Časopis pro pěstování matematiky

Robert Karpe

Příspěvek k variacím daného součtu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 1--7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117587`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 92 * PRAHA 15. 2. 1967 * ČÍSLO 1

PŘÍSPĚVEK K VARIACÍM DANÉHO SOUČTU

ROBERT KARPE, Brno

(Došlo dne 19. února 1963, přepracované dne 16. března 1966)

Nechť

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

představuje množinu všech přirozených čísel; nechť

$$A - \{r\} = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, r + 2, \ldots \tag{2}$$

představuje množinu všech přirozených čísel, od níž je odebráno číslo r.

Nechť

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r\}\right), \quad \text{resp.} \quad \Phi^{(k)}\left[\int n;\ A - \{r\}\right] \tag{3}$$

představuje počet, resp. soubor všech variací s opakováním, součtu n, k-té třídy, jež jsou sestavovány ze všech přirozených čísel, vyjma čísla r. Viz [1], úvod 5. kapitoly.

a) Dokážeme, že platí:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri;\ A - \{r\}\right), \tag{4}$$

kde přirozené číslo $n - ri$ omezíme nerovností $n/k \geqq r$.

Důkaz. Soubor

$$\Phi^{(k)}\left[\int n;\ A\right] \tag{α}$$

roztřídíme podle toho, kolikrát se prvek r vyskytuje v jednotlivých variacích: uvážíme, že všechny variace souboru (α), jež obsahují právě i prvků r, vzniknou začleněním těchto i prvků do každé variace souboru:

$$\Phi^{(k-i)}\left[\int n - ri;\ A - \{r\}\right]. \tag{β}$$

Uvážíme dále, že v libovolné variaci souboru (β), která po začlenění i prvků r se stane k-člennou, mohou míti jednotlivé prvky r, podle toho kolikáté místo odleva obsadily, tyto indexy:

$$\begin{array}{lll} 1, 2, & \dots, & i-1, i \\ 1, 2, & \dots, & i-1, i+1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ k-i+1, k-i+2, & \dots, & k-1, k \end{array}$$

Toto jsou však i-místné kombinace z k prvků, bez opakování. Máme tedy výsledek:

Z každé $(k - i)$-členné variace součtu $n - ri$, sestavené z prvků množiny $A - \{r\}$, vznikne vždy $\binom{k}{i}$ variací k-členných, součtu n, obsahujících i prvků r, a tudíž sestavených z množiny A.

Z těchto úvah pak bezprostředně vyplývá relace (4).

b) Dále odvodíme relaci:

$$\text{(I)} \qquad \Phi^{(k)}\left(\int n; A - \{r\}\right) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \cdot \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A\right).$$

Důkaz. Protože platí

$$\text{(4)} \qquad \Phi^{(k)}\left(\int n; A\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A\right),$$

platí též

$$\Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \cdot \Phi^{(k-1-j)}\left(\int n - r - rj; A - \{r\}\right);$$

tato relace po substituci $j + 1 = i$ zní:

$$\text{(4')} \qquad \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \cdot \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A - \{r\}\right).$$

Rozdílem (4)—(4′) obdržíme:

$$\text{(5)} \qquad \binom{1}{0} \cdot \Phi^{(k)}\left(\int n; A\right) - \binom{1}{1} \cdot \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A - \{r\}\right).$$

Poznámka. Jedná se o to abychom ukázali, že tímto postupem, s-krát opětovaným, obdržíme na levé straně rovnice — jako koeficienty za sebou jdoucích členů — kombinační čísla $\binom{k}{i}$; $i = 0, 1, \ldots, s$.

Platí-li (5), pak platí též

$$\binom{1}{0} . \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) - \binom{1}{1} . \Phi^{(k-2)}\left(\int n - 2r; A\right) = $$
$$= \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} . \Phi^{(k-1-j)}\left(\int n - r - rj; A - \{r\}\right);$$

Tato relace po substituci $j + 1 = i$ zní:

$$(5') \qquad \binom{1}{0} . \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) - \binom{1}{1} . \Phi^{(k-2)}\left(\int n - 2r; A\right) = $$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} . \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A - \{r\}\right).$$

Rozdílem (5)—(5′) obdržíme:

$$(6) \quad \binom{2}{0} . \Phi^{(k)}\left(\int n; A\right) - \binom{2}{1} . \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) + \binom{2}{2} . \Phi^{(k-2)}\left(\int n - 2r; A\right) = $$
$$= \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} . \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A - \{r\}\right).$$

Platí-li (6), pak platí též

$$\binom{2}{0} . \Phi^{(k-1)}\left(\int n-r; A\right) - \binom{2}{1} . \Phi^{(k-2)}\left(\int n-2r; A\right) + \binom{2}{2} . \Phi^{(k-3)}\left(\int n-3r; A\right) = $$
$$= \sum_{j=0}^{k-3} \binom{k-3}{j} . \Phi^{(k-1-j)}\left(\int n - r - rj; A - \{r\}\right).$$

Tato relace po substituci $j + 1 = i$ se odečte od (6), čímž obdržíme

$$(7) \quad \binom{3}{0} . \Phi^{(k)}\left(\int n; A\right) - \binom{3}{1} . \Phi^{(k-1)}\left(\int n - r; A\right) + \binom{3}{2} . \Phi^{(k-2)}\left(\int n-2r; A\right) - $$
$$- \binom{3}{3} . \Phi^{(k-3)}\left(\int n - 3r; A\right) = \sum_{i=0}^{k-3} \binom{k-3}{i} . \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A - \{r\}\right),$$

atd., až konečně:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i . \binom{k}{i} . \Phi^{(k-i)}\left(\int n - ri; A\right) = \Phi^{(k)}\left(\int n; A - \{r\}\right),$$

což bylo dokázat.

c) Tak jako jsme od (4) dospěli k relaci (I), kterou vzhledem k dalšímu napíšeme v úpravě

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r_1\}\right) = \sum_{i_1=0}^{k}(-1)^{i_1}\cdot\binom{k}{i_1}\cdot\Phi^{(k-i_1)}\left(\int n - r_1 i_1;\ A\right), \tag{8}$$

dospěli bychom – postupem zcela obdobným – od (8) k relaci:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r_1, r_2\}\right) = \sum_{i_2=0}^{k}(-1)^{i_2}\cdot\binom{k}{i_2}\cdot\Phi^{(k-i_2)}\left(\int n - r_2 i_2;\ A - \{r_1\}\right). \tag{9}$$

Složením relací (8), (9), pak obdržíme:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r_1, r_2\}\right) = \tag{10}$$

$$= \sum_{i_2=0}^{k}(-1)^{i_2}\cdot\binom{k}{i_2}\cdot\sum_{i_1=0}^{k-i_2}(-1)^{i_1}\cdot\binom{k-i_2}{i_1}\cdot\Phi^{(k-i_1-i_2)}(n - r_1 i_1 - r_2 i_2;\ A)$$

a odtud:

$$\Phi^{(k)}(n;\ A - \{r_1, r_2\}) = \tag{11}$$

$$= \sum_{\substack{i=0\\ i_1+i_2=i}}^{k}(-1)^{i}\cdot\left[\frac{k!}{i_1!\,.\,i_2!\,.\,(k-i)!}\cdot\Phi^{(k-i)}\left(\int n - r_1 i_1 - r_2 i_2;\ A\right)\right].$$

Opětováním uvedeného postupu dospějeme zřejmě k formuli:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}\right) = \sum_{\substack{i=0\\ i_1+i_2+\ldots+i_s=i}}^{k}(-1)^{i}\,. \tag{II}$$

$$\cdot\left[\frac{k!}{i_1!\,.\,i_2!\ldots i_s!\,.\,(k-i)!}\cdot\Phi^{(k-i)}\left(\int n - r_1 i_1 - r_2 i_2 - \ldots - r_s i_s;\ A\right)\right].$$

Protože platí (viz [1], str. 120, relace 4):

$$\Phi^{(h)}\left(\int m;\ A\right) = \binom{m-1}{h-1}, \tag{13}$$

lze vyjádřit relaci (II) v číslech kombinačních:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A - \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}\right) = \tag{III}$$

$$= \sum_{\substack{i=0\\ i_1+i_2+\ldots+i_s=i}}^{k}(-1)^{i}\cdot\left[\binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_s}\cdot\binom{n-1-r_1 i_1 - r_2 i_2 - \ldots - r_s i_s}{k-i-1}\right].$$

Pro polynomický koeficient zavedli jsme zde zkratku.

Poznámka 1. Odebéřeme-li od množiny všech přirozených čísel vhodně zvolenou podmnožinu tak, aby ze zbylé, tj. doplňkové množiny nebylo možno sestavit už ani jedinou variaci k-té třídy, součtu n, bude platit:

$$\text{(III}'\text{)} \quad 0 = \sum_{\substack{i=0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_s=i}}^{k} (-1)^i \cdot \left[\binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_s} \cdot \binom{n-1-r_1i_1-r_2i_2-\ldots-r_si_s}{k-i-1}\right].$$

Tuto novou relaci mezi kombinačními čísly nutno ovšem doplnit konkrétní volbou podmnožiny čísel, odebraných od A.

Tak například možno zvolit:

$$(14) \qquad r_i = i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, s\,, \quad \text{kde} \quad s \geqq s_0\,.$$

Prvek s_0 omezíme vzhledem k daným indexům n, k, podmínkami:

$$(15) \qquad n = k\,.\,s_0 + q\,; \quad 0 \leqq q < k\,;$$

Snadno totiž nahlédneme, že každá variace k-té třídy, součtu n, musí obsahovat alespoň jeden prvek p, pro nějž platí $p \leqq s_0$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje variace k-té třídy, součtu n, sestavená z prvků vesměs větších, nežli je s_0. Tedy že platí: $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$, kde $p_i > s_0$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Označíme-li $p_i = s_0 + a_i$, kde $a_i \geqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, platí podle předpokladu:

$$n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = k\,.\,s_0 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\,.$$

Avšak $q = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \geqq k$, což odporuje podmínce (15) pro s_0.

Poznámka 2. Prvním členem v rozvoji pravé strany relace (III), tj. pro $i = 0$, jest $\binom{n-1}{k-1}$. Toto číslo značí – viz (13) – počet všech variací k-té třídy, součtu n, jež jsou sestavovány z množiny A. Vzhledem k tomu lze formulovat výsledek též pro doplňkový počet variací:

$$\text{(IV)} \qquad \Phi^{(k)}\left(\int n;\, r_1, r_2, \ldots, r_s\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_s=i}}^{k} (-1)^i \cdot \left[\binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_s} \cdot \binom{n-1-r_1i_1-r_2i_2-\ldots-r_si_s}{k-i-1}\right].$$

Levá strana symbolisuje tudíž počet všech variací, jež obsahují ve své sestavě vždy alespoň jeden (a alespoň jednou) z množiny vytčených prvků $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

Poznámka 3. Uvedené úvahy možno též uvést v souvislost se zobecněným Hermesovým vzorcem, viz [2]. Tím dospějeme k dalšímu vztahu mezi kombinačními čísly:

Budiž $\{R\}$ množina všech čísel, jež vyloučíme z A. Specialisujme tuto množinu následovně:

$$(17) \qquad \{R\} = \begin{Bmatrix} 1, & 2, & \ldots, c-1 \\ c+1, & c+2, & \ldots, c+d-1 \\ c+d+1, & c+d+2, & \ldots, c+2d-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c+(h-1)d+1, & c+(h-1)d+2, & \ldots, c+hd-1 \end{Bmatrix}$$

Znamená to tedy, že prvky doplňkové množiny, kterou označíme $A - \{R\}$, lze seřadit do rostoucí posloupnosti:

$$(18) \quad c, c+d, c+2d, \ldots, c+(h-1)d, c+hd, c+hd+1, c+hd+2, \ldots$$

Nechť pro předem daná přirozená čísla c, d, n, k, platí:

$$(19) \qquad n - ck = dm\,,$$

kde m je číslo celé, nezáporné. Pak vzhledem k (18), (19), zajisté existuje takové nejnižší přirozené číslo h_0, že pro každé přirozené $h \geqq h_0$ platí:

$$(20) \qquad \Phi^{(k)}\left(\int n;\, A(c, d)\right) = \Phi^{(k)}\left(\int n;\, A - \{R\}\right),$$

kde symbol $A(c, d)$ značí množinu prvků, jež lze uspořádat do aritmetické posloupnosti:

$$(21) \qquad A(c, d) = c, c+d, c+2d, \ldots$$

Relací (20) jsme dospěli ke konfrontaci zobecněné Hermesovy formule:

$$(22) \qquad \Phi^{(k)}\left(\int n;\, A(c, d)\right) = \binom{\frac{n-ck}{d} + k - 1}{k-1},$$

mající smysl pokud platí (19), a relace (III), ve které nechť $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ označuje nyní množinu (17).

$$(\mathrm{V}) \qquad \binom{\frac{n-ck}{d} + k - 1}{k-1} =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_s=i}}^{k} (-1)^i \left[\binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_s}\binom{n-1-i_1r_1-i_2r_2-\ldots-i_sr_s}{k-i-1}\right].$$

Specialisováním této relace, zvláště pro $d = 1$, nebo pro $(c = 1,\, d = 2)$, lze dospěti k dosti přehledným vzorcům.

Literatura

[1] *E. Netto:* „Lehrbuch der Combinatorik“, r. 1927.
[2] *R. Karpe:* „Zovšeobecnenie Hermesovho vzorca“, Matematicko-fyzikálny časopis, roč. *16*, 1. číslo. (Bratislava, 1966.)

Adresa autora: Brno, Charbulova ul. č. 14.

Резюме

К РАЗМЕЩЕНИЯМ ДАННОЙ СУММЫ

РОБЕРТ КАРПЕ (Robert Karpe), Брно

В настоящей заметке вывожу формулы для числа всех размещений суммы n, класса k, с повторением. Элементы, выступающие в этих размещениях, образуют множество всех натуральных чисел, из которого вынято произвольным образом выбранное подмножество.

В связи с этим обнаружены еще два соотношения между биномическими коэффициентами $\binom{n}{k}$.

Zusammenfassung

EIN BEITRAG ZU DEN VARIATIONEN EINER BESTIMMTEN SUMME

Robert Karpe, Brno

In dieser Behandlung wird eine Formel für die Anzahl aller Variationen zur Summe n, k-ter Klasse, mit Wiederholung, abgeleitet. Die Elemente, aus denen die Variationen zusammengestellt werden, bilden eine Menge aller natürlichen Zahlen, von der eine willkürlich gewählte Untermenge abgenommen ist.

Im Zusammenhang damit findet man auch zwei Relationen zwischen den Kombinationszahlen $\binom{n}{k}$.