Časopis pro pěstování matematiky

Bohdan Zelinka

Důkaz nezávislosti Birkhoffova systému postulátů pro distributivní svazy s jednotkovým prvkem

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 472--477

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117574

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

DŮKAZ NEZÁVISLOSTI BIRKHOFFOVA SYSTÉMU POSTULÁTŮ PRO DISTRIBUTIVNÍ SVAZY S JEDNOTKOVÝM PRVKEM

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 8. prosince 1965)

Na základě výsledků M. H. A. NEWMANA [3] zavedli G. D. BIRKHOFF a G. BIRKHOFF [1] v teorii distributivních svazů systém sedmi postulátů. V [2] je položen problém (str. 139, problém 65) určit, zda tento systém postulátů je nezávislý či nikoliv. V tomto článku je dokázáno, že je nezávislý.

Birkhoffovy postuláty jsou vysloveny pro algebru s dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$. Birkhoff dokázal, že algebra, která je splňuje, je distributivní svaz s jednotkovým prvkem. Jde o tyto postuláty:

$$(\forall a) . a \wedge a = a \tag{1}$$

$$(\exists I)(\forall a) . a \vee I = I \tag{2}$$

$$(\exists I)(\forall a) . I \vee a = I \tag{3}$$

$$(\exists I)(\forall a) . a \wedge I = a \tag{4}$$

$$(\exists I)(\forall a) . I \wedge a = a \tag{5}$$

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c) . a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{6}$$

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c) . (b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a) \tag{7}$$

Důkaz nezávislosti těchto postulátů provedeme tak, že sestrojíme algebry $A_1, \ldots, A_7$, z nichž každá má dvě binární operace $\wedge$ a $\vee$ a přitom algebra A_i $(i = 1, \ldots, 7)$ nesplňuje postulát (i) a splňuje všechny ostatní.

Budeme při tom používat zřejmě správného tvrzení (T):

Budiž A algebra s binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$, budiž $\bar{A}$ algebra s týmiž prvky jako A vzniklá z A transposicí tabulek operací $\wedge$ a $\vee$. Postulát (1) *platí v A právě tehdy, platí-li v $\bar{A}$. Postulát* (2) (*resp.* (4), *resp.* (6)) *platí v A právě tehdy, jestliže v $\bar{A}$ platí postulát* (3) (*resp.* (5), *resp.* (7)).

I. Algebra A_1 obsahuje tři prvky p, q, I a je dána tabulkami:

$\wedge$	p	q	I
p	q	q	p
q	q	q	q
I	p	q	I

$\vee$	p	q	I
p	p	p	I
q	p	q	I
I	I	I	I

Postulát (1) není splněn, poněvadž

$$p \wedge p = q\,.$$

Platnost postulátů (2), (3), (4) a (5) je na první pohled zřejmá z tabulek. Ukážeme platnost postulátu (6). Je-li $a = q$ a b, c jsou libovolné prvky, pak

$$q \wedge (b \vee c) = q = q \vee q = (q \wedge b) \vee (q \wedge c)\,.$$

Je-li $a = I$ a b, c libovolné prvky, platí

$$I \wedge (b \vee c) = b \vee c = (I \wedge b) \vee (I \wedge c)$$

Vezměme konečně $a = p$. Zde prozkoumáme všechny možné případy, kterých je šest, protože zřejmě platí komutativní zákon pro obě operace.

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \vee p) &= p \wedge p = q = q \vee q = (p \wedge p) \vee (p \wedge p)\\
p \wedge (p \vee q) &= p \wedge p = q = q \vee q = (p \wedge p) \vee (p \wedge q)\\
p \wedge (p \vee I) &= p \wedge I = p = q \vee p = (p \wedge p) \vee (p \wedge I)\\
p \wedge (q \vee q) &= p \wedge q = q = q \vee q = (p \wedge q) \vee (p \wedge q)\\
p \wedge (q \vee I) &= p \wedge I = p = q \vee p = (p \wedge q) \vee (p \wedge I)\\
p \wedge (I \vee I) &= p \wedge I = p = p \vee p = (p \wedge I) \vee (p \wedge I)
\end{aligned}$$

Postulát (6) tedy platí, a poněvadž platí současně i komutativní zákon pro obě operace, platí i postulát (7). Tím je dokázána nezávislost postulátu (1) na ostatních postulátech.

II. Algebra A_2 obsahuje opět tři prvky p, q, I a je dána těmito tabulkami:

$\wedge$	p	q	I
p	p	p	p
q	p	q	q
I	p	q	I

$\vee$	p	q	I
p	p	q	q
q	q	q	q
I	I	I	I

Postulát (2) není splněn, protože v tabulce operace $\vee$ neexistuje sloupec, jehož všechny prvky by byly stejné. Platnost postulátů (1), (3), (4) a (5) je opět zřejmá z tabulky. Ukážeme opět platnost postulátu (6). Pro $a = p$ a libovolná b, c je

$$p \wedge (b \vee c) = p = p \vee p = (p \wedge b) \vee (p \wedge c)\,.$$

Pro $a = I$ a libovolná b, c je

$$I \wedge (b \vee c) = b \vee c = (I \wedge b) \vee (I \wedge c)$$

Pro $a = q$ musíme probrat všechny možné případy, kterých bude tentokrát devět, protože neplatí komutativní zákon pro operaci $\vee$.

$$\begin{aligned}
q \wedge (p \vee p) &= q \wedge p = p = p \vee p = (q \wedge p) \vee (q \wedge p)\\
q \wedge (p \vee q) &= q \wedge q = q = p \vee q = (q \wedge p) \vee (q \wedge q)\\
q \wedge (p \vee I) &= q \wedge q = q = p \vee q = (q \wedge p) \vee (q \wedge I)\\
q \wedge (q \vee p) &= q \wedge q = q = q \vee p = (q \wedge q) \vee (q \wedge p)\\
q \wedge (q \vee q) &= q \wedge q = q = q \vee q = (q \wedge q) \vee (q \wedge q)\\
q \wedge (q \vee I) &= q \wedge q = q = q \vee q = (q \wedge q) \vee (q \wedge I)\\
q \wedge (I \vee p) &= q \wedge I = q = q \vee p = (q \wedge I) \vee (q \wedge p)\\
q \wedge (I \vee q) &= q \wedge I = q = q \vee q = (q \wedge I) \vee (q \wedge q)\\
q \wedge (I \vee I) &= q \wedge I = q = q \vee q = (q \wedge I) \vee (q \wedge I)
\end{aligned}$$

Platí tedy i postulát (6). Poněvadž pro operaci $\wedge$ platí komutativní zákon, platí i postulát (7). Tím jsme dokázali nezávislost postulátu (2) na ostatních postulátech.

III. Na základě tvrzení (T) můžeme položit $A_3 = \bar{A}_2$. Tím dokážeme nezávislost postulátu (3).

IV. Algebra A_4 opět obsahuje prvky p, q, I a je dána tabulkami:

$\wedge$	p	q	I
p	p	q	q
q	p	q	q
I	p	q	I

$\vee$	p	q	I
p	p	q	I
q	q	q	I
I	I	I	I

Postulát (4) neplatí, což je zřejmé z tabulky operace $\wedge$. Rovněž je z tabulek zřejmá platnost postulátů (1), (2), (3) a (5). Ukážeme platnost postulátu (6). Je-li $a = I$ a b, c libovolné prvky, je

$$I \wedge (b \vee c) = b \vee c = (I \wedge b) \vee (I \wedge c)$$

Pro $a = p$ opět probereme všech šest případů (platí komutativní zákon pro operaci $\vee$).

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \vee p) &= p \wedge p = p = p \vee p = (p \wedge p) \vee (p \wedge p)\\
p \wedge (p \vee q) &= p \wedge q = q = p \vee q = (p \wedge p) \vee (p \wedge q)\\
p \wedge (p \vee I) &= p \wedge I = q = p \vee q = (p \wedge p) \vee (p \wedge I)\\
p \wedge (q \vee q) &= p \wedge q = q = q \vee q = (p \wedge q) \vee (p \wedge q)\\
p \wedge (q \vee I) &= p \wedge I = q = q \vee q = (p \wedge q) \vee (p \wedge I)\\
p \wedge (I \vee I) &= p \wedge I = q = q \vee q = (p \wedge I) \vee (p \wedge I)
\end{aligned}$$

Nyní probereme všechny případy pro $a = q$.

$$
\begin{aligned}
q \wedge (p \vee p) &= q \wedge p = p = p \vee p = (q \wedge p) \vee (q \wedge p)\\
q \wedge (p \vee q) &= q \wedge q = q = p \vee q = (q \wedge p) \vee (q \wedge q)\\
q \wedge (p \vee I) &= q \wedge I = q = p \vee q = (q \wedge p) \vee (q \wedge I)\\
q \wedge (q \vee q) &= q \wedge q = q = q \vee q = (q \wedge q) \vee (q \wedge q)\\
q \wedge (q \vee I) &= q \wedge I = q = q \vee q = (q \wedge q) \vee (q \wedge I)\\
q \wedge (I \vee I) &= q \wedge I = q = q \vee q = (q \wedge I) \vee (q \wedge I)
\end{aligned}
$$

Tedy postulát (6) platí. Ukážeme ještě platnost postulátu (7). Pro $a = p$ a pro libovolná b, c platí

$$(b \vee c) \wedge p = p = p \vee p = (b \wedge p) \vee (c \wedge p)$$

Rovněž pro $a = q$ a libovolná b, c platí

$$(b \vee c) \wedge q = q = q \vee q = (b \wedge q) \vee (c \wedge q)$$

Pro $a = I$ prozkoumáme opět všechny případy.

$$
\begin{aligned}
(p \vee p) \wedge I &= p \wedge I = q = q \vee q = (p \wedge I) \vee (p \wedge I)\\
(p \vee q) \wedge I &= q \wedge I = q = q \vee q = (p \wedge I) \vee (q \wedge I)\\
(p \vee I) \wedge I &= I \wedge I = I = q \vee I = (p \wedge I) \vee (I \wedge I)\\
(q \vee q) \wedge I &= q \wedge I = q = q \vee q = (q \wedge I) \vee (q \wedge I)\\
(q \vee I) \wedge I &= I \wedge I = I = q \vee I = (q \wedge I) \vee (I \wedge I)\\
(I \vee I) \wedge I &= I \wedge I = I = I \vee I = (I \wedge I) \vee (I \wedge I)
\end{aligned}
$$

Tedy i postulát (7) platí. Tím je dokázána nezávislost postulátu (4) na ostatních postulátech.

V. Na základě tvrzení (T) položíme $A_5 = \bar{A}_4$.

VI. Algebra A_6 obsahuje opět prvky p, q, I a je dána tabulkami:

$\wedge$	p	q	I
p	p	q	p
q	p	q	q
I	p	q	I

$\vee$	p	q	I
p	p	q	I
q	q	q	I
I	I	I	I

Postulát (6) v této algebře neplatí, neboť

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \vee I) &= p \wedge I = p\\
(p \wedge q) \vee (p \wedge I) &= q \vee p = q
\end{aligned}
$$

Platnost postulátů (1), (2), (3), (4) a (5) je zřejmá z tabulek. Ukážeme platnost postulátu (7). Pro $a = p$ a libovolná b, c platí:

$$(b \vee c) \wedge p = p = p \vee p = (b \wedge p) \vee (c \wedge p)$$

Pro $a = q$ a libovolná b, c platí

$$(b \vee c) \wedge q = q = q \vee q = (b \wedge q) \vee (c \wedge q)$$

Pro $a = I$ a libovolná b, c platí

$$(b \vee c) \wedge I = b \vee c = (b \wedge I) \vee (c \wedge I)$$

Tedy také postulát (6) je nezávislý na ostatních postulátech.

VII. Na základě tvrzení (T) položíme $A_7 = \bar{A}_6$.

Získaný výsledek formulujeme jako větu.

Věta. *Birkhoffův systém postulátů* (1), (2), (3), (4), (5), (6) *a* (7) *pro distributivní svazy s jednotkovým prvkem je nezávislý.*

Literatura

[1] *G. D. Birkhoff, G. Birkhoff:* Distributive postulates for systems like Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. *60* (1946), 3–11.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice Theory. New York 1948.

[3] *M. H. A. Newman:* A characterization of Boolean lattices and rings. J. London Math. Soc. *16* (1941), 256–272.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Резюме

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕЗАВИСИМОСТИ СИСТЕМЫ ПОСТУЛАТОВ БИРКГОФФА ДЛЯ ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУР С ЕДИНИЧНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

Г. Д. Биркгофф и Г. Биркгофф ввели в теорию дистрибутивных структур систему семи постулатов. Алгебра с двумя бинарными операциями, которая удовлетворяет этим постулатам, является дистрибутивной структурой с единичным элементом. В этой статье доказана независимость этих постулатов (что предложил Г. Биркгофф как проблему).

Summary

INDEPENDENCE OF BIRKHOFF'S POSTULATE SYSTEM FOR DISTRIBUTIVE LATTICES WITH AN UNIT ELEMENT

BOHDAN ZELINKA, Liberec

G. D. Birkhoff and G. Birkhoff have introduced a system of seven postulates for the theory of distributive lattices; an algebra with two binary operations which satisfies those postulates is a distributive lattice with an unit element. In this article the independence of those postulates is proved (this was a problem formulated by G. Birkhoff).

CORRECTION TO THE PAPER „PARTITIONS IN CARTESIAN SYSTEMS"*)

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Received August 22, 1966)

1. The definition of the subsystem corresponding to a generating partition (§ 2) must be corrected as follows: If $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ is a generating partition in a system $\mathbf{C}$ then we define a subsystem $\mathbf{C}' = ((S'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ in $\mathbf{C}$ *corresponding* to $\mathscr{P}$ as a system such that, for every α, $S'_\alpha = \bigcup_{A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha} A_\alpha$, that $S'_0 = \bigcup_{A_0 \in \mathscr{P}_0} A_0 \cap f(\prod_\alpha S'_\alpha)$ and that f' is the portion of f with the domain $\prod_\alpha S'_\alpha$.

2. In the formulation of Theorem 4 (§ 4), replace „*in*" by „*on*".

*) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 246–253.