Časopis pro pěstování matematiky

Zdenka Groschaftová; Ivo Marek
Königova věta a důkaz konvergence Kelloggova iteračního procesu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 29--41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117595`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

KÖNIGOVA VĚTA A DŮKAZ KONVERGENCE KELLOGGOVA ITERAČNÍHO PROCESU

ZDENKA GROSCHAFTOVÁ, IVO MAREK, Praha

(Došlo dne 6. prosince 1965)

1. ÚVOD

Cílem této práce je podati elementární důkaz konvergence Kelloggovy iterační metody k stanovení dominantní isolované vlastní hodnoty lineárního ohraničeného operátoru v Banachově prostoru (odst. 5). Konvergence uvedené metody byla dokázána v [5] za použití operátorového počtu v algebře ohraničených lineárních zobrazení uvažovaného Banachova prostoru $\mathscr{X}$ do sebe ([8] str. 287). V této práci podáváme důkaz, v němž se opíráme pouze o elementární vlastnosti resolventního operátoru a využíváme jen té skutečnosti, že v okolí isolovaného bodu spektra vyšetřovaného operátoru lze resolventu rozvinouti do Laurentovy řady (odst. 3). Samotné tvrzení týkající se konvergence Kelloggova iteračního procesu je důsledkem zobecněné Königovy věty ([3], viz též [2] str. 39) (odst. 3). Výsledky obdržené pro lineární ohraničené operátory jsou posléze rozšířeny na některé operátory neohraničené (odst. 7). Zvláštní pozornost je věnována operátorům v Hilbertových prostorech a jmenovitě pak symetrickým operátorům (odst. 6). O možnostech dalšího zobecnění pojednává závěrečná poznámka (odst. 8).

2. OZNAČENÍ A DEFINICE

Buď $\mathscr{X}$ nějaký komplexní Banachův prostor. Symbol $\mathscr{X}'$ nechť označuje prostor spojitých lineárních forem na $\mathscr{X}$ a $[\mathscr{X}]$ nechť značí prostor spojitých lineárních zobrazení prostoru $\mathscr{X}$ do sebe. S obvyklými normami

$$\|x'\| = \sup_{\|x\|=1} \langle x', x \rangle\,, \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\,,$$

kde $\langle x', x \rangle$ značí hodnotu formy $x' \in \mathscr{X}'$ v prvku $x \in \mathscr{X}$, $T \in [\mathscr{X}]$, jsou $\mathscr{X}'$ a $[\mathscr{X}]$ rovněž Banachovými prostory. Je-li lineární prostor $\mathscr{X}$ úplný vzhledem k normě $(x, x)^{1/2}$, kde (x, y) označuje hodnotu skalárního součinu prvků $x, y \in \mathscr{X}$, pak se $\mathscr{X}$

nazývá Hilbertovým prostorem. Je-li $T \in [\mathscr{X}]$, pak symbolem T' označujeme operátor adjungovaný k operátoru T. Podle definice jest $T'x' = y' \Leftrightarrow \langle y', x \rangle = \langle x', Tx \rangle$ pro $x \in \mathscr{X}$. Je-li $\mathscr{X}$ Hilbertovým prostorem, pak, jak známo, ke každé formě $x' \in \mathscr{X}'$ lze přiřaditi prvek $\hat{x} \in \mathscr{X}$ tak, že $\langle x', x \rangle = (x, \hat{x})$ pro všechny prvky $x \in \mathscr{X}$.

Poznamenejme, že vzhledem k tomu, že $\mathscr{X}$ je komplexní prostor, platí pro skalární součin vztah $(x, y) = \overline{(y, x)}$ pro libovolný pár $x, y \in \mathscr{X}$, takže je-li $\langle y'_1, x \rangle = (x, y)$ a $\langle y'_2, x \rangle = (y, x) = \overline{(x, y)}$, je obecně $y'_1 \neq y'_2$.

V Hilbertově prostoru se zpravidla definuje adjungovaný operátor T^* operátoru T pomocí relací

$$z = T^*y \Leftrightarrow (x, z) = (Tx, y)\,, \quad x \in \mathscr{X}\,.$$

Abychom se vyhnuli nedorozumění, nazýváme operátor T^* na rozdíl od T' operátorem hermiteovsky sdruženým s T.

Operátor $T \in [\mathscr{X}]$, kde $\mathscr{X}$ je Hilbertův prostor se nazývá symetrickým, jestliže $T^* = T$.

Buď T lineární, nikoliv nutně ohraničené zobrazení množiny $\mathscr{D} \subset \mathscr{X}$ do $\mathscr{X}$. Množinu $\mathscr{D}$ nazýváme definičním oborem operátoru T a značíme symbolem $\mathscr{D}(T)$. Je-li T lineární zobrazení $\mathscr{D}(T)$ do $\mathscr{X}$, pak $\mathscr{R}(T)$ označuje obor hodnot operátoru T, neboli $\mathscr{R}(T) = \{y \in \mathscr{X} \mid \text{existuje } x \in \mathscr{D}(T) \text{ tak, že } y = Tx\}$.

Operátor T nazýváme uzavřeným, jestliže ze vztahů $x_n \to x$, $x_n \in \mathscr{D}(T)$, $x \in \mathscr{X}$, $Tx_n \to y$ vyplývá, že $x \in \mathscr{D}(T)$ a $y = Tx$.

3. VĚTA KÖNIGOVA

V tomto odstavci se budeme zabývat řadami typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k\,, \tag{3.1}$$

kde $A_k \in [\mathscr{X}]$, λ – komplexní číslo.

Říkáme, že řada (3.1) je konvergentní (ve stejnoměrné topologii), jestliže existuje operátor $F(\lambda) \in [\mathscr{X}]$ takový, že

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \tag{3.2}$$

ve smyslu konvergence v $[\mathscr{X}]$.

Pro řady (3.1) platí obdobné věty jako pro mocninné řady s číselnými koeficienty. Rovněž tak pojem analytického pokračování je definován jako pro skalární funkce. Funkce $F = F(\lambda)$ se nazývá analytickou v oblasti Γ, jestliže Γ je částí oblasti analytického pokračování nějakého elementu tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\lambda - \nu)^k$.

Věta 3.1 *Ke každé řadě typu* (3.1) *lze přiřaditi číslo r nezávislé na λ takové, že $0 \leqq r \leqq +\infty$, které má tu vlastnost, že řada* (3.1) *konverguje pro všechna λ, pro něž $|\lambda| < r$ a diverguje pro všechna λ, pro něž $|\lambda| > r$. Toto číslo se nazývá poloměrem konvergence řady* (3.1).

Věta 3.2 *Operátor-funkce $F = F(\lambda)$ nechť je analytická v Γ, kde Γ obsahuje kruh $|\lambda| < r'$, $r' > r$, při čemž pro $|\lambda| < r$ nechť je F dána jakožto mocninná řada* (3.2) *a na kružnici $|\lambda| = r$ leží jediná isolovaná singularita μ_0. Potom lze F rozvinout v oblasti $0 < |\lambda - \mu_0| < \delta$, kde $\delta > 0$, v Laurentovu řadu*

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\lambda - \mu_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\lambda - \mu_0)^{-k}, \tag{3.3}$$

při čemž $H_k \in [\mathscr{X}]$, $B_k \in [\mathscr{X}]$ a pro λ, pro něž $0 < |\lambda - \mu_0| < \delta$, $|\lambda| < r'$ platí rovnost

$$F(\lambda) = G(\lambda). \tag{3.4}$$

Uvedené věty se pro případ koeficientů z $[\mathscr{X}]$ dokazují právě tak, jako v případě číselných koeficientů. Nebudeme proto důkazy provádět.

Definice. Buď r poloměr konvergence řady (3.2). Buď μ singularita funkce F definované pro $|\lambda| < r$ řadou (3.2). Pakliže ze vztahu $|\mu| = r$ plyne rovnost $\mu = \mu_0$, pak říkáme, že μ_0 je dominantní singularita funkce F. Každá singularita, jež není dominantní, se nazývá nedominantní singularitou.

Věta 3.3 (Königova). *Předpokládejme, že operátor-funkce F je analytická v oblasti Γ, kde Γ obsahuje kruh $|\lambda| < r'$, $r' > r$, při čemž pro $|\lambda| < r$ nechť F je dána pomocí řady* (3.2), *kde r je poloměr konvergence této řady. Předpokládejme dále, že na kružnici $|\lambda| = r$ leží jediná isolovaná singularita μ_0 funkce F. Buď* (3.3) *Laurentův rozvoj funkce F v okolí μ_0. Nechť existují prvky $x \in \mathscr{X}$, $x' \in \mathscr{X}'$ a index p tak, že platí*

$$\langle x', B_p x\rangle \neq 0, \quad \langle x', B_k x\rangle = 0 \quad \text{pro} \quad k > p. \tag{3.4}$$

Za těchto předpokladů platí rovnost

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\langle x', A_k x\rangle}{\langle x', A_{k+1} x\rangle} = \mu_0. \tag{3.5}$$

Důkaz. Podle předpokladů věty leží na kružnici $|\lambda| = r$ právě jedna singularita funkce F. Pro $|\lambda| < r$ platí tedy vyjádření

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x', A_k x\rangle \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda - \mu_0)^{-k}, \tag{3.6}$$

ve kterém b_k, d_k jsou číselné koeficienty, při čemž pro poloměr konvergence ϱ řady $\sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$ platí nerovnost $\varrho > r$, takže řada $\sum_{k=0}^{\infty} d_k \mu_0^k$ konverguje a tedy

$$\lim_{k \to \infty} d_k \mu_0^k = 0 . \tag{3.7}$$

Dále ukážeme, že

$$b_k = \langle x', B_k x \rangle \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Buďte $K = \{\lambda \mid |\lambda| < r\}$, $K' = \{\lambda \mid |\lambda| < r'\}$, $K_\delta = \{\lambda \mid 0 < |\lambda - \mu_0| < \delta\}$ a nechť $\Omega = K \cap K_\delta$, $\Omega' = K' \cap K_\delta$. Protože $r' > r$, existují $\tilde{d}_k$ takové, že v Ω' platí vyjádření

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k (\lambda - \mu_0)^k .$$

Z rovnosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^k \left[\langle x', H_k x \rangle - \tilde{d}_k\right] + \sum_{k=1}^{p} \langle x', B_k x \rangle (\lambda - \mu_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda - \mu_0)^{-k} \tag{3.9}$$

platné pro $\lambda \in \Omega$ a odtud, že levá strana v (3.9) má smysl i v Ω', plyne, že

$$F_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^{-k} \left[\langle x', H_k x \rangle - \tilde{d}_k\right] + \sum_{k=1}^{p} \langle x', B_k x \rangle (\lambda - \mu_0)^{-k}$$

je Laurentovým rozvojem jakési funkce v okolí V jejího pólu μ_0, při čemž $V \supset \Omega'$. Funkce F_2, kde

$$F_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda - \mu_0)^{-k} ,$$

je však totožná s F_1 v Ω, μ_0 musí být tedy též pólem řádu p funkce F_2, tedy $b_k = 0$ pro $k > p$. Odtud je již zřejmé, že (3.9) platí i pro $\lambda \in \Omega'$. Víme-li již, že (3.9) platí v Ω', odvodíme rovnosti (3.8) obvyklým způsobem. Buď C kružnice se středem v μ_0 ležící v Ω'. Pak

$$\langle x', B_s' x \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_1(\lambda) (\lambda - \mu_0)^{s-1} \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_2(\lambda) (\lambda - \mu_0)^{s-1} \, d\lambda = b_s .$$

Podobně lze dokázati rovnost $\tilde{d}_k = \langle x', H_k x \rangle$ pro $k = 0, 1, \ldots$

Pro $|\lambda| < r$ platí zřejmě vyjádření

$$(\lambda - \mu_0)^{-1} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^k = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-1} ,$$

$$(\lambda - \mu_0)^{-s} = -\frac{1}{\mu_0^s} \cdot \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k=s}^{\infty} (k-1) \ldots (k-s+1) \left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-s}$$

pro $s > 1$, takže

$$\sum_{s=1}^{p} b_s(\lambda - \mu_0)^{-s} = -\frac{b_1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-1} - \sum_{s=2}^{p} b_s \frac{\mu_0^{-s}}{(s-1)!}\sum_{k=s}^{\infty}(k-1)\dots(k-s+1)\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-s}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=0}^{\infty}\langle x', A_k x\rangle \lambda^k = -\frac{b_1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-1} -$$

$$-\sum_{s=2}^{p} b_s \frac{\mu_0^{-s}}{(s-1)!}\sum_{k=s}^{\infty}(k-1)\dots(k-s+1)\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)^{k-s} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k,$$

tedy

$$\mu_0^k\langle x', A_k x\rangle = -\frac{b_1}{\mu_0} - \sum_{s=2}^{p} b_s \frac{\mu_0^{-s}}{(s-1)!}(k+s-1)\dots(k+1) + d_k\mu_0^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Dále pak zřejmě pro $s \geqq 1$ je $(k+s)\dots(k+1) = k^s + O(k^{s-1})$, takže

$$k^{-p+1}\mu_0^k\langle x', A_k x\rangle = -b_p\frac{\mu_0^{-p}}{(p-1)!} + \frac{\mu_0^k}{k^{p-1}}d_k + Z_{k,p},$$

při čemž

$$|Z_{k,p}| \leqq o(1) \quad \text{pro} \quad p \geqq 1\,. \tag{3.10}$$

Obdržíme tak vyjádření

$$\frac{\langle x', A_k x\rangle}{\langle x', A_{k+1}x\rangle} = \mu_0 \frac{b_p\dfrac{\mu_0^{-p}}{(p-1)!} - \dfrac{\mu_0^k}{k^{p-1}}d_k + Z_{k,p}}{b_p\dfrac{\mu_0^{-p}}{(p-1)!} - \dfrac{\mu_0^{k+1}}{(k+1)^{p-1}}d_{k+1} - Z_{k+1,p}}$$

a z něho pak vzhledem k (3.7) a (3.10) dokazovaný výsledek (3.5).

Poznámka. Rychlost konvergence posloupnosti $\{\alpha_k\}$, kde

$$\alpha_k = \frac{\langle x', A_k x\rangle}{\langle x', A_{k+1}x\rangle},$$

k isolované singularitě μ_0 lze vyšetřovati týmiž prostředky jako v případě klasické věty Königovy. Touto otázkou se zabývat nebudeme odkazujíce čtenáře na práci [6] (viz též [4]).

4. PŘÍPAD NEDOMINANTNÍ SINGULARITY

Metodou, jíž byla dokázána věta Königova, je snadné ukázati, že předpoklad o dominantnosti singularity μ_0 lze nahraditi slabšími předpoklady. Na příklad lze předpokládat, že na kružnici $|\lambda| = r$, kde r je poloměrem konvergence řady (3.2), leží konečný počet isolovaných singularit $\mu_0 \ldots, \mu_s$, $s \geqq 1$. V tom případě výchozí vektory $x \in \mathscr{X}$, $x' \in \mathscr{X}'$ jsou takové, že vztahy

$$\langle x', B_{p(j),j}x \rangle \neq 0\,, \quad \langle x', B_{k,j}x \rangle = 0$$

platí pro $k > p(j)$, $j = 0, \ldots, s$ a $p(0) > p(j)$ pro $j = 1, \ldots, s$, při čemž operátory $B_{l,j}$ jsou prvky Laurentova rozvoje funkce F, definované v $|\lambda| < r$ řadou (3.2), v okolí singularity μ_j, $j = 0, 1, \ldots, s$. Při splnění těchto předpokladů platí (3.5). Zřejmě však je konvergence takového procesu pomalá a pro praktické účely nedostačující. Je-li pro některé l, $0 \leqq l \leqq s$, $p(0) = p(l) > p(j)$, $j \neq l$, pak k tomu, aby platily vztahy (3.5) stačí, aby $\langle x', B_{1,l}x \rangle = 0$.

Idea postupu spočívá ve známém faktu, že poloměr konvergence řady $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, kde a_k jsou komplexní čísla, se při záměně proměnné $\lambda = \varphi(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu^k$ nezmenší, může se však zvětšit. Uvedeného postupu užila ve své práci [4] N. Kublanovskaja za účelem rozšíření oboru použitelnosti postupných aproximací jednak k řešení nehomogenních soustav lineárních algebraických rovnic, rovnic s integrálními a diferenciálními operátory, jednak k sestrojování vlastních hodnot zmíněných operátorů. Postup V. N. Kublanovské je použitelný i v případě abstraktních prostorů a jejich zobrazení.

V následujících odstavcích se proto omezíme pouze na případ dominantní isolované singularity.

5. KELLOGGŮV ITERAČNÍ PROCES

Zobecněné Königovy věty použijeme v následujícím k důkazu konvergence Kelloggovy iterační posloupnosti k dominantní vlastní hodnotě ohraničeného lineárního zobrazení T Banachova prostoru $\mathscr{X}$ do sebe.

Je-li λ_0 dominantní isolovaná singularita resolventy $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, pak nechť

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\lambda - \lambda_0)^{-k} \tag{5.1}$$

je Laurentův rozvoj resolventy v okolí bodu λ_0. Podle věty 3.2 $E_k \in [\mathscr{X}]$, $F_k \in [\mathscr{X}]$ při čemž $F_{k+1} = (T - \lambda_0 I) F_k = (T - \lambda_0 I)^k F_1$.

Věta 5.1 *Nechť $T \in [\mathscr{X}]$ má dominantní isolovanou vlastní hodnotu λ_0. Nechť $x' \in \mathscr{X}'$, $x \in \mathscr{X}$ jsou takové prvky a p takový index, že platí*

$$\langle x', F_p x\rangle \neq 0\,, \quad \langle x', F_k x\rangle = 0 \quad \text{pro} \quad k > p\,. \tag{5.2}$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x', x^{(k+1)}\rangle}{\langle x', x^{(k)}\rangle} = \lambda_0\,, \tag{5.3}$$

kde

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}\,, \quad x^{(0)} = x\,. \tag{5.4}$$

Důkaz. Z dominantnosti λ_0 plyne, že na kružnici $|\lambda| = |\lambda_0^{-1}| = r$ leží jediná isolovaná singularita λ_0^{-1} operátor-funkce $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k T^k$. Snadno zjistíme, že

$$Q(\lambda) = \frac{1}{\lambda} R\left(\frac{1}{\lambda}, T\right).$$

Abychom mohli použít věty 3.3, stačí položit

$$A_0 = I\,, \quad A_k = T^k\,, \quad B_k = F_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Předpoklady věty 3.3 jsou splněny a tedy

$$\frac{\langle x', x^{(k)}\rangle}{\langle x', x^{(k+1)}\rangle} = \frac{\langle x', T^k x^{(0)}\rangle}{\langle x', T^{k+1} x^{(0)}\rangle} \to \frac{1}{\lambda_0} = \mu_0\,,$$

což je ekvivalentní s námi dokazovaným vztahem (5.3).

Důsledek. *Předpokládejme, že*

$$x' = \lim_{k\to\infty} y'_k = \lim_{k\to\infty} z'_k\,.$$

Pak za předpokladů věty 5.1 platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\langle z'_k, x^{(k+1)}\rangle}{\langle y'_k, x^{(k)}\rangle} = \lambda_0\,. \tag{5.5}$$

Důkaz. Napřed dokážeme, že při $k \to \infty$

$$\langle z'_k - x', \mu_0^k T^k x^{(0)}\rangle \to 0\,, \quad \langle y'_k - x', \mu_0^k T^k x^{(0)}\rangle \to 0\,. \tag{5.6}$$

Řada $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k T^k$ má podle předpokladu poloměr konvergence $R = |\mu_0|$.

Podle Cauchyovy věty tedy

$$\frac{1}{R} = |\lambda_0| = \limsup_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k},$$

neboli

$$1 = \limsup_{k\to\infty} \|\lambda_0^{-k}T^k\|^{1/k}.$$

Existuje tudíž konstanta c nezávislá na k tak, že

$$(5.7)\qquad \|\lambda_0^{-k}T^k\| \leqq c.$$

Platí tedy odhad

$$|\langle z_k' - x', \lambda_0^{-k}T^k x^{(0)}\rangle| \leqq \|z_k' - x'\| \, \|\lambda_0^{-k}T^k\| \, \|x^{(0)}\| \leqq c'\|z_k' - x'\|$$

a z něho pak vyplývá platnost prvního vztahu (5.6). Zbývající vztah obdržíme záměnou y_k' na místo z_k'.

Z (5.3) vyplývá bezprostředně, že

$$\frac{\langle x', \lambda_0^{-k-1}T^{k+1}x^{(0)}\rangle}{\langle x', \lambda_0^{-k}T^k x^{(0)}\rangle} \to 1.$$

Žádaný výsledek (5.5) obdržíme posléze z vyjádření

$$\frac{\langle z_k', x^{(k+1)}\rangle}{\langle y_k', x^{(k)}\rangle} = \lambda_0 \frac{\langle z_k' - x', \lambda_0^{-k-1}T^{k+1}x^{(0)}\rangle + \langle x', \lambda_0^{-k-1}T^{k+1}x^{(0)}\rangle}{\langle y_k' - x', \lambda_0^{-k}T^k x^{(0)}\rangle + \langle x', \lambda_0^{-k}T^k x^{(0)}\rangle}.$$

6. OPERÁTORY V HILBERTOVĚ PROSTORU A SCHWARZOVY KONSTANTY

Je-li $\mathscr{X}$ komplexní Hilbertův prostor se skalárním součinem (x, y), $x, y \in \mathscr{X}$ a $T \in [\mathscr{X}]$ operátor mající dominantní isolovanou vlastní hodnotu λ_0, pak k jejímu stanovení lze užíti Kelloggovy metody. Původně byla tato metoda zavedena v Hilbertově prostoru (viz [7] str. 260) a má právě v případě operátorů v Hilbertově prostoru velké uplatnění.

Vyšetřujeme nadále operátor $T \in [\mathscr{X}]$, o němž předpokládáme, že má isolované dominantní vlastní číslo λ_0. Dále předpokládáme, že

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\lambda - \lambda_0)^{-k}$$

je Laurentův rozvoj resolventy $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ v okolí bodu λ_0. Tedy $E_k \in [\mathscr{X}]$, $F_k \in [\mathscr{X}]$. Dále nechť existují prvky x, x^* a index p tak, že

$$(6.1)\qquad (F_p x, x^*) \neq 0, \quad (F_k x, x^*) = 0 \quad \text{pro} \quad k > p.$$

Vyšetřujme konstanty nazývané Schwarzovými konstantami

(6.2) $$b_{k,s} = \frac{(T^{k-s}x, T^{*k+s}x^*)}{(T^{k+1-s}x, T^{*k+s}x^*)}, \quad s \leqq 2k,$$

kde T^* je hermiteovsky sdružený operátor k operátoru T.

Snadno se lze přesvědčiti, že $b_{k,s}$ nezávisejí na s a že platí

(6.3) $$b_{k,s} = b_{k,0} = b_k = \frac{(T^{2k}x, x^*)}{(T^{2k+1}x, x^*)}.$$

Přímým důsledkem věty 5.1 je následující věta.

Věta 6.1 *Za předpokladů uvedených výše platí*

(6.4) $$\lim_{k\to\infty} b_k = \frac{1}{\lambda_0} = \mu_0 .$$

Je-li $T \in [\mathscr{X}]$ symetrický operátor, pak jak známo ([7] str. 284), buď $\|T\|$ či $-\|T\|$ nebo obě tato čísla patří do spektra $\sigma(T)$ operátoru T. V každém případě však $\|T^2\| = \|T\|^2 \in \sigma(T^2)$.

Věta 6.2 *Je-li T symetrický operátor takový, že T^2 vyhovuje předpokladům věty* 6.1, *pak*

(6.5) $$\lim_{k\to\infty} \frac{(T^{2k+2}x, x^*)}{(T^{2k}x, x^*)} = \|T\|^2 .$$

Speciálně pak

(6.6) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{(k+1)}\|^2}{\|x^{(k)}\|^2} = \|T\|^2 ,$$

kde

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)}, \quad x^{(0)} = x = x^* .$$

Důkaz. Rovnost (6.5) plyne přímo z věty 5.1, neboť její předpoklady jsou splněny pro operátor T^2. Formule (6.6) plyne pak z (6.5), neboť v daném případě

$$\frac{(T^{2k+2}x, x^*)}{(T^{2k}x, x^*)} = \frac{(T^{k+1}x, T^{k+1}x)}{(T^kx, T^kx)} = \frac{\|x^{(k+1)}\|^2}{\|x^{(k)}\|^2}.$$

Důsledek. *Za předpokladů věty* 6.1 *platí*

(6.7) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = \|T\| .$$

Speciálně v případě kompaktního operátoru T obdržíme větu Kelloggovu (viz [7] str. 260).

Věta 6.3 *Je-li $T \in [\mathscr{X}]$ kompaktní symetrický operátor, pak platí rovnost*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|T^{k+1}x\|}{\|T^k x\|} = \|T\|$$

pro každý vektor $x \in \mathscr{X}$, který není kolmý k nulovému podprostoru příslušnému alespoň jedné z hodnot $\|T\|$, $-\|T\|$.

7. NEOHRANIČENÉ OPERÁTORY

Ukážeme, že Kelloggovy metody lze používati též k stanovení charakteristických hodnot neohraničených operátorů.

Předpokládejme, že $\mathscr{D}(L)$, $\mathscr{D}(C)$ jsou lineály husté v Banachově prostoru $\mathscr{X}$. Zabývejme se úlohou určiti charakteristickou hodnotu μ_0 s minimálním modulem rovnice

$$Lx = \mu Cx \,. \tag{7.1}$$

Za předpokladu, že existuje inversní operátor $L^{-1} \in [\mathscr{X}]$ a že operátor $T = L^{-1}C$ je ohraničený a má isolovanou dominantní vlastní hodnotu λ_0, lze podle odstavce 5 toto λ_0 stanoviti jakožto limitu posloupnosti $\lambda_{(k)}$, kde

$$\lambda_{(k)} = \frac{\langle z'_k, x^{(k+1)} \rangle}{\langle y'_k, x^{(k)} \rangle}, \tag{7.2}$$

při čemž

$$Lx^{(k+1)} = Cx^{(k)}\,, \quad x^{(0)} = x\,. \tag{7.3}$$

Dále nechť

$$x' = \lim_{k \to \infty} y'_k = \lim_{k \to \infty} z'_k \tag{7.4}$$

a

$$\langle x', B_p x \rangle \neq 0\,, \quad \langle x', B_k x \rangle = 0 \quad \text{pro} \quad k > p\,, \tag{7.5}$$

kde B_k, $k = 1, 2, \ldots$ jsou členy hlavní části Laurentova rozvoje resolventy $R(\lambda, T)$, kde $T = L^{-1}C$, v okolí bodu λ_0.

Věta 7.1. *Je-li C ohraničený operátor a má-li operátor $T = L^{-1}C$ dominantní isolované vlastní číslo λ_0, pak pro iterační posloupnost $\{\lambda_{(k)}\}$ definovanou pomocí (7.2) a (7.3) platí rovnost*

$$\lim \lambda_{(k)} = \lambda_0\,,$$

při čemž $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$ je charakteristickou hodnotou rovnice $Lu = \lambda Cu$. Existuje tedy vektor $u_0 \neq o$ takový, že

$$Lu_0 = \mu_0 Cu_0 .$$

Není-li uzavřený operátor C spojitý, není ani operátor $L^{-1}C$ ohraničený. V tom případě vyšetřujeme operátor CL^{-1}, který je ohraničený jakmile $\mathscr{R}(L^{-1}) \subset \mathscr{D}(C)$. Nechť pro y'_k, z'_k platí (7.4) a pro x při některém p (7.5), kde B_k, $k = 1, 2, \ldots$, jsou prvky Laurentova rozvoje resolventy $R(\lambda, CL^{-1})$ v okolí dominantní isolované vlastní hodnoty λ_0.

Věta 7.2. *Nechť pro $T = CL^{-1}$ jsou splněny předpoklady uvedené výše. Potom existuje vektor $v_0 \in \mathscr{D}(L) \cap \mathscr{D}(C)$, $v_0 \neq o$, takový, že*

$$Lv_0 = \mu_0 Cv_0 , \quad \mu_0 = \lambda_0^{-1}$$

a platí

$$\mu_0 = \lim_{k \to \infty} \frac{\langle y'_k, v_{(k)} \rangle}{\langle z'_k, v_{(k+1)} \rangle} ,$$

kde $v_{(0)} = Cx^{(0)}$, $Lv^{(k+1)} = v_{(k)}$, $v_{(k+1)} = Cv^{(k+1)}$.

D ů k a z. Položme $T = CL^{-1}$. Již víme, že $T \in [\mathscr{X}]$ a předpokládáme, že λ_0 je jeho dominantní isolovanou vlastní hodnotou. Dále pak

$$v_{(k+1)} = Cv^{(k+1)} = CL^{-1}v_{(k)} ,$$

tedy

$$v_{(k+1)} = Tv_{(k)} , \quad v_{(0)} = Cx^{(0)} .$$

Tvrzení je pak důsledkem věty 5.1.

8. ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA

Königovu větu 3.3 lze dokázat i pro prostory obecnější než jakými jsou Banachovy prostory. K jejímu důkazu stačí totiž, abychom uměli v algebře všech lineárních operátorů zobrazujících vyšetřovaný prostor do sebe spojitých v dané topologii vhodně definovati ohraničený prvek. Pro lokálně konvexní lineární topologické prostory je taková vhodná definice zavedena v práci ALLANOVĚ [1]. V lokálně konvexních prostorech tedy platí ta tvrzení naší práce, jež plynou z Königovy věty bez použití speciálních vlastností Banachových prostorů. Mezi ně jmenovitě patří věty odstavce 3 a věta 5.1.

Literatura

[1] *G. R. Allan:* A spectral theory for locally convex algebras. Proc. London Math. Soc. (3), *15* (1965), 399–421.

[2] *J. Hadamard, Mandelbrojt:* La serie de Taylor et son prolongement analytique. Gauthier-Villars. Paris 1926.

[3] *J. König:* Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. Annalen *23* (1884), 447–449.

[4] *В. Н. Кублановская:* Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе. Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова *LIII* (1959), 145—185.

[5] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. *12* (1962), 536–554.

[6] *С. С. Мовшиц, А. В. Товбин:* По поводу теоремы Königa о приближенном решении уравнений. Учен. записки Киевского унив. сер. физ.-матем. *4* (1939), № 5, 135—145.

[7] *Ф. Рисс, Б. С. Надь* (F. Riesz, B. S. Nagy): Лекции по функциональному анализу. Физматгиз, Москва 1953.

[8] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis. J. Wiley publ. New York 1958.

Adresa autorů: Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta).

Резюме

ТЕОРЕМА КЕНИГА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА КЕЛЛОГА

З. ГРОШАФТОВА (Zdenka Groschaftová), И. МАРЕК (Ivo Marek), Прага

Целью настоящей работы является элементарное доказательство сходимости итерационного процесса Келлога для определения изолированного собственного значения линейного ограниченного оператора в пространстве Банаха. Приведенное доказательство основано на том факте, что соответствующий резольвентный оператор разлагается в окрестности рассматриваемой сингулярной точки в ряд Лорана, и на некоторых свойствах этого разложения. По существу нами доказана более общая теорема — обобщенная теорема Кенига (п. 3), следствием которой является сходимость процесса Келлога (п. 5). Результаты, полученные для ограниченных операторов обобщены обычным способом для уравнений с неограниченными операторами (п. 7). Особенное внимание уделено симметричным операторам в пространстве Гильберта (п. 6). Возможные направления дальнейших обобщений намечены в параграфе 8.

Zusammenfassung

KÖNIGSCHER SATZ UND KONVERGENZBEWEIS FÜR DAS KELLOGGSCHE ITERATIONSVERFAHREN

ZDENKA GROSCHAFTOVÁ, IVO MAREK, Praha

Das Ziel dieser Arbeit ist, einen elementaren Beweis der Konvergenz des Kelloggschen Iterationsverfahrens zur Bestimmung des isolierten Eigenwertes eines linearen beschränkten Operators im Banachraum zu geben. Dieser Beweis besteht auf der Tatsache, dass die zugehörige Resolvente in einer Umgebung der betrachteten Singularität in eine Laurentreihe entwickelt werden kann und auf einigen Eigenschaften dieser Entwicklung. Es wird eine Verallgemeinerung des Satzes von König bewiesen (Abs. 3), deren Folgerung die Konvergenz des Kelloggschen Verfahrens ist (Abs. 5). Ergebnisse, die für beschränkte Operatoren erhalten worden sind, werden auf die übliche Weise für den Fall der Gleichungen mit unbeschränkten Operatoren verallgemeinert (Abs. 7). Besonderes Interesse wird den symmetrischen Operatoren im Hilbertraum gewidmet (Abs. 6). Einige Möglichkeiten einer weiteren Verallgemeinerung sind im Absatz 8 angegeben.