Jiří Štěpánek

Poissonsche, Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf Flächen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 42--50

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117596`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

POISSONSCHE, WELLEN- UND WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF FLÄCHEN

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Eingelangt am 10. Dezember 1965)

Dieser Artikel ist der erste der Serie von fünf Arbeiten, in denen ich versuchte die Fundamentalgleichungen der mathematischen Physik und einige Randwertaufgaben von der Ebene auf Flächen zu übertragen. Er soll einen einleitenden Charakter haben; es werden da die Poissonsche, Wellen- und Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe des Laplace Operators auf der Fläche (der in der Grundliteratur auch als der zweite Differentialoperator von Beltrami bekannt ist) verallgemeinert. Weiter werden die kanonischen Formen dieser Gleichungen in den sogenannten isothermischen Parametern gezeigt.

Der Gedanke der Übertragung führte auf einigen Stellen zu Tatsachen die in anderen Zusammenhängen schon bekannt sind. Nachdem ich da eine gänzliche und womöglich verständlichen Erklärung von diesem Thema, welche besonders an den, an Anwendungen interessierten, Leser gerichtet ist (in der Grundliteratur werden diese Fragen nicht behandelt), bestrebe, gebe ich nicht nur eine strenge Erklärung von Originalresultaten.

Die Problematik wurde mit Hilfe der Tensorrechnung bearbeitet, da ich dieses für die Leser, denen die Artikel besonders bestimmt sind, für vorteilhaft halte.

In allen Artikeln ersuchte ich die Analogie mit der Ebene und wollte die Grenze der Analogie feststellen. Auch die Verarbeitung des Stoffes wurde per analogiam durchgeführt. Die Beweise der Sätze, die man ainfach von denen für die Ebene mittels eine Übertragung erhält, wurden selbstverständlich ausgelassen, in den Fällen, wo die Übetragung nur teilweise möglich ist, werden die Beweise nur kurz mit einem Literaturhinweis gegeben.

1. DIE DREI FUNDAMENTALTYPE DER GLEICHUNGEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK AUF HYPERFLÄCHEN

Die Hyperfläche in einem Euklidischen Raum E_{n+1} sei parametrisch mit den Gleichungen

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^a) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1;\ a = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

definiert, wo x^α reelle Funktionen von n reellen Veränderlichen ξ^a sind und die zusammen mit ihren zweiten partiellen Ableitungen im Gebiet o stetig sind. Dabei setzen wir voraus, dass die Matrix

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1}, \dots, \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial \xi^1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^n}, \dots, \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial \xi^n} \end{bmatrix}$$

in jedem Punkte des Gebietes o den Rang n hat.

Der erste kovariante metrische Tensor der Hyperfläche (1) wird durch die Gleichungen

(2) $$g_{ab} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^b}$$

definiert (δ ist das Kroneckersche Delta)[1]). Der erste kontravariante Tensor wird also durch die Gleichungen $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$ bestimmt, so, dass für diesen $g^{ab} = (1/G)\, G^{ab}$ gilt, wo G^{ab} das Komplement des Elementes g_{ab} in der Determinante

$$G = \begin{vmatrix} g_{11}, \dots, g_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_{n1}, \dots, g_{nn} \end{vmatrix}$$

ist.

Die metrische Konexion der Hyperfläche (die Christoffelsche Symbole der zweiten Art) wird mittels der Gleichungen

(3) $$\begin{Bmatrix} c \\ a, b \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2} g^{cd} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \xi^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial \xi^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial \xi^d} \right)$$

definiert.

Mit Hilfe von (3) definieren wir die kovariante Ableitung des kovarianten Vektors A_a auf der Hyperfläche:

(4) $$\nabla_b A_a = \frac{\partial A_a}{\partial \xi^b} - \begin{Bmatrix} c \\ a, b \end{Bmatrix} A_c .$$

Unter einem Punkt der Hyperfläche verstehen wir einen Punkt $[\xi^a] \in o$, ein Gebiet auf der Hyperfläche ist ein Gebiet in o mit der Metrik, die (2) angibt. Eine Kurve auf

---

[1]) In (2) wird nach der Konvention von Einstein summiert durch die Indexe α, β. Diese Art der Summation wird auch im weiteren benützt.

der Hyperfläche wird parametrisch durch die Gleichungen $\xi^a = \xi^a(t)$ definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktionen ξ^a im Intervall J stetig sind, dass diese im Inneren des Intervalles stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben, wobei $\delta_{ab}(\mathrm{d}\xi^a/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}\xi^b/\mathrm{d}t) \neq 0$ gilt.

Definition 1. Poissonche-Gleichung auf der Hyperfläche (1) wird die Gleichung

$$g^{ab}\nabla_b \frac{\partial\omega}{\partial\xi^a} = f \tag{5}$$

genannt, wo $\omega = \omega(\xi^a)$, $f = f(\xi^a)$ ist, Wellengleichung auf der Hyperfläche (1) nennt man die Gleichung

$$g^{ab}\nabla_b \frac{\partial\omega}{\partial\xi^a} = \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} \tag{6}$$

wo $\omega = \omega(t, \xi^a)$ ist und Wärmeleitungsgleichung auf der Hyperfläche (1) wird die Gleichung

$$g^{ab}\nabla_b \frac{\partial\omega}{\partial\xi^a} = \frac{\partial\omega}{\partial t} \tag{7}$$

genannt, wobei $\omega = \omega(t, \xi^a)$ ist.

Der auf den linken Seiten der Gleichungen von der Definition 1 stehende Operator wird Laplace Operator der Funktion ω auf der Hyperfläche $\mathscr{S}$ genannt und wird mit $\Delta_{\mathscr{S}}\omega$ bezeichnet.[2]) Diese Benennung hat in dem ihren Grund, dass für die Hyperebene mit den parametrischen Gleichungen $x^\alpha = \xi^\alpha$, $x^{n+1} = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ $\Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv \delta^{ab}(\partial^2\omega/\partial\xi^a\,\partial\xi^b)$ ist.

Nach (3) und (4) kann man $\Delta_{\mathscr{S}}\omega$ in der Form

$$\Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv g^{ab}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^a\,\partial\xi^b} - \begin{Bmatrix} c \\ a, b \end{Bmatrix}\frac{\partial\omega}{\partial\xi^c}\right) = \tag{8}$$

$$= g^{11}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\,\partial\xi^1} + \ldots + g^{nn}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^n\,\partial\xi^n} + 2g^{12}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\,\partial\xi^2} + \ldots + 2g^{n-1,n}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^{n-1}\,\partial\xi^n} -$$

$$-\left(g^{11}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1, 1 \end{Bmatrix} + \ldots + g^{nn}\begin{Bmatrix} 1 \\ n, n \end{Bmatrix} + 2g^{12}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1, 2 \end{Bmatrix} + \ldots + 2g^{n-1,n}\begin{Bmatrix} 1 \\ n-1, n \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi_1} -$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -$$

$$-\left(g^{11}\begin{Bmatrix} n \\ 1, 1 \end{Bmatrix} + \ldots + g^{nn}\begin{Bmatrix} n \\ n, n \end{Bmatrix} + 2g^{12}\begin{Bmatrix} n \\ 1, 2 \end{Bmatrix} + \ldots + 2g^{n-1,n}\begin{Bmatrix} n \\ n-1, n \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi^n}$$

[2]) Vgl. [3], wo $\Delta_{\mathscr{S}}$ der zweite Differentialoperator von Beltrami genannt wird.

schreiben oder in den kovarianten Komponenten

$$\begin{aligned}\Delta_g\omega \equiv{}& \frac{G^{11}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\partial\xi^1} + \ldots + \frac{G^{nn}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^n\partial\xi^n} + 2\frac{G^{12}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \ldots +\\
&+ 2\frac{G^{n-1,n}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^{n-1}\partial\xi^n} - \left[\frac{G^{11}}{2G^2}\left(2G^{1d}\frac{\partial g_{1d}}{\partial\xi^1} - G^{1d}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^d}\right) + \ldots +\right.\\
&+ \frac{G^{nn}}{2G^2}\left(2G^{1d}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^n} - G^{1d}\frac{\partial g_{nn}}{\partial\xi^d}\right) + \frac{G^{12}}{G^2}\left(G^{1d}\frac{\partial g_{2d}}{\partial\xi^1} + G^{1d}\frac{\partial g_{1d}}{\partial\xi^2} - G^{1d}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^d}\right) + \ldots +\\
&\left.+ \frac{G^{n-1,n}}{G^2}\left(G^{1d}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^{n-1}} + G^{1d}\frac{\partial g_{n-1,d}}{\partial\xi^n} - G^{1d}\frac{\partial g_{n-1,n}}{\partial\xi^d}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\xi^1} -\\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\\
&- \left[\frac{G^{11}}{2G^2}\left(2G^{nd}\frac{\partial g_{1d}}{\partial\xi^1} - G^{nd}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^d}\right) + \ldots + \frac{G^{nn}}{2G^2}\left(2G^{nd}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^n} - G^{nd}\frac{\partial g_{nn}}{\partial\xi^d}\right) +\right.\\
&+ \frac{G^{12}}{G^2}\left(G^{nd}\frac{\partial g_{2d}}{\partial\xi^1} + G^{nd}\frac{\partial g_{1d}}{\partial\xi^2} - G^{nd}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^d}\right) + \ldots +\\
&\left.+ \frac{G^{n-1,n}}{G^2}\left(G^{nd}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^{n-1}} + G^{nd}\frac{\partial g_{n-1,d}}{\partial\xi^n} - G^{nd}\frac{\partial g_{n-1,n}}{\partial\xi^d}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\xi^n}\,.\end{aligned}$$

Speziell auf einer Fläche $\mathscr{S}$ im E_3 ist[3])

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv{}& \frac{g_{22}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\partial\xi^1} + \frac{g_{11}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2\partial\xi^2} - 2\frac{g_{12}}{G}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^1\partial\xi^2} -\\
&- \left[\frac{g_{22}}{2G^2}\left(g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^1} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^1} + g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^2}\right) +\right.\\
&\left.+ \frac{g_{11}}{2G^2}\left(-g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^2} + 2g_{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^2} - g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\right) - \frac{g_{11}}{G^2}\left(g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^2} - g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\xi^1} -\\
&- \left[\frac{g_{22}}{2G^2}\left(-g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^1} + 2g_{11}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^1} - g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^2}\right) +\right.\\
&\left.+ \frac{g_{11}}{2G^2}\left(g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^2} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi^2} + g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1}\right) - \frac{g_{12}}{G^2}\left(g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^1} - g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^2}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\xi^2}\end{aligned}$$

wo $G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ ist.

[3]) Vgl. [3].

Ist die Fläche $\mathscr{S}$ explizit mittels einer Gleichung $z = z(x, y)$ gegeben, dann ist

$$\Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv \frac{1+q^2}{1+p^2+q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{1+p^2}{1+p^2+q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - 2\frac{pq}{1+p^2+q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} -$$

$$- \left(\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^2}pr - 2\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^2}ps + \frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^2}pt\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} -$$

$$- \left(\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^2}qr - 2\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^2}qs + \frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^2}qt\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

wo $p = (\partial z/\partial x)$, $q = (\partial z/\partial y)$, $r = (\partial^2 z/\partial x^2)$, $s = (\partial^2 z/\partial x\,\partial y)$, $t = (\partial^2 z/\partial y^2)$.

2. KANONISCHE FORMEN DER GLEICHUNGEN

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn man auf der Hyperfläche $\mathscr{S}$ die Transformation $'\xi^a = '\xi^a(\xi^b)$ der Parameter einführt ($'\xi^a$ haben stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung im o), dann ist der Laplace Operator in Bezug auf diese invariant. Es entsteht die Frage, bei welchen Parametern der Operator $\Delta_{\mathscr{S}}\omega$ die einfachste Form

$$(1) \qquad \Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv g\delta^{ab}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^a\,\partial\xi^b}$$

hat, wo $g = g(\xi^a) \neq 0$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ist. Die Form (1) wird kanonisch genannt.

Durch eine Vergleichung der Gleichungen (1) und (8) vom § 1 bekommen wir

$$(2) \qquad g^{ab} = g\delta^{ab}, \quad \delta^{ab}\begin{Bmatrix} c \\ a, b \end{Bmatrix} = 0 \quad (c = 1, 2, \ldots, n).$$

Es muss also die Matrix des Tensors g^{ab} eine Skalarmatrix der Form gE sein (d.h. die Matrix des Tensors g_{ab} hat die Form $(1/g)\,E$).

Von der zweiten Gleichung in (2) bekommt man (wenn man die Christoffelsche Symbole mittels g_{ab} ausdrückt):

$$\frac{1}{2G}\left(2G^{1d}\frac{\partial g_{1d}}{\partial\xi^1} - G^{1d}\frac{\partial g_{11}}{\partial\xi^d}\right) + \frac{1}{2G}\left(2G^{1d}\frac{\partial g_{2d}}{\partial\xi^2} - G^{1d}\frac{\partial g_{22}}{\partial\xi^d}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2G}\left(2G^{1d}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^n} - G^{1d}\frac{\partial g_{nd}}{\partial\xi^d}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\xi^1} - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial\xi^1} - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial\xi^1} - \ldots - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial\xi^1} \equiv -\frac{1}{g}(n-2)\frac{\partial g}{\partial\xi^1} = 0\,.$$

Genau so bekommt man $-(1/g)(n-2)(\partial g/\partial \xi^k) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$. Die Gleichungen

$$(3) \qquad (n-2)\frac{\partial g}{\partial \xi^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind identisch erfüllt entweder für $n = 2$ oder für $\partial g/\partial \xi^k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Daher folgen sofort folgende Sätze:

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Laplace Operator auf einer Hyperfläche im $E_{n+1}(n > 2)$ die kanonische Form* (1) *hat, ist, dass der Tensor g_{ab} der Hyperfläche in den Parametern ξ^a die Skalarmatrix $(1/g)\,E$ hat, wo g eine positive Konstante ist.*

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Laplace Operator auf einer Fläche im E_3 die kanonische Form* (1) *hat, ist, dass der Tensor g_{ab} der Fläche in den Parametern ξ^a die Skalarmatrix $(1/g)\,E$ hat, wo $g = g(\xi^a)$ eine positive Funktion ist.*

Bemerkung 1. Sind die Gleichungen (3) im Falle $n > 2$ nur in einem bestimmten Punkte $[\xi_0^a]$ erfüllt, so bekommt man folgendes: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Laplace Operator auf einer Hyperfläche im $E_{n+1}(n > 2)$ im Punkte $[\xi_0^a]$ die kanonische Form hat, ist, dass der Tensor der Hyperfläche g_{ab} in den Parametern ξ^a die Skalarmatrix $(1/g)\,E$ hat, wo $g = g(\xi^a)$ eine positive Funktion und $[\xi_0^a]$ ihr Stationärpunkt ist.

Flächen, die den Bedingungen des Satzes 2 genügen, sind genau die Flächen, welche man konform auf die Ebene abbilden kann[4]).

Die Parametern, bei denen der Laplace Operator auf der Hyperfläche die kanonische Form (1) hat, werden isothermisch genannt[5]).

Kann man also die erste metrische Form der Hyperfläche $ds^2 = g_{ab}\, d\xi^a\, d\xi^b$ zu der Form $ds^2 = \delta_{ab}\,(1/'g)\, d'\xi^a\, d'\xi^b$ bringen, dann sind die Parameter $'\xi^a$ isothermisch.

Die Gleichungen (5), (6) und (7) vom § 1 haben auf der Fläche in den isothermischen Parametern u, v die Formen

$$g\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = f, \quad g\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}, \quad g\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial\omega}{\partial t}$$

die kanonisch genannt werden ($1/g(u, v)$, 0, $1/g(u, v)$ sind die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors der Fläche).

---

4) Siehe [3].

5) Vgl. mit den isometrischen Parametern in [3].

Beispiele[6]. 1) Auf der Kugeloberfläche mit den Gleichungen $x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $x^3 = r \cos \vartheta$ hat der Laplace Operator die Form

$$\Delta_{\mathscr{g}}\omega \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}$$

Schreibt man nun die metrische Form in der Gestallt

$$ds^2 = r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta^2 + d\varphi^2\right)$$

und legt man

$$u = \int \frac{1}{\sin \vartheta}\, d\vartheta = \log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad v = \varphi$$

dann hat die Form in den Parametern u, v die Gestallt

$$ds^2 = r^2 \sin^2 2\operatorname{arctg} e^u (du^2 + dv^2)$$

und die Parameter u, v sind also isothermisch. Der Laplace Operator auf der ganzen Kugeloberfläche ohne der Pole hat in den Parametern u, v die kanonische Form

$$\Delta_{\mathscr{g}}\omega \equiv r^2 \sin^2 2\operatorname{arctg} e^u \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right)$$

2) Auf einer Rotationsfläche mit den Gleichungen $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$, $x^3 = h(r)$ hat der Laplace Operator die Form

$$\Delta_{\mathscr{g}}\omega \equiv \frac{1}{1 + h'^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{h''}{2(1 + h')^2} - \frac{1}{(1 + h')\, r}\right)\frac{\partial\omega}{\partial r}$$

Schreibt man die Form auf die folgende Weise

$$ds^2 = r^2 \left(\frac{1 + h'^2}{r^2}\, dr^2 + d\varphi^2\right)$$

und legt man

$$u = \int \frac{\sqrt{(1 + h'^2)}}{r}\, dr, \quad v = \varphi$$

dann hat die Form in den Parametern u, v die Gestallt

$$ds^2 = r^2(u)\,(du^2 + dv^2)$$

und die Parameter u, v sind isothermisch. Der Laplace Operator auf der ganzen

---

[6]) Vgl. [3].

Rotationsfläche ohne des Punktes auf der x^3 Achse hat in den Parametern u, v die kanonische Form

$$\Delta_{\mathscr{S}}\omega \equiv r^2(u)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right).$$

Auf einer allgemeinen Fläche im E_3 kann man den Laplace Operator zu der kanonischen Form mindestens in der Umgebung eines Punktes überführen. Der Beweis dieser Behauptung beruht auf der Tatsache, dass man die Gleichungen der Minimalkurven der Fläche im E_3 immer in der Form

$$f(\xi^1 + i\xi^2) = \text{konst.}\,, \quad \bar{f}(\xi^1 + i\xi^2) = \text{konst.} \tag{4}$$

schreiben kann, wo f eine bestimmte reguläre Funktion der komplexen Variablen $\xi^1 + i\xi^2$ ist. Daher folgt, dass die Parameter, die durch die Gleichungen

$$u = \operatorname{Re} f\,, \quad v = \operatorname{Im} f \tag{5}$$

bestimmt sind, in der Umgebung des Punktes $[\xi_0^a]$, in dem die Funktion f eine von Null verschiedene Ableitung hat, isothermisch sind[7]).

Bemerkung 2. Der Beweis, dass in den mit den Gleichungen (5) bestimmten Parametern u, v der Laplace Operator auf der Fläche in der Umgebung des Punktes die Form (1) hat, kann man durch eine direkte Berechnung durchführen. Von der Gleichung (4) folgt

$$g_{11}\,\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^1 + 2g_{12}\,\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2 + g_{22}\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^2 = \frac{1}{\mu\bar{\mu}}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}\bar{f}$$

wo μ, $\bar{\mu}$ gewisse Integrationsfaktoren sind[8]). Bezeichnet man $f = u + iv$, dann hat die metrische Form die Gestallt $\varrho^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$. Nachdem die Funktion f regulär ist, gelten für diese die Cauchy-Riemannsche Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial\xi^1} = \frac{\partial v}{\partial\xi^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial\xi^1} = -\frac{\partial u}{\partial\xi^2}$$

und für den Jacobian der Transformation (5) bekommt man also

$$J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial\xi^1}, & \dfrac{\partial v}{\partial\xi^1} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\xi^2}, & \dfrac{\partial v}{\partial\xi^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\xi^1}\right)^2.$$

In dem Punkte $[\xi_0^a]$ ist dann $J \neq 0$.

---

[7]) Siehe [3].

[8]) Vgl. [3].

Literaturverzeichnis[9])

[1] *И. Г. Петровский:* Лекции об уравнениях с частными производными, Москва 1953.

[2] *Н. С. Кошляков, Э. В. Гринер, М. М. Смирнов:* Основные дифференциальные уравнения математической физики, Москва 1962.

[3] *V. Hlavatý:* Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937.

[4] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов:* Приближенные методы высшего анализа, Москва, Ленинград 1962.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

ROVNICE POISSONOVA, VLNOVÁ A VEDENÍ TEPLA NA PLOCHÁCH

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

V článku, který jest úvodem k dalším čtyřem pracím, jsou pomocí Laplaceova operátoru na ploše (zvaného též Beltramiho druhý diferenciální operátor) $\Delta_{\mathscr{G}}\omega \equiv g^{ab}\nabla_b(\partial\omega/\partial\xi^a)$ (g^{ab} metrický tensor nadplochy, ∇_b kovariantní derivace) přeneseny z roviny na nadplochu základní rovnice matematické fyziky:

$$\Delta_{\mathscr{G}}\omega = f\,, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \Delta_{\mathscr{G}}\omega\,, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} = \Delta_{\mathscr{G}}\omega$$

Dále jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro převod rovnic na kanonické tvary, v nichž $\Delta_{\mathscr{G}}\omega \equiv g\delta^{ab}(\partial^2\omega/\partial\xi^a\,\partial\xi^b)$ (δ je Kroneckerovo delta.). V E_3 je touto podmínkou konformnost plochy s rovinou.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА, ВОЛНОВОЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА НА ПОВЕРХНОСТЯХ

ЙИРЖИ ШТЕПАНЕК (Jiří Štěpánek), Прага

В статье, которая служит введением к четырем следующим за ней работам, перенесены при помощи оператора Лапласа на поверхности (называемого также вторым дифференциальным оператором Бельтрами) $\Delta_{\mathscr{G}}\omega \equiv g^{ab}\nabla_b(\partial\omega/\partial\xi^a)$ (g^{ab} — метрический тензор гиперповерхности, ∇_b — ковариантная производная) из плоскости на гиперповерхность основные уравнения математической физики:

$$\Delta_{\mathscr{G}}\omega = f\,, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \Delta_{\mathscr{G}}\omega\,, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} = \Delta_{\mathscr{G}}\omega\,.$$

Далее приведены необходимые и достаточные условия для преобразования уравнений к каноническому виду, где $\Delta_{\mathscr{G}}\omega \equiv g\delta^{ab}(\partial^2\omega/\partial\xi^a\,\partial\xi^b)$ (δ-делта Кронекера). В E_3 является таким условием конформность поверхности с плоскостью.

[9]) Zu allen fünf Arbeiten.