Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník

Analogie du lemme de Wirtinger pour une hypercirconférence

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 105--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117589

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ANALOGIE DU LEMME DE WIRTINGER POUR UNE HYPERCIRCONFÉRENCE

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 30 décembre 1965)

Soit C une hypercirconférence unitaire dans l'espace euclidien à quatre dimensions et désignons par β l'arc et par b la longueur de C. Supposons que C se projette dans ses deux plans axiaux (voir [5], p. 8) suivant les circonférences λ_1-fois et λ_2-fois comptées. Posons

$$l_i = 2\pi\lambda_i : b \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1}$$

A l'aide de la relation de PARSEVAL pour le système fondamental trigonométrique, on a démontré dans [15] (voir le lemme dans l'introduction et n° 6) le théorème suivant (ici et au n° 2 constamment $(.)' = \mathrm{d}(.)/\mathrm{d}\beta$):

(*) *Soit $f(\beta)$ une fonction de la deuxième classe définie sur l' hypercirconférence C. Soit*

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 1 \tag{2}$$

et la valeur moyenne de la fonction $f(\beta)$ sur C soit nulle:

$$\int_C f(\beta)\,\mathrm{d}\beta = 0\,. \tag{3}$$

Alors, il y a inégalité

$$\int_C f''^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta - (l_1^2 + l_2^2)\int_C f'^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta + l_1^2 l_2^2 \int_C f^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta \geqq 0\,, \tag{4}$$

égalité n'a lieu que si

$$f(\beta) = a_1 \cos l_1\beta + b_1 \sin l_1\beta + a_2 \cos l_2\beta + b_2 \sin l_2\beta\,, \tag{5}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes arbitraires.

De ce théorème, dans lequel il suffit d'exiger $f''(\beta) \in L_2$, résulte le théorème analogue:

(**) *La relation* (2) *redevient valable. Lorsque* $f''(\beta) \in L_2$ *et, au lieu de* (3), *la fonction* $f(\beta)$ *remplit ces conditions*:

$$f(0) = f(\tfrac{1}{2}b) = 0\,, \tag{6}$$

on a

$$\int_0^{b/2} f''^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta - (l_1^2 + l_2^2)\int_0^{b/2} f'^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta + l_1^2 l_2^2 \int_0^{b/2} f^2(\beta)\,\mathrm{d}\beta \geqq 0\,, \tag{7}$$

le signe d'égalité ne peut avoir lieu que pour la fonction $f(\beta)$ *de* (5) *pour* $a_1 = a_2 = 0$.

Car si nous posons

$$f(-\beta) = -f(\beta)\,, \tag{8}$$

nous élargissons, à l'égard de (6), la région de définition de la fonction $f(\beta)$ sur toute l'hypercirconférence C de sorte qu'il résulte (3) et que le côté gauche dans (4) égale le double du côté gauche dans (7); puis, d'après (1) et (2), la fonction extrémale (5) remplit les conditions aux limites (6) seulement pour $a_1 = a_2 = 0$.

Assurément, on peut démontrer le théorème (**) aussi directement de même que (*). Car l'extension faite d'après (8) avec (6) facilite la dérivée terme à terme de la série de FOURIER de $f(\beta)$ qui contient seulement les termes de la forme $\sin(2\pi m\beta/b)$; $m = 1, 2, \ldots$

Dans cet article, nous démontrerons sans la rélation de Parseval, en vertu d'une certaine identité intégrale, un cas spécial du théorème (**):

(***) *Si toutes les suppositions de* (**) *sont valables et si encore*

$$f'(0) = f'(\tfrac{1}{2}b) = 0\,, \tag{9}$$

donc, lorsque la fonction $f(\beta)$ *n'est pas identiquement nulle, dans* (7) *a lieu toujours l'inégalité aiguë.*

Nous introduirons au *n*° 1 quelques indications litteraires — aussi d'un caractère historique — concernant le lemme de WIRTINGER, aux analogies duquel nous pouvons compter tous les trois théorèmes, et ensuite nous démontrerons au *n*° 2 par le procédé indiqué l'assertion (***) et nous la compléterons par de concises remarques du point de vue du calcul des variations et des généralisations eventuelles.

1. D'après [9] (chap. XX, § 1, article: „Quelques applications de la relation de la fermeture"), V. A. STEKLOV, comme premier, a démontré et appliqué dans la physique mathématique les inégalités suivantes*) (dans article 1, nous omettons les suppositions détaillées sur la dérivabilité; $(.)' = \mathrm{d}(.)/\mathrm{d}x$): Si (a) $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ou (b) $g(0) = g(\pi) = 0$, alors $\int_0^\pi g'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_0^\pi g^2(x)\,\mathrm{d}x$, l'égalité n'ayant lieu que, dans le cas (a), si $g = \text{const.} \cos x$ et, dans le cas (b), si $g = \text{const.} \sin x$.

L'inégalité plus générale est le lemme que W. BLASCHKE [4], p. 105, a attribué à W. Wirtinger et au moyen duquel W. Blaschke [4] a déduit les inégalités de MINKOWSKI et de FROBENIUS pour les domaines convexes plans: Si g possède la période 2π et si $\int_0^{2\pi} g\,\mathrm{d}x = 0$, puis $\int_0^{2\pi} g'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_0^{2\pi} g^2(x)\,\mathrm{d}x$, le signe d'égalité n'a lieu que si $g = \text{const.} \cos x + \text{const.} \sin x$. Du lemme de Wirtinger, on obtient l'inégalité de Steklov dans le cas (a) ou (b) pour la fonction paire ou impaire (voir [9], l'article cité ci-dessus).

G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA [11], p. 184–185, ont ajouté à ces inégalités d'autres du même type: Si $g(0) = 0$, alors $\int_0^{\pi/2} g'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_0^{\pi/2} g^2(x)\,\mathrm{d}x$, l'égalité n'ayant lieu que si $g = \text{const.} \sin x$. La base de la démonstration a été une certaine identité intégrale; ils ont procédé pareillement dans les démonstrations nouvelles de l'inégalité de Steklov et du lemme de Wirtinger, mais ils attribuent la démonstration de ce lemme à H. LEWY. Dans [11], p. 188–193, les auteurs discutent et démontrent (par diverses méthodes) aussi l'inégalité $\int_0^\infty (g^2 - g'^2 + g''^2)\,\mathrm{d}x \geqq 0$, la recherche de l'égalité incluse.

A. DINGHAS [6], p. 5 et [7], p. 13, est parti aussi de l'identité intégrale sus-mentionnée et, dans le cas (b), il a démontré de nouveau l'inégalité de Steklov et il l'a appliqué à l'amélioration de l'inégalité isopérimétrique classique.

K. FAN, O. TAUSSKY et J. TODD [8] ont complété les relations en question par les inégalités dans lesquelles intervient la seconde dérivée: Si $g(0) = g(\pi) = 0$ ou $g'(0) = g'(\pi) = 0$ et $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, puis $\int_0^\pi g''^2\,\mathrm{d}x \geqq \int_0^\pi g^2(x)\,\mathrm{d}x$; l'égalité a lieu, dans le premier cas, seulement si $g = \text{const.} \sin x$ et, dans le deuxième cas, seulement si $g = \text{const.} \cos x$.

P. R. BEESACK [2] a déduit les inégalités d'une espèce plus générale (voir aussi [3]): Si, sous condition d'orthogonalité $\int_a^b pg\,\mathrm{d}x = 0$, g est une solution d'un certain pro-

---

*) Dans un exposé, sur les travaux de Steklov dans la physique mathématique, fait par N. M. GJUNTER [10] au cours de la réunion de la société physico-mathématique de Leningrad en 1926, après la mort de V. A. Steklov, exposé publié à l'occasion du vingtième anniversaire du décès de Steklov, il n'y a évidemment aucune mention de ces inégalités. La remarque dans [9] est sans citation. Au lemme de WIRTINGER et à ses diverses généralisations ou à de semblables inégalités s'attache un grand nombre de travaux concernant la géometrie globale et la physique mathématique et il est donc intéressant de suivre l'origine de ce lemme. Celle-ci est contenue dans le travail [12], déjà classique, dans lequel A. HURWITZ a appliqué la relation de Parseval aux problèmes de la géométrie globale. Car les formules de MINKOWSKI [13] $L = \int h\,\mathrm{d}\varphi$ et $F = \frac{1}{2}\int (h^2 - h'^2)\,\mathrm{d}\varphi$ pour le périmètre L et pour l'aire F d'une figure convexe plane avec la fonction d'appui $h(\varphi)$, permettent d'exprimer l'inégalité isopérimétrique sous la forme de [*] $(\int h\,\mathrm{d}\varphi)^2 - 2\pi \int (h^2 - h'^2)\,\mathrm{d}\varphi \geqq 0$; si l'on renonce maintenant à la signification géométrique de la fonction $h(\varphi)$, ce qui n'a pas d'influence sur le procédé de Hurwitz, et si l'on exige que la valeur moyenne de la fonction $h(\varphi)$ sur la circonférence unitaire s'annule, il résulte de [*] tout de suite le lemme de Wirtinger.

blème aux limites de l'équation différentielle $[a]\ y'' + py = 0$ ou $[b]\ y^{IV} - py = 0$, alors $[a]\ \int_a^b g'^2\,dx \geqq \int_a^b pg^2\,dx$ ou $\int_a^b g''^2\,dx \geqq \int_a^b pg^2\,dx$. E. F. BECKENBACH et R. BELLMAN [1], chap. V, § 13 indiquent le cas [a] auquel conduit la généralisation de l'identité intégrale déjà citée (voir [11], p. 185). A la classe des inégalités de Beesack appartient aussi ce lemme amélioré de Wirtinger: $\int_0^{2\pi} g'^2\,dx \geqq \int_0^{2\pi} g^2\,dx + \frac{1}{2}\pi[g(0) + g(\pi)]^2$ (l'égalité n'a lieu que si $g =$ const. $\cos x +$ const. $\sin x +$ const. $[2 - \pi|\sin x|]$) qui a été démontré dans [14] à l'aide de la relation de Parseval pour le système trigonométrique fondamental.

Le lemme de Wirtinger ainsi que quelques inégalités analogues découlent aussi de la solution du problème de STURM-LIOUVILLE; voir [1], chap. 5, § 11 et [3].

A l'aide de l'inégalité de Steklov (b), généralisée à un intervalle arbitraire, W. T. REID [16] a obtenu, sur une surface dans l'espace à trois dimensions, une analogie de l'inégalité isopérimétrique classique. L'inégalité de Reid et l'inégalité isopérimétrique sont de forme identique sur chaque surface minima.**)

2. Retournons à la démonstration du théorème (***). Considérons d'abord le déterminant wronskien

$$\mathscr{W}(\beta) = W(\sin l_1\beta, \sin l_2\beta) = \\ = l_2 \sin l_1\beta \cos l_2\beta - l_1 \cos l_1\beta \sin l_2\beta\,, \tag{2,1}$$

pour lequel assurément

$$\mathscr{W}(0) = \mathscr{W}(\tfrac{1}{2}b) = 0\,. \tag{2,2}$$

La fonction $\mathscr{W}(\beta)$ peut être maximum ou minimum seulement dans les points où s'annulle sa dérivée première. A l'égard de (1) et (2), cela arrive dans le cas $\lambda_1 = 1$ seulement pour $\beta = b/4$ et dans le cas $\lambda_1 > 1$ pour $\beta = \frac{1}{2}kb : \lambda_1$ $(k = 1, 2, \ldots, \lambda_1 - 1)$ ou $\beta = \frac{1}{2}lb : \lambda_2$ $(l = 1, 2, \ldots, \lambda_2 - 1)$. Soit $\lambda_1 > 1$. En vertu de (2), on a $\pi k\lambda_2 : \lambda_1 \in (k\pi, k\pi + \pi)$ et $\pi l\lambda_1 : \lambda_2 \in (l\pi - \pi, l\pi)$. Par conséquent, pour k pair (ou impair) on obtient $\sin(\pi k\lambda_2 : \lambda_1) > 0$ (ou <0) et pour l pair (ou impair) $\sin(\pi l\lambda_1 : \lambda_2) < 0$ (ou >0). D'après (2,1) et (1), il résulte donc que la fonction $\mathscr{W}(\beta)$ peut avoir dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2}b)$ pour $\lambda_1 > 1$ seulement les maxima ou minima négatifs. Eu égard à (2,2) et à l'inégalité $\mathscr{W}(\frac{1}{4}b) < 0$ qui résulte tout de suite de (2,1), (1) et (2), on a donc dans tous les cas

$$\beta \in (0, \tfrac{1}{2}b) \Rightarrow \mathscr{W}(\beta) < 0\,. \tag{2,3}$$

**) L'inégalité de Reid a été généralisée, à des variétés à deux dimensions dans l'espace euclidien à m dimensions, par CHUAN-CHIH HSIUNG: *Isoperimetric inequalities for two-dimensional Riemannian manifolds with boundary.* Ann. of Math., II. Ser. *73* (1961), 213–220.

Par conséquent, d'après (2,3), l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, avec le système fondamental $\sin l_1\beta$, $\sin l_2\beta$, est, dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2}b)$, de la forme

$$W(y, \sin l_1\beta, \sin l_2\beta) : \mathscr{W}(\beta) = 0 \; ; \tag{2,4}$$

notons ses coefficients de y' et y

$$\begin{aligned} A(\beta) &= (l_2^2 - l_1^2)\,\mathscr{W}^{-1} \sin l_1\beta \sin l_2\beta \,, \\ B(\beta) &= l_1 l_2\, \mathscr{W}^{-1}(l_1 \sin l_1\beta \cos l_2\beta - l_2 \cos l_1\beta \sin l_2\beta)\,. \end{aligned} \tag{2,5}$$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}b$. A l'aide des intégrations partielles élémentaires, on trouve

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{b/2-\varepsilon} [f'' + Af' + Bf]^2 \,\mathrm{d}\beta &= \int_\varepsilon^{b/2-\varepsilon} f''^2 \,\mathrm{d}\beta \,+ \\ + \int_\varepsilon^{b/2-\varepsilon} [A^2 - A' - 2B] f'^2 \,\mathrm{d}\beta &+ \int_\varepsilon^{b/2-\varepsilon} [B^2 + (B' - AB)'] f^2 \,\mathrm{d}\beta \,+ \\ &+ [Af'^2 + 2Bff' + (AB - B')f^2]_\varepsilon^{b/2-\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{2,6}$$

En utilisant (2,1) et (2,5), nous vérifions par un calcul assez long, mais, autrement, élémentaire que, pour $\beta \in (0, \frac{1}{2}b)$,

$$\begin{aligned} A^2 - A' - 2B &= -l_1^2 - l_2^2\,, \\ B^2 + (B' - AB)' &= l_1^2 l_2^2\,. \end{aligned} \tag{2,7}$$

De (2,1) et (2,5) il découle que les fonctions

$$\beta A(\beta),\ \beta^2 B(\beta),\ \beta^3 B'(\beta) \tag{2,8}$$

sont bornées dans un voisinage du point $\beta = 0$. Parce que, d'après (1), $\sin l_i(\frac{1}{2}b - \beta) = (-1)^{\lambda_i + 1} \sin l_i\beta$, $\cos l_i(\frac{1}{2}b - \beta) = (-1)^{\lambda_i} \cos l_i\beta$, où $i = 1, 2$, on déduit de (2,1), (2,5) et (2) facilement que $A(\frac{1}{2}b - \beta) = -A(\beta)$, $B(\frac{1}{2}b - \beta) = B(\beta)$. Donc, les fonctions (2,8) étant bornées dans un voisinage du point $\beta = 0$, les fonctions

$$\beta A(\tfrac{1}{2}b - \beta),\ \beta^2 B(\tfrac{1}{2}b - \beta),\ \beta^3 B'(\tfrac{1}{2}b - \beta) \tag{2,9}$$

jouissent de la même propriété.

Vu les suppositions de notre fonction $f(\beta)$ et vu les conditions (9) et (6), on a pour $\beta \to 0+$

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= o(\beta^{\frac{1}{2}})\,, \quad f'(\tfrac{1}{2}b - \beta) = o(\beta^{\frac{1}{2}})\,, \\ f(\beta) &= o(\beta^{\frac{3}{2}})\,, \quad f(\tfrac{1}{2}b - \beta) = o(\beta^{\frac{3}{2}})\,. \end{aligned} \tag{2,10}$$

Puisque les fonctions (2,8) et (2,9) sont bornées dans un voisinage du point $\beta \gtrsim 0$, il suit de (2,10) que

$$(2,11) \qquad \lim_{\beta \to 0+} A(\beta) f'^2(\beta) = \lim_{\beta \to 0+} B(\beta) f'(\beta) f(\beta) = $$
$$= \lim_{\beta \to 0+} [A(\beta)\, B(\beta) - B'(\beta)] f^2(\beta) = 0\,,$$

$$\lim_{\beta \to 0+} A(\tfrac{1}{2}b - \beta) f'^2(\tfrac{1}{2}b - \beta) = \lim_{\beta \to 0+} B(\tfrac{1}{2}b - \beta) f'(\tfrac{1}{2}b - \beta) f(\tfrac{1}{2}b - \beta) =$$
$$= \lim_{\beta \to 0+} [A(\tfrac{1}{2}b - \beta)\, B(\tfrac{1}{2}b - \beta) - B'(\tfrac{1}{2}b - \beta)] f^2(\tfrac{1}{2}b - \beta) = 0\,.$$

En tenant compte de (2,7) et (2,11), nous voyons tout de suite, que, dans (2,6), le passage $\varepsilon \to 0$ est possible:

$$(2,12) \qquad \int_0^{b/2} [f'' + Af' + Bf]^2 \,\mathrm{d}\beta =$$
$$= \int_0^{b/2} f''^2 \,\mathrm{d}\beta - (l_1^2 + l_2^2) \int_0^{b/2} f'^2 \,\mathrm{d}\beta + l_1^2 l_2^2 \int_0^{b/2} f^2 \,\mathrm{d}\beta\,.$$

D'après (2,12), le côté gauche dans (7) est zéro ou positif et il n'est nul que si $f'' + Af' + Bf = 0$ dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2}b)$. Les fonctions A et B de (2,5) étant les coefficients de l'équation différentielle linéaire (2,4), l'assertion du théorème (***) concernant l'inégalité aiguë dans (7) est déjà évidente.

Nous allons indiquer encore une approche générale à l'inégalité (7); cf. [11], p. 182. Cherchons les fonctions $A(\beta)$, $B(\beta)$, $M(\beta)$, $N(\beta)$, $P(\beta)$ pour lesquelles

$$f''^2 - (l_1^2 + l_2^2) f'^2 + l_1^2 l_2^2 f^2 - (f'' + Af' + Bf)^2 = (Mf'^2 + Nf^2 + Pf'f)'\,.$$

Un calcul simple montre que nécessairement

$$(2,13) \qquad M' + P = -(l_1^2 + l_2^2 + A)\,, \quad N' = l_1^2 l_2^2 - B^2\,;$$
$$M = -A\,, \quad 2N + P' = 2AB\,, \quad P = -2B\,.$$

En éliminant M, N, P de (2,13), nous obtenons le système (2,7), dont une solution est (2,5) avec (2,1).

Faisons remarquer pour finir que, à la fonctionnelle $J(f)$ à gauche dans (4) ou (7), appartient l'équation d'Euler $f^{\mathrm{IV}} + (l_1^2 + l_2^2) f'' + l_1^2 l_2^2 f = 0$, dont la solution générale est (5), tandis que la solution particulière soumise aux conditions aux limites (6) et (9) est la solution triviale. Par conséquent, l'idéntité intégrale (2,12) donne la solution du problème des variations pour la fonctionnelle $J(f)$.

Index bibliographique

[1] *E. F. Beckenbach - R. Bellman:* Inequalities. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961, 1965. (Неравенства. Москва 1965).

[2] *P. R. Beesack:* Integral inequalities of the Wirtinger type. Duke Math. J. *25* (1958), 477—498.

[3] *P. R. Beesack:* Isoperimetric Inequalities for the Nonhomogeneous Clamped Rod and Plate. J. of Math. and Mech. *8* (1959), 471—482.

[4] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, New York 1949, Berlin 1956.

[5] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přírodov. fak. Masarykovy univ. *146*, Brno 1931.

[6] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. preuss. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1939, Nr. 4.

[7] *A. Dinghas:* Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ibidem, 1939, Nr. 9.

[8] *K. Fan - O. Taussky - J. Todd:* Discrete analogs of inequalities of Wirtinger. Monatsh. Math. *59* (1955), 73—90.

[9] *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциального и интегрального исчисления III. Москва 1963. (Differential- und Integralrechnung III. Berlin 1964).

[10] *Н. М. Гюнтер:* Труды В. А. Стеклова по математической физике. Успехи мат. наук *1* (1946), 23—43.

[11] *G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Pólya:* Ineqalities. Cambridge 1934, 1952. (Неравенства. Москва 1948).

[12] *A. Hurwitz:* Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. École norm. (3) *19* (1902), 357—408.

[13] *H. Minkowski:* Volumen und Oberfläche. Math. Ann. *57* (1903), 447—495 Gesammelte Abhandlungen II, Leipzig—Berlin 1911, 230—276.

[14] *Z. Nádeník:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 220—225.

[15] *Z. Nádeník:* Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 363—376.

[16] *W. T. Reid:* The Isoperimetric Inequality and Associated Boundary Problems. J. Math. and Mech. *8* (1959), 897—905.

Adresse de l'auteur: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Výtah

WIRTINGEROVO LEMMA PRO NADKRUŽNICI

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

V [15] bylo pomocí Parsevalovy relace pro základní trigonometrický systém dokázáno Wirtingerovo lemma pro nadkružnici. V tomto článku je na základě jisté integrální identity odvozena nerovnost, úzce spojená se zmíněným tvrzením z [15]: Nechť nadkružnice C s obloukem β a celkovou délkou b ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru se promítá ortogonálně do svých dvou axiálních rovin jako kružnice λ-krát a $(\lambda + 1)$-krát počítané. Položme $l_1 = 2\pi\lambda : b$, $l_2 = 2\pi(\lambda + 1) : b$. Na nadkružnici C nechť je definována funkce $f(\beta)$ taková, že $f''(\beta) \in L_2$ a $f(0) = f(\frac{1}{2}b) = 0, f'(0) = f'(\frac{1}{2}b) = 0$ (ovšem $(\ )' = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\beta$). Pak je splněna nerovnost (7) a pokud funkce $f(\beta)$ není na C identicky rovna nule, platí v (7) vždy znamení ostré nerovnosti.

Резюме

АНАЛОГ ЛЕММЫ ВИРТИНГЕРА ДЛЯ ГИПЕРОКРУЖНОСТИ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Посредством формулы Ляпунова для основной тригонометрической системы доказана в [15] лемма Виртингера для гиперокружности. Цель этой статьи — доказательство на основании одного интегрального тождества следующего неравенства, которое тесно связано с цитированной леммой из [15]: Пусть C — гиперокружность в четырехмерном евклидовом пространстве, β соотв. b — дуга, соотв. длина, кривой C, о которой предполагается, что она проектируется ортогонально на свои две осевые плоскости как окружность λ-кратная и окружность $(\lambda + 1)$-кратная. Положим $l_1 = 2\pi\lambda : b$, $l_2 = 2\pi(\lambda + 1) : b$. Пусть $f(\beta)$ — функция, заданная вдоль кривой C и такая, что $f''(\beta) \in L_2$ и $f(0) = f(\frac{1}{2}b) = 0$, $f'(0) = f'(\frac{1}{2}b) = 0$ (разумеется, $(\ )' = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\beta$). При этих условиях справедливо неравенство (7) и, поскольку функция $f(\beta)$ не равна тождественно нулю на C, в (7) имеет место всегда знак строгого неравенства.