varepsilon,A}$.

Pro $(x, t) \in F(\Omega_m) \times \langle 0, \varepsilon \rangle$ platí

$$p(x, t) = U^{m_k}(x, t) - \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2(\delta_\varepsilon^2 + K_3 t) \geqq -2K_1 + \gamma_2 \delta_\varepsilon^2 \geqq 0 .$$

Analogický vztah platí pro funkci $q(x, t)$. Nerovnosti (71) jsou tedy dokázány. Dokazujeme (72). Platí

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}p &= \mathfrak{L}U^{m_k} - \mathfrak{L}\,\psi(A) + \mathfrak{L}\varepsilon + \gamma_2 \mathfrak{L} W_A \\ &= \mathfrak{F}(x, t) - C(x, t)\,\psi(A) + C(x, t)\,\varepsilon + \gamma_2 \mathfrak{L} W_A . \end{aligned}$$

Na základě (70) tedy platí

$$\mathfrak{L}p \leqq \gamma_1 + \gamma_0\, \psi(A) + \gamma_0 - \gamma_2 \leqq 0 .$$

Analogický vztah platí pro $\mathfrak{L}q$. Nerovnosti (72) jsou tedy rovněž dokázány. Z nerovností (71), (72) na základě známého principu maxima (viz např. [4], str. 8) plyne

$$p(x, t) \geqq 0 , \quad q(x, t) \geqq 0 \quad \text{pro} \quad (x, t) \in \bar{Q}_{\varepsilon,A} .$$

Odtud máme pro všechna $(x, t) \in \bar{Q}_{\varepsilon,A}$

$$\psi(A) - \varepsilon - \gamma_2\, W_A(x, t) \leqq U^{m_k}(x, t) \leqq \psi(A) + \varepsilon + \gamma_2\, W_A(x, t) .$$

Tedy pro $(x, t) \in Q_{\varepsilon,A}$ platí

$$\psi(A) - \varepsilon \leqq \liminf_{(x,t)\to A} U(x, t) \leqq \limsup_{(x,t)\to A} U(x, t) \leqq \psi(A) + \varepsilon .$$

Poněvadž ε může být libovolně malé, dostáváme odtud

$$\lim_{(x,t)\to A} U(x, t) = \psi(A)$$

a důkaz věty 1 je tedy úplný.

IV. Nyní již můžeme odvodit vztah mezi řešením $u(x, t)$ počátečního problému (1), (5) a řešením $U(x, t)$ počátečního problému (6), (7).

Věta 2. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

1. *Funkce $u(x, t)$ je řešením počátečního Cauchyova problému* (1), (5) *ve vrstvě $H = E_n \times (0, T\rangle$ a platí* (3) *a* (4).

2. *Funkce $a_{ij}(x)$ jsou třídy C^{12} v E_n, jsou ohraničeny zároveň s prvními derivacemi a zároveň s prvními derivacemi splňují Hölderovu podmínku v E_n.*

3. *Funkce $a(x)$ je třídy C^{11} v E_n, je ohraničená a splňuje Hölderovu podmínku v E_n.*

4. *Funkce $\beta(t)$ je třídy C^4 v intervalu $\langle 0, T\rangle$.*

5. *Funkce $F(x, t)$, $\partial F/\partial t$ jsou v $\bar{H}$ ohraničené, spojité a splňují Hölderovu podmínku vzhledem k x. V $\bar{H}$ existují spojité derivace tvaru*

$$\frac{\partial^{p+q+1} F(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n} \partial t^{q+1}}, \quad p + 2q \leqq 8, \quad q \leqq 3$$

a tyto splňují v každé ohraničené oblasti $\bar{Q}^* \subset \bar{H}$ Hölderovu podmínku vzhledem k x. Funkce $F(x, 0)$, $\partial F/\partial t|_{t=0}$ mají kompaktní nosič a funkce $F(x, 0) \in C^{10+\lambda}(E_n)$. Konverguje integrál

$$\int_H \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \, .$$

6. *Funkce $f(x) \in C^{12+\lambda}(E_n)$ a má kompaktní nosič.*

7. *Funkce $g(x) \in C^4(E_n)$ a má kompaktní nosič*[6]*.*

Potom existuje jediné řešení $U(x, t)$ počátečního problému (6), (7), které je ohraničené a třídy C^2 v $\bar{H}$ a platí

$$\|u(x, t) - U(x, t)\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon) \, , \tag{73}$$

$$\left\| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \beta(t) \, k(x) \, e^{-v(t)/\varepsilon} \right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon) \, , \tag{74}$$

$$\left\| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon) \, , \quad i = 1, 2, \dots, n \, , \tag{75}$$

kde funkce $k(x)$ je definována vztahem (11) a funkce $v(t)$ vztahem (12).

Důkaz. Řešení počátečního problému (1), (5) hledáme ve tvaru (9), kde funkce $v(t)$ je definována vztahem (12) a $k(x)$ vztahem (11).

Podle věty 1 existuje jediná funkce $U(x, t)$ splňující v H rovnici (6) a podmínku (7), která je spojitá a ohraničená v $\bar{H}$ a tato funkce má v $\bar{H}$ spojité derivace tvaru (61).

Z téže věty plyne, že v $\bar{H}$ existuje jediná spojitá a ohraničená funkce $V(x, t)$ splňující v H rovnici

$$\beta(t) \frac{\partial V}{\partial t} - LV + \beta'(t) \, V = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \, , \tag{76}$$

počáteční podmínku

$$V(x, 0) = \frac{Lf + F(x, 0)}{\beta(0)} \, , \tag{77}$$

[6]) Stačí předpokládat, že existují integrály

$$\int_{E_n} g^2 \, \mathrm{d}x \, , \quad \int_{E_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \, , \quad \int_{E_n} (Lg)^2 \, \mathrm{d}x \, .$$

mající v $\bar{H}$ spojité derivace tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \, \partial x_s}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \tag{78}$$

a platí

$$\int_H \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t < \infty \,. \tag{79}$$

Dokážeme, že hledaným řešením $U(x, t)$ počátečního problému (6), (7) je funkce

$$U(x, t) = \int_0^t V(x, \tau) \, \mathrm{d}\tau + f(x) \,. \tag{80}$$

Platí totiž

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - LU = \beta(t) \, V - \int_0^t LV \mathrm{d}\tau - Lf = \beta(t) \, V - Lf -$$

$$- \int_0^t \left\{\beta(\tau) \frac{\partial V}{\partial t} + \beta'(\tau) \, V - \frac{\partial F}{\partial t}\right\} \mathrm{d}\tau = \beta(t) \, V - \beta V \Big|_0^t + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t} \mathrm{d}\tau - Lf =$$

$$= \beta(t) \, V - \beta(t) \, V + \beta(0) \, V(x, 0) + F(x, t) - F(x, 0) - Lf = F(x, t) \,.$$

Funkce $U(x, t)$ tedy splňuje v H rovnici (6). Z (80) ihned plyne, že funkce $U(x, t)$ je spojitá a ohraničená v $\bar{H}$ a že splňuje počáteční podmínku (7). Z (80), (78) a (79) plyne, že $U(x, t)$ je třídy C^2 v $\bar{H}$ a že platí

$$\int_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t < \infty \,. \tag{81}$$

Funkce $z(x, t, \varepsilon)$ v (9) je tedy při libovolném $\varepsilon > 0$ třídy C^1 v $\bar{H}$, třídy C^2 v H, splňuje v H rovnici (13) a vyhovuje podmínkám (10). Funkce $P(x, t, \varepsilon)$ definovaná vztahem (14) je spojitá v $\bar{H}$ a z (39) na základě (81) plyne, že

$$\int_H P^2(x, t, \varepsilon) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqq K \,,$$

kde konstanta K nezávisí na ε. Z pomocné věty 1 plynou tedy vztahy:

$$\|z(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(H)} = O(1) \,, \tag{82}$$

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|_{L_2(H)} = O(1) \,, \tag{83}$$

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\|_{L_2(H)} = O(1) \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{84}$$

Odtud a z (9) plynou vztahy (73), (74), (75) a věta je plně dokázána.

[1] *M. Zlámal:* Sur l'équation des télégraphistes avec un petit paramètre. Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, Ser. VIII, vol. *XXVII*, 1959.
[2] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник:* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных диф. уравнений с малым параметром. Успехи мат. наук, т. *XII*, 1957, 1—122.
[3] *M. Kryżański:* Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, część I, Warszawa 1957, Biblioteka matematyczna, tom 15.
[4] *А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник:* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи мат. наук, т. *XVII*, вып. 3, (105), 1962.
[5] *И. Н. Натансон:* Теория функций вещественной переменной, Москва 1957.
[6] *И. Г. Петровский:* Лекции об уравнениях с частными производными. Москва 1961.

Adresa autora: Obránců míru 21, Brno (Laboratoř počítacích strojů Vysokého učení technického).

Резюме

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

ЙОСЕФ НЕДОМА (Josef Nedoma), Brno

1. В этой работе рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = F(x, t) \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, u\,, \tag{2}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точка пространства E_n, коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a(x)$ определены в E_n, функция $F(x, t)$ определена в слое $\overline{H} = E_n \times \langle 0, T \rangle$ и ε малый положительный параметр. Предполагается, что

$$\beta(t) > 0 \tag{3}$$

для $t \in \langle 0, T \rangle$ и

$$a(x) \geqq 0\,, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \quad \alpha = \text{конст.} > 0 \tag{4}$$

в E_n. Начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \tag{5}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в E_n.

Целью настоящей работы является нахождение связи между решением вместе с его производными этой задачи и решением и производными решения аналогичной задачи для вырожденного уравнения, полученного из (1), если в нем положить $\varepsilon = 0$, т.е. для параболического уравнения

$$\beta(t)\frac{\partial U}{\partial t} - LU = F(x, t)\,. \tag{6}$$

Здесь можно предписать, конечно, лиш одно начальное условие

$$U(x, 0) = f(x) \tag{7}$$

Во всей работе имеются в виду бирегулярные решения проблем (1), (5) и (6), (7), т.е. решения принадлежащие классу C^1 в $\overline{H}$ и классу C^2 в H.

2. В [1] Зламал занимался этой проблемой в случае, когда эллиптический оператор Lu в уравнении (1) является оператором Лапласа. Решение $u(x, t)$ задачи (1), (5) ищется как и в [1] в виде

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon\, k(x)\,[1 - e^{-v(t)/\varepsilon}] + \varepsilon\, z(x, t, \varepsilon)\,, \tag{8}$$

где $U(x, t)$ решение задачи (6), (7) и функции $k(x)$, $v(t)$, $z(x, t, \varepsilon)$ подобраны так, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ выполнялись соотношения $z(x, 0, \varepsilon) = 0$, $\partial z/\partial t|_{t=0} = 0$ и

$$\varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial z}{\partial t} - Lz = O(1)\,. \tag{9}$$

Выполнение этого соотношения требуется для того, чтобы можно было ожидать, что функция z будет в норме $L_2(\overline{H})$ также $O(1)$. Простым подсчетом можно получить функции $v(t)$ и $k(x)$

$$v(t) = \int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

$$k(x) = \frac{\beta(0)\,g(x) - Lf - F(x, 0)}{\beta^2(0)} \tag{11}$$

и убедиться в том, что функция $z(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет в H уравнению

$$\varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial z}{\partial t} - Lz = P(x, t, \varepsilon)\,, \tag{12}$$

где

$$P(x, t, \varepsilon) = -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \beta'(t)\,k(x)\,e^{-v(t)/\varepsilon} + [1 - e^{-v(t)/\varepsilon}]\,Lk\,. \tag{13}$$

Для оценки функции z в случае оператора Лапалса применил Зламал знакомый метод интеграла Фурье. В нашем случае общего эллиптического оператора я применил метод энергетических неравенств. В вспомагательной теореме 1 я доказал, что при условии сходимости несобственного интеграла

$$\int_H P^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

имеют место следующие соотношения:

$$\int_H z^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \tag{15}$$

$$\int_H \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \tag{16}$$

$$\int_H \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{17}$$

где постоянная M не зависит от ε. Из (13) вытекает

$$\int_H P^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq 3 \int_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 3 \int_H [\beta'^2(t)\,k^2(x) + (Lk)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{18}$$

Следовательно, для сходимости несобственного интеграла (14) достаточна сходимость обоих интегралов на правой стороне неравенства (18). Сходимость второго из них можно на основе (11) обеспечить соответствующими предложениями об функциях $f(x)$, $g(x)$ и $F(x, t)$. Вопрос существования частной производной $\partial^2 U/\partial t^2$ и сходимости несобственного интеграла $\int_H (\partial^2 U/\partial t^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ решен на основании теоремы 1.

Из (18) видимо, что оценка интеграла (14) не зависит от ε. Из (15), (16), (17) следует

$$\|z(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(H)} = O(1)\,, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|_{L_2(H)} = O(1)\,, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\|_{L_2(H)} = O(1)\,. \tag{19}$$

Отсюда и из (8) при определенных предположениях сформулированных в теореме 2 можно уже легко получить результаты

$$\|u(x, t) - U(x, t)\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon)\,, \tag{20}$$

$$\left\|\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

$$\left\|\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \beta(t)\,k(x)\,e^{-\nu(t)/\varepsilon}\right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon) \tag{22}$$

где функция $k(x)$ определеяется соотношением (11) и функция $\nu(t)$ соотношением (10).

Summary

CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION WITH A SMALL PARAMETER

JOSEF NEDOMA, Brno

1. This paper deals with the initial Cauchy problem for the hyperbolic eqation

$$(1) \qquad \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = F(x, t)$$

where

$$(2) \qquad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, u\,,$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a point in the space E_n, $a_{ij}(x)$, $a(x)$ are defined in E_n, the right-hand side $F(x, t)$ is defined in the layer $\bar{H} = E_n \times \langle 0, T \rangle$ and ε is a small positive parameter. Suppose

$$(3) \qquad \beta(t) > 0$$

for $t \in \langle 0, T \rangle$ and

$$(4) \qquad a(x) \geqq 0\,, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x)\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \quad \alpha = \text{const.} > 0$$

in E_n. The initial conditions are of the form

$$(5) \qquad u(x, 0) = f(x)\,, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

where functions $f(x)$ and $g(x)$ are defined in E_n.

The purpose of this work is to find out how the solution of this problem and its derivatives are connected with those of the analogical problem for the reduced equation which we obtain from (1) by putting $\varepsilon = 0$, i.e. the parabolic equation

$$(6) \qquad \beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - LU = F(x, t)\,.$$

In this case it is of course possible to prescribe only one initial condition

$$(7) \qquad U(x, 0) = f(x)\,.$$

In the whole work I deal with biregular solutions of (1), (5) and (6), (7), i.e. with solutions which belong to class C' in $\bar{H}$ and to class C^2 in H.

2. In [1] Zlámal dealt with this problem in the case when elliptic operator Lu in (1) is Laplace operator. I seek the solution $u(x, t)$ of (1), (5) like Zlámal in the form

$$u(x, t) = U(x, t) + \varepsilon\, k(x)\,[1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}] + \varepsilon\, z(x, t, \varepsilon) \tag{8}$$

where $U(x, t)$ is the solution of (6), (7) and functions $k(x)$, $\nu(t)$, $z(x, t, \varepsilon)$ are chosen so as for each $\varepsilon > 0$ hold

$$z(x, 0, \varepsilon) = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

and

$$\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial z}{\partial t} - Lz = O(1)\,. \tag{9}$$

When (9) holds, we may suppose function z to be also $O(1)$ in norm $L_2(\bar{H})$. By an easy calculation we can obtain the functions $\nu(t)$ and $k(x)$:

$$\nu(t) = \int_0^t \beta(s)\, \mathrm{d}s \tag{10}$$

$$k(x) = \frac{\beta(0)\, g(x) - Lf - F(x, 0)}{\beta^2(0)} \tag{11}$$

and find out that the function $z(x, t, \varepsilon)$ satisfies in H the equation

$$\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial z}{\partial t} - Lz = P(x, t, \varepsilon) \tag{12}$$

where

$$P(x, t, \varepsilon) = -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \beta'(t)\, k(x)\, e^{-\nu(t)/\varepsilon} + [1 - e^{-\nu(t)/\varepsilon}]\, Lk\,. \tag{13}$$

To estimate the function z when Lu is Laplace operator, Zlámal used the well-known Fourier integral method. In our case of common elliptic operator I use the energy method. In auxiliary theorem 1 is proved that under the assumption of convergence of improper integral

$$\int_H P^2(x, t, \varepsilon)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\,, \tag{14}$$

there is

$$(15) \qquad \int_H Z^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

$$(16) \qquad \int_H \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

$$(17) \qquad \int_H \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq M \int_H P^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

where the constant M does not depend on ε. From (13), however, follows

$$(18) \quad \int_H P^2(x, t, \varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq 3 \int_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 3 \int_H [\beta'^2(t)\,k^2(x) + (Lk)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

It is therefore sufficient for the convergence of improper integral (14) that both right-hand integrals in inequality (18) converge. The convergence of the second of them may be ensured by proper assumptions on functions $f(x)$, $g(x)$ and $F(x, t)$. The question of both existence of partial derivative $\partial^2 U/\partial t^2$ and convergence of the improper integral $\int_H (\partial^2 U/\partial t^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ is solved on the basis of Theorem 1.

From (18) it is evident that the estimate of integral (14) does not depend on ε. From (15), (16) and (17) therefore follows

$$(19) \qquad \|z(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(H)} = O(1)\,, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|_{L_2(H)} = O(1)\,, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\|_{L_2(H)} = O(1)\,.$$

From here and (8), under certain assumptions formulated in Theorem 2, we can obtain easily the results

$$(20) \qquad \|u(x, t) - U(x, t)\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon)\,,$$

$$(21) \qquad \left\|\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(22) \qquad \left\|\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \beta(t)\,k(x)\,e^{-\nu(t)/\varepsilon}\right\|_{L_2(H)} = O(\varepsilon)$$

where functions $k(x)$, $\nu(t)$ are defined by (11), (10) respectively.