Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Lukeš

Lebesgueův integrál

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 371--383

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117573`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 91 * PRAHA 17. 10. 1966 * ČÍSLO 4

LEBESGUEŮV INTEGRÁL

JAROSLAV LUKEŠ, Praha

(Došlo dne 17. ledna 1963, přepracované dne 1. března 1965)

ÚVOD

0.1. Na začátku připomeňme některé pojmy a označení, které budeme v dalším používat. E_1 bude množina všech reálných čísel, E_1^* bude množina, již dostaneme přidáním symbolů $+\infty$ a $-\infty$ k E_1. Operace se symboly $+\infty$ a $-\infty$ zavádíme podle [2], kap. II, § 1; připomeňme pouze, že definujeme navíc $0 \,.\, \pm\infty = \pm\infty \,.\, 0 = 0$.

Buď X nějaká množina, $V(x)$ výrok týkající se elementů množiny X. Symbolem $\{x \in X, V(x)\}$ značme množinu těch $x \in X$, pro něž platí výrok $V(x)$. Pod pojmem funkce na množině X rozumíme vždy zobrazení množiny X do E_1^*. Pro každou $M \subset X$ buď χ_M charakteristická funkce množiny M.

Součet zobecněné řady zavádíme podle [2], kap. III, § 6.

0.2. Neprázdný systém $\mathscr{S}$ podmnožin množiny X nazveme (množinovým) σ-okruhem, jestliže

1. $A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A - B \in \mathscr{S}$,
2. $A_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$.

Lehko se zjistí, že vždy $\emptyset \in \mathscr{S}$ a jsou-li $A_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$.

Množinovou funkcí rozumíme funkci, jejíž definiční obor tvoří nějaký systém množin. Mírou μ rozumíme takovou nezápornou množinovou funkci, že

1. definičním oborem μ je nějaký σ-okruh $\mathscr{S}$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. μ je σ-aditivní na $\mathscr{S}$, tj. jsou-li $A_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ disjunktní množiny, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Buď X neprázdná množina, $\mathscr{S}$ σ-okruh podmnožin množiny X takový, že $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A = X$. Potom dvojici $(X, \mathscr{S})$ nazveme měřitelným prostorem. Množinu $E \subset X$ nazveme měřitelnou, právě když $E \in \mathscr{S}$. Pro každou funkci f na X položme $N_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$. Funkci f nazveme $\mathscr{S}$-měřitelnou, jestliže

1. $\{x \in X, f(x) = +\infty\} \in \mathscr{S}$,

2. pro každé $c \in E_1$ je $N_f \cap \{x \in X, f(x) < c\} \in \mathscr{S}$.

Je-li $E \subset X$, potom vztah $E \in \mathscr{S}$ platí právě tehdy, když funkce χ_E je $\mathscr{S}$-měřitelná.

Trojici $(X, \mathscr{S}, \mu)$ nazveme prostorem s mírou, jestliže $(X, \mathscr{S})$ je měřitelný prostor a μ je míra na $\mathscr{S}$.

0.3. Buď dán prostor s mírou $(X, \mathscr{S}, \mu)$. $V(x)$ buď výrok týkající se prvků množiny X. Řekneme, že $V(x)$ platí skoro všude (v X), jestliže $M = \{x \in X, V(x) \text{ neplatí}\} \in \mathscr{S}$ a $\mu(M) = 0$.

0.4. Funkci f definovanou na X nazveme jednoduchou, je-li $\mathscr{S}$ – měřitelná, konečná a množina $f(X)$ je také konečná. Nechť f nabývá hodnot $y_1, \ldots, y_n$. Potom f je jednoduchá, právě když $A_i = \{x \in X, f(x) = y_i\} \in \mathscr{S}$, pokud $y_i \neq 0$. Zřejmě $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i}$. Buď f $\mathscr{S}$-měřitelná nezáporná funkce. Potom existuje posloupnost f_n jednoduchých nezáporných funkcí taková, že $f_n \nearrow f$ a $N_{f_n} \subset N_f$.

0.5. Poznámka. Jednoduché důkazy, které může provést sám čtenář, budeme v dalším zpravidla vynechávat.

1. SYSTÉMY Z A $\hat{Z}$

1.1. Definice. Definujme systém $\hat{Z}$ takto: Funkce f patří do $\hat{Z}$, právě když existují reálná čísla $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n < +\infty$ a čísla $0 \leqq a_n \leqq a_{n-1} \leqq \ldots \leqq a_1 \leqq \leqq +\infty$ taková, že $f(x) = 0$ pro $x > y_n$, $f(x) = a_{i+1}$ pro $x \in (y_i, y_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Funkce ze systému $\hat{Z}$ jsou tedy definovány na intervalu $(0, +\infty)$. Systém Z buď množina všech nerostoucích nezáporných funkcí na intervalu $(0, +\infty)$. Zřejmě $\hat{Z} \subset Z$.

1.2. *Buďte $f \in Z$, $g \in Z$, $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, buď $c > 0$ reálné. Potom funkce $f + g$, $c \, . f$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ patří do Z. Jsou-li $f \in \hat{Z}$, $g \in \hat{Z}$, je i $f + g \in \hat{Z}$, $c \, . f \in \hat{Z}$.*

1.3. *Funkce f patří do Z, právě když existují $f_n \in \hat{Z}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \nearrow f$.*

Důkaz. Jsou-li $f_n \in \hat{Z}$, $f_n \nearrow f$, je podle 1.2. $f \in Z$. Buď $f \in Z$. Označme M_f množinu bodů nespojitosti funkce f na intervalu $(0, +\infty)$. M_f je nejvýše spočetná; nechť

$M_f = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ nechť P_k je množina všech čísel tvaru $n + j \,.\, 2^{-k}$, kde $n = 0, 1, \ldots, k - 1$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k$. Buď $Q_k = P_k \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\}$. Prvky množiny Q_k uspořádejme přirozeným způsobem podle velikosti, nechť $Q_k = \{y_0^k = 0 < y_1^k < \ldots < y_{s_k}^k < +\infty\}$. Definujme nyní funkce f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ takto: $f_k(x) = 0$ pro $x > y_{s_k}^k$, $f_k(x) = f(y_i^k)$ pro $x \in (y_{i-1}^k, y_i^k\rangle$, kde $i = 1, \ldots, s_k$. Zřejmě $f_k \in \hat{Z}$, $f_k \leqq f_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Je-li nyní $x_0 \in M_f$, tj. $x_0 = a_N$ pro vhodné N, je $f_n(x_0) = f(x_0)$ pro $n \geqq N$. Je-li $x_0 \in (0, +\infty) - M_f$, $n > x_0$, zvolme i_n tak, že $x_0 \in (y_{i_n-1}^n, y_{i_n}^n\rangle$. Potom $f_n(x_0) = f(y_{i_n}^n) \to f(x_0)$ $(n \to +\infty)$.

2. FUNKCIONÁL A NA SYSTÉMU Z

2.1. Axiomy. Na systému Z definujme funkcionál A těmito axiomy:

(I) Jsou-li $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \nearrow f$, potom $\lim_{n\to\infty} Af_n = Af$.

(II) Pro $z > 0$ buď $A_{\chi(0,z\rangle} = z$.

(III) Jsou-li $f \in \hat{Z}$, $g \in \hat{Z}$, potom $A(f + g) = Af + Ag$.

Poznamenejme, že funkcionál A může nabývat i nekonečných hodnot. V dalším dokážeme existenci funkcionálu A s vlastnostmi (I)–(III) a jeho jednoznačnost.

2.2. *Buďte $f_n \in Z$ $(n = 1, \ldots, k)$. Potom $A(\sum_{n=1}^{k} f_n) = \sum_{n=1}^{k} Af_n$.*

D ů k a z. Tvrzení platí podle (III) pro funkce ze systému $\hat{Z}$. Pro libovolné funkce ze Z dokážeme tvrzení pomocí 1.3 a axiomu (I).

2.3. *Buď $c > 0$, $f \in Z$. Potom $A(c \,.\, f) = c \,.\, Af$.*

D ů k a z. Pro přirozené c, a tedy i pro racionální c plyne tvrzení z 2.2. Pro libovolné $c > 0$ plyne tvrzení podle (I).

2.4. *Buď $f \in \hat{Z}$ konečná, tj. $f(x) = a_{i+1}$ pro $x \in (y_i, y_{i+1}\rangle$, kde $i = 0, \ldots, n - 1$, $0 \leqq a_n \leqq \ldots \leqq a_1 < +\infty$, $f(x) = 0$ pro $x > y_n$. Položme ještě $a_{n+1} = 0$. Potom $Af = \sum_{k=1}^{n} a_k \,.\, (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \,.\, (a_k - a_{k+1})$.*

D ů k a z. Jelikož $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) \,.\, \chi_{(0,y_k\rangle}(x)$, dostáváme tvrzení použitím 2.2, 2.3 a axiomu (II).

2.5. *Buď $f \in \hat{Z}$ taková, že $f(x) = +\infty$ pro $x \in (0, y_1\rangle$, $f(x) = 0$ pro $x > y_1$. Potom $Af = +\infty$.*

D ů k a z. Položme $h_k(x) = k \,.\, \chi_{(0,y_1\rangle}(x)$. Zřejmě $h_k \nearrow f$. Tedy podle (I) a (II) je $Af = \lim_{k\to\infty} Ah_k = \lim_{k\to\infty} k \,.\, y_1 = +\infty$.

2.6. *Věta 2.4 platí i pro $a_1 = +\infty$, $a_2 < +\infty$.*

Důkaz. Můžeme psát $f = h + g$, kde $h(x) = +\infty$ pro $x \in (0, y_1\rangle$, $h(x) = 0$ pro $x > y_1$, $g(x) = 0$ pro $x > y_n$, $g(x) = a_2 + 1$ pro $x \in (0, y_1\rangle$, $g(x) = a_{i+1}$ pro $x \in (y_i, y_{i+1}\rangle$, $i = 2, \ldots, n - 1$. Potom $Af = Ah = +\infty$.

2.7. *Nechť $0 < b < +\infty$, $a > 0$. Nechť $f(x) = a$ pro $x \in (0, b)$, $f(x) = 0$ pro $x \in \langle b, +\infty)$. Potom $Af = a \,.\, b$.*

Důkaz. Definujme funkce f_k na intervalu $(0, +\infty)$ takto: je-li $1/k \geqq b$, položme $f_k = 0$; je-li $1/k < b$, položme $f_k(x) = a$ pro $x \in (0, b - 1/k\rangle$, $f_k(x) = 0$ pro $x > b - 1/k$. Tedy $f_k \in \hat{Z}$, $f_k \nearrow f$ a pro dostatečně velká k je $Af_k = a \,.\, (b - 1/k)$. Odtud podle (I) plyne tvrzení.

2.8. Věta *Existuje-li funkcionál A na systému Z splňující axiomy* (I)–(III), *je jednoznačně určen.*

Důkaz. Nechť A, A^* jsou dva takové funkcionály na systému Z. Je-li $f \in \hat{Z}$, je podle 2.4 a 2.6 $Af = A^*f$. Je-li $f \in Z$, pak existují $f_n \in \hat{Z}$ takové, že $f_n \nearrow f$. Potom $Af = \lim_{n\to\infty} Af_n = \lim_{n\to\infty} A^*f_n = A^*f$.

3. TVAR FUNKCIONÁLU A NA SYSTÉMU Z

3.1. Definice. Soustavu intervalů $\{I\}$ nazveme dělením D daného intervalu $J \subset E_1$, jestliže:

1. intervaly I jsou uzavřené, $0 < \mathrm{d}(I) < +\infty$, kde $\mathrm{d}(I)$ značí délku intervalu I,
2. intervaly I se nepřekrývají, $\bigcup_{I \in D} I = J$,
3. krajní body intervalů I (tzv. dělicí body dělení D) nemají v intervalu J hromadný bod.

D a D' buďte dvě dělení intervalu J. Dělení D' nazveme zjemněním dělení D, jestliže každý dělicí bod dělení D je i dělicím bodem dělení D'. Je-li I uzavřený interval, označme a_I, resp. b_I jeho levý, resp. pravý koncový bod. Buď $f \in Z$ a buď D dělení intervalu $(0, +\infty)$. Označme $S(f, D) = \sum_{I \in D} \mathrm{d}(I) \,.\, f(a_I)$, $s(f, D) = \sum_{I \in D} \mathrm{d}(I) \,.\, f(b_I)$.

3.2. Poznámky. 1. Intervalů I je nejvýše spočetně mnoho, takže existuje $\sum_{I \in D}$ ve smyslu zobecněné řady.

2. Označme $\nu(D) = \sup_{I \in D} \mathrm{d}(I)$ (tzv. norma dělení D). Potom ke každému číslu $\delta > 0$ existuje dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$.

3. Je-li D' zjemnění D a je-li I libovolný interval dělení D, pak existují intervaly $I_1, \ldots, I_k$ dělení D' takové, že $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$.

4. Ke každým dvěma dělením D_1 a D_2 existuje dělení D, které je jejich společným zjemněním.

3.3. Buďte D, D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $(0, +\infty)$, buď D' zjemnění D, buď $f \in Z$. Potom:

1. $s(f, D) \leqq S(f, D)$,
2. $S(f, D) \geqq S(f, D')$,
3. $s(f, D) \leqq s(f, D')$,
4. $s(f, D_1) \leqq S(f, D_2)$.

3.4. Definice. Definujme funkcionály B a C na systému Z takto: $Bf = \inf_D S(f, D)$, $Cf = \sup_D s(f, D)$, kde D probíhá všechna dělení intervalu $(0, +\infty)$.

Poznámka. Ze 3.3 plyne, že $Cf \leqq Bf$ pro každou funkci $f \in Z$.

3.5. *Buď $x_0 \in (0, +\infty)$, $f \in Z$, $f(x_0) = +\infty$. Potom $Cf = Bf = +\infty$.*

Důkaz. Vezměme takové dělení D intervalu $(0, +\infty)$, že existuje $I \in D$ a $I \subset (0, x_0\rangle$. Potom je $s(f, D) = +\infty$, tedy $Cf = +\infty$ a ze vztahu $Cf \leqq Bf$ plyne tvrzení.

3.6. Věta. *Buď $f \in Z$. Potom $Cf = Bf$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že funkce f je na intervalu $(0, +\infty)$ konečná. Je-li $Cf = +\infty$, jsme hotovi. Nechť tedy $Cf < +\infty$. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a libovolné dělení D intervalu $(0, +\infty)$, nechť $D = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Každý interval I_n rozdělme na intervaly I_n^i, $i = 1, \ldots, k_n$ tak, aby

$$(f(a_{I_n}) - f(b_{I_n})) \max_{i=1,\ldots,k_n} \mathrm{d}(I_n^i) < \varepsilon 2^{-n}.$$

Tím získáme nové dělení D' intervalu $(0, +\infty)$, které je zjemněním D. Platí:

$$0 \leqq Bf - Cf \leqq S(f, D') - s(f, D') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} [\mathrm{d}(I_n^i) f(a_{I_n^i})] -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} [\mathrm{d}(I_n^i) f(b_{I_n^i})] \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{i=1,\ldots,k_n} \mathrm{d}(I_n^i) (f(a_{I_n}) - f(b_{I_n})) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon .$$

Z libovolné volby čísla ε plyne naše tvrzení.

3.7. Věta. *Nechť $f, g \in Z$ a nechť množina $\{x \in (0, +\infty);\ f(x) = g(x)\}$ je hustá v $(0, +\infty)$. Potom $Bf = Bg$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že f, g jsou konečné funkce. Buď D libovolné dělení intervalu $(0, +\infty)$, $D = \{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, buď $\varepsilon > 0$. Existují taková $c_n \in (a_n, b_n)$, že $f(c_n) = g(c_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a že $\sum_{n=1}^{\infty} (g(a_n) - f(a_n)) (c_n - a_n) < \varepsilon$. Buď D_1 dělení, jehož prvky jsou intervaly $\langle a_n, c_n\rangle$ a $\langle c_n, b_n\rangle$. Je $Bg \leqq S(g, D_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (g(a_n)(c_n - a_n) + g(c_n)(b_n - c_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(a_n)(c_n - a_n) + f(c_n)(b_n - c_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} (g(a_n) - f(a_n)) \cdot (c_n - a_n) \leqq S(f, D_1) + \varepsilon \leqq S(f, D) + \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že $Bg \leqq Bf$. Stejně se dokáže obrácená nerovnost.

3.8. Definice. Na systému Z definujme nyní funkcionál A^* takto: je-li $f \in Z$, položme $A^*f = Cf = Bf$. Ukážeme, že funkcionál A^* splňuje axiomy (I)–(III) definice 2.1.

3.9. Věta. *Jsou-li $f \in Z$, $g \in Z$, $f \leqq g$, potom $A^*f \leqq A^*g$.*

3.10. Věta. *Funkcionál A^* splňuje axiom* (I).

Důkaz. Buďte $f_n \in Z$, $f_n \nearrow f$. Ze vztahu $f_n \leqq f_{n+1} \leqq f$ plyne podle předešlé věty $A^*f_n \leqq A^*f_{n+1} \leqq A^*f$. Existuje tedy $\lim_{n\to\infty} A^*f_n \leqq A^*f$. Vezměme libovolné číslo $K < A^*f$. Podle definice funkcionálu A^* existuje takové dělení $D = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $(0, +\infty)$, že $s(f, D) > K$. Odtud plyne existence takového $N \geqq 1$, že $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{d}(I_n) f(b_{I_n}) > K$. Jelikož $f_n \nearrow f$, existuje dále $k_0 \geqq 1$ tak, že $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{d}(I_n) f_{k_0}(b_{I_n}) > K$. Tedy $A^*f_{k_0} \geqq s(f_{k_0}, D) \geqq K$, což jsme chtěli dokázat.

3.11. Věta. *Funkcionál A^* splňuje axiom* (II).

Důkaz. Buď D libovolné dělení intervalu $(0, +\infty)$, buď $f_z = \chi_{(0,z\rangle}$, $z \in (0, +\infty)$. Označme $M = \{I \in D,\ I \subset (0, z\rangle\}$, $N = M \cup \{I \in D,\ z \in I\}$. Je tedy $s(f_z, D) = \sum_{I\in M} \mathrm{d}(I) \leqq z$, $S(f_z, D) = \sum_{I\in N} \mathrm{d}(I) \geqq z$. Odtud lehko plyne, že $Cf_z \leqq z \leqq Bf_z$, tedy $A^*f_z = z$.

3.12. Věta. *Funkcionál A^* splňuje axiom* (III).

Důkaz. Buďte $f \in Z$, $g \in Z$, D buď libovolné dělení intervalu $(0, +\infty)$. Lehko se zjistí, že $S(f + g, D) = S(f, D) + S(g, D)$, $s(f + g, D) = s(f, D) + s(g, D)$; odtud plyne tvrzení.

3.13. *Existuje právě jeden funkcionál na systému Z splňující axiomy* (I)–(III).

4. DALŠÍ VLASTNOSTI FUNKCIONÁLU A

Z předešlé věty víme, že existuje právě jeden funkcionál na systému Z splňující axiomy (I)–(III). Podržme se původního označení a značme tento funkcionál písmenem A. V tomto odstavci odvodíme jeho další vlastnosti.

4.1. Věta. *Buďte $f_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \searrow f$, nechť existuje n_0 tak, že $Af_{n_0} < +\infty$. Potom $\lim_{n\to\infty} Af_n = Af$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $n_0 = 1$. Ze vztahu $f_n \geqq f_{n+1} \geqq f$ plyne, že existuje $\lim_{n\to\infty} Af_n \geqq Af$. Zvolme nyní libovolné $K > Af$. Existuje takové dělení D_1 intervalu $(0, +\infty)$, že $S(f, D_1) < K$ a takové dělení D_2 intervalu $(0, +\infty)$, že $S(f_1, D_2) < +\infty$. Buď D společné zjemnění D_1 a D_2. Jest $S(f, D) \leqq S(f, D_1) < K$ a pro $n = 1, 2, \ldots$ $S(f_n, D) \leqq S(f_1, D) \leqq S(f_1, D_2) < +\infty$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje tedy konečná podsoustava intervalů $T \subset D$ taková, že platí

$$\sum_{I\in D-T} d(I) f_n(a_I) \leqq \sum_{I\in D-T} d(I) f_1(a_I) < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

a samozřejmě $\sum_{I\in T} d(I) f(a_I) \leqq \sum_{I\in D} d(I) f(a_I) < K$. Ze vztahu $f_n \searrow f$ plyne existence takového n_0, že $\sum_{I\in T} d(I) f_{n_0}(a_I) < K$. Tedy $Af_{n_0} \leqq S(f_{n_0}, D) = \sum_{I\in T} d(I) f_{n_0}(a_I) + \sum_{I\in D-T} d(I) f_{n_0}(a_I) < K + \varepsilon$. Z libovolné volby čísla ε plyne naše tvrzení.

4.2. Věta. *Buď $f \in Z$, $c > 0$. Označme f^c funkci definovanou na intervalu $(0, +\infty)$ vztahem $f^c(x) = f(cx)$. Potom $f^c \in Z$, $Af^c = c^{-1}Af$.*

Důkaz. Zřejmě $f^c \in Z$. Buď D libovolné dělení intervalu $(0, +\infty)$, nechť $D = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Potom systém intervalů $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, $J_k = \langle c^{-1}a_k, c^{-1}b_k \rangle$ tvoří dělení D' intervalu $(0, +\infty)$ a platí $S(f, D) = cS(f^c, D') \geqq cAf^c$. Odtud $Af \geqq cAf^c$ pro každé $c > 0$. Protože $f = (f^c)^{c^{-1}}$, je také $Af^c \geqq c^{-1}Af$, což dokazuje tvrzení.

4.3. *Buď $f \in Z$, potom $Af \geqq 0$. Je-li f_0 funkce identicky rovná nule na intervalu $(0, +\infty)$, je $Af_0 = 0$.*

4.4. *Věta 2.3 platí i pro $c = 0$.*

4.5. Shrnutí. Existuje právě jeden funkcionál A na systému Z splňující axiomy (I)–(III), jeho tvar je dán definicemi 3.4 a 3.8 a platí následující tvrzení:

1. $f \in Z \Rightarrow Af \geqq 0$,
2. $f \in Z, g \in Z \Rightarrow A(f + g) = Af + Ag$,
3. $f \in Z, c \geqq 0 \Rightarrow A(cf) = cAf$,
4. $f_n \in Z, f_n \nearrow f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Af_n = Af$,
5. $f_n \in Z, f_n \searrow f$, existuje n_0 tak, že $Af_{n_0} < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Af_n = Af$,
6. $f \in Z, g \in Z, f \leqq g \Rightarrow Af \leqq Ag$,
7. $f \in Z, f(x_0) = +\infty$ pro nějaké $x_0 \in (0, +\infty) \Rightarrow Af = +\infty$,
8. je-li $f \in \hat{Z}$ konečná, je $Af = \sum_{k=1}^{n} a_k(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} y_k(a_k - a_{k+1})$, kde čísla $a_1, \ldots, a_{n+1}, y_0, \ldots, y_n$ mají týž význam jako v 2.4.
9. $Af_0 = 0$, kde f_0 je funkce rovná 0 na $(0, +\infty)$,
10. $f \in Z, c > 0, f^c(x) = f(cx) \Rightarrow cAf^c = Af$.

V kapitolách 5, 6, 7 předpokládejme, že $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je pevně daný prostor s mírou, $\mathscr{F}$ nechť značí množinu všech $\mathscr{S}$-měřitelných funkcí na X, $\mathscr{F}^+$ pak množinu všech nezáporných $\mathscr{S}$-měřitelných funkcí na X.

5.1. Definice. Buď $f \in \mathscr{F}^+$, $x > 0$. Označme $E_f^x = \{y \in X, f(y) > x\}$, tedy $E_f^x \in \mathscr{S}$. Každé funkci $f \in \mathscr{F}^+$ přiřaďme reálnou funkci h_f definovanou na intervalu $(0, +\infty)$ předpisem $h_f(x) = \mu(E_f^x)$. Zřejmě $h_f \in Z$. Existuje tedy Ah_f a položme $Lf = Ah_f$. Pro libovolnou funkci $f \in \mathscr{F}$ položme $Lf = Lf^+ - Lf^-$, má-li rozdíl vpravo smysl. Funkcionál L nazveme Lebesgueovým integrálem.[1]) Označme dále

$$\mathscr{L}^r = \{f \in \mathscr{F},\ \text{existuje } Lf \text{ a } Lf > -\infty\},$$
$$\mathscr{L}^k = \{f \in \mathscr{F},\ \text{existuje } Lf \text{ a } Lf < +\infty\},$$
$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}^r \cup \mathscr{L}^k,\ \mathscr{L}^0 = \mathscr{L}^r \cap \mathscr{L}^k.$$

5.2. a) *Je-li $f \in \mathscr{F}$, je $|f| \in \mathscr{L}^*$.*

b) *Je-li $f \in \mathscr{L}^0$, je $f^+ \in \mathscr{L}^0$, $f^- \in \mathscr{L}^0$.*

5.3. *Buď $f \in \mathscr{L}^*$, $g \in \mathscr{F}$, nechť $f = g$ skoro všude. Potom $g \in \mathscr{L}^*$ a $Lg = Lf$.*

5.4. Poznámka. Umluvíme se, že budeme psát $f \in \mathscr{F}$, $f \in \mathscr{L}^*, \ldots$ i tehdy, je-li funkce f definována jen skoro všude v X. Korektnost této úmluvy plyne z předešlé věty. Rovněž v důkazech mnohých vět můžeme předpokládat, je-li např. $f = g$ skoro všude, že $f = g$ všude v X, je-li $f \geqq 0$ sk. vš., že $f \geqq 0$ všude atd.

5.5. a) *Je-li $f \in \mathscr{F}$, $f = 0$ sk. vš., je $Lf = 0$.*

b) *Je-li $f \in \mathscr{F}^+$, je $Lf \geqq 0$, speciálně tedy $\mathscr{F}^+ \subset \mathscr{L}^r$.*

c) *Je-li $f \in \mathscr{L}^*$, je $-f \in \mathscr{L}^*$ a $L(-f) = -Lf$.*

5.6. *Buď $f \in \mathscr{L}^*$, $c \in E_1$. Potom $cf \in \mathscr{L}^*$ a $L(cf) = cLf$.*

Důkaz. Je-li $f \in \mathscr{F}^+$, $c > 0$, je $cf \in \mathscr{F}^+$ a podle věty 4.2 je $L(cf) = cLf$. Buď tedy $f \in \mathscr{L}^*$ libovolná. Je-li $c = 0$, je rovnost zřejmá podle 5.5. Je-li $c > 0$, plyne tvrzení ze vztahu $cf = cf^+ - cf^-$. Je-li $c < 0$, plyne tvrzení z 5.5 c) použitím předchozího.

5.7. *Buďte $f \in \mathscr{L}^*$, $g \in \mathscr{L}^*$, $f \leqq g$ sk. vš. Potom $Lf \leqq Lg$.*

Důkaz. Pro funkce $f \in \mathscr{F}^+$, $g \in \mathscr{F}^+$, $f \leqq g$ je $h_f \leqq h_g$, tedy $Lf = Ah_f \leqq Ah_g = Lg$. V obecném případě je $f^+ \leqq g^+$, $f^- \geqq g^-$, odkud podle první části plyne tvrzení.

---

[1]) Podobná definice Lebesgueova integrálu pro případ, že X je interval $\langle 0, 1 \rangle$, je uvedena v práci [3].

5.8. *Buď f jednoduchá funkce, tj.* $f = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ *pro* $j \neq k$. *Potom* $Lf = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(A_k)$, *má-li tento součet smysl.*

Důkaz. Buď předně $f \geqq 0$, nechť $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Položme ještě $y_0 = 0$. Můžeme tedy psát $h_f = \sum_{k=1}^{n} f_k$, kde funkce $f_k \in Z$ $(k = 1, \ldots, n)$ jsou definovány takto:

$$f_k(x) = \mu(A_k) \text{ pro } x \in (0, y_k), \quad f_k(x) = 0 \text{ pro } x \geqq y_k .$$

Tedy $Lf = Ah_f = \sum_{k=1}^{n} Af_k = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(A_k)$. Buď nyní f libovolná, nechť $f(X) = \{y_{-k} < \ldots < y_{-1} < y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_n\}$. Nechť $A_i = \{x \in X, f(x) = y_i\}$. Potom $Lf = Lf^+ - Lf^- = \sum_{\substack{i=-k \\ i \neq 0}}^{n} y_i\, \mu(A_i)$, pokud má tento součet smysl.

5.9. *Buď* $f \in \mathscr{F}^+$, $c > 0$. *Potom* $Lf \geqq c\ h_f(c)$.

Důkaz. Označíme-li $M = E_f^c$, je $f \geqq c\chi_M$. Tedy $Lf \geqq L(c\chi_M) = c\mu(M) = c\ h_f(c)$.

5.10. *Buď* $f \in \mathscr{F}^+$, $Lf = 0$. *Potom* $f = 0$ *sk. vš.*

Důkaz. Použitím předchozí věty dostáváme $0 \leqq \mu\{y \in X, f(y) > 0\} = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in X, f(y) > n^{-1}\}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{y \in X, f(y) > n^{-1}\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} nLf = 0$.

5.11. a) $f \in \mathscr{L}^k \Rightarrow \mu\{y \in X, f(y) + \infty\} = 0$,

b) $f \in \mathscr{L}^r \Rightarrow \mu\{y \in X, f(y) = -\infty\} = 0$,

c) $f \in \mathscr{L}^0 \Rightarrow \mu\{y \in X, |f(y)| = +\infty\} = 0$.

Důkaz. Dokažme první tvrzení. Buď $f \geqq 0$. Pro každé n přirozené jest $\{y \in X, f(y) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_f^n \subset E_f^n$. Použitím 5.9 dostáváme, že pro libovolné přirozené n platí $0 \leqq \mu\{y \in X, f(y) = +\infty\} \leqq \mu(E_f^n) \leqq n^{-1}Lf$, odkud plyne, že $\mu\{y \in X, f(y) = +\infty\} = 0$. Je-li nyní $f \in \mathscr{L}^k$ libovolná, je $f^+ \in \mathscr{L}^0$ a tvrzení plyne z rovnosti $\{y \in X, f(y) = +\infty\} = \{y \in X, f^+(y) = +\infty\}$.

5.12. a) *Je-li* $f \in L^*$, *je* $|Lf| \leqq L|f|$.

b) $f \in \mathscr{L}^0 \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^0$.

c) *Buď* $f \in \mathscr{F}$, $g \in \mathscr{L}^0$, $|f| \leqq g$ *sk. vš. Potom* $f \in \mathscr{L}^0$.

6. INTEGRACE POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

6.1. Lemma. a) *Buďte* $f_n \in \mathscr{L}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \geqq 0$, $f_n \nearrow f$. *Potom* $f \in \mathscr{L}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

b) *Buďte* $f_n \in \mathscr{L}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \geqq 0$, $f_n \searrow f$, *nechť existuje* n_0 *tak, že* $Lf_{n_0} < < +\infty$. *Potom* $f \in \mathscr{L}^0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

Důkaz. a) Jest $f \in \mathscr{F}^+$ a lehko se zjistí, že $h_{f_n} \nearrow h_f$. Odtud podle axiomu (I) plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ah_{f_n} = Ah_f = Lf$.

b) Pro každé $g \in \mathscr{F}^+$ a každé $x \in (0, +\infty)$ položme $h_g^*(x) = \mu\{y \in X, g(y) \geqq x\}$. Zřejmě $h_g^* \in Z$. Množina $\{x \in (0, +\infty), h_g^*(x) \neq h_g(x)\}$ je spočetná; podle 3.7 je tedy $Lg = Ah_g = Ah_g^*$. Snadno se zjistí, že $h_{f_n}^* \searrow h_f^*$ a podle 4.1 je $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

6.2. Věta. a) *Buďte* $f_n \in \mathscr{L}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \nearrow f$ *sk. vš., nechť existuje* n_0 *tak, že* $f_{n_0} \in \mathscr{L}^r$. *Potom* $f \in \mathscr{L}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

b) *Buďte* $f_n \in \mathscr{L}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \searrow f$ *sk. vš., nechť existuje* n_0 *tak, že* $f_{n_0} \in \mathscr{L}^k$. *Potom* $f \in \mathscr{L}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

Důkaz. Dokažme první část tvrzení. Podle 5.2 je $f_n^+ \in \mathscr{L}^*$. Protože $f_n^+ \nearrow f^+$, je $f^+ \in \mathscr{L}^*$ a podle předešlého lemmatu $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n^+ = Lf^+$. Opět podle 5.2 je $f_n^- \in \mathscr{L}^*$, $f_n^- \searrow f^-$ a $Lf_{n_0}^- < +\infty$. Použitím druhé části předchozího lemmatu dostáváme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n^- = Lf^-$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = \lim\limits_{n\to\infty} Lf_n^+ - \lim\limits_{n\to\infty} Lf_n^- = Lf^+ - Lf^-$ a tento rozdíl má smysl, neboť Lf^- je konečné.

6.3. Věta. *Buďte* $f_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $g \in \mathscr{L}^0$, *pro všechna* n *buď* $|f_n| \leqq g$ *sk. vš.*, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *sk. vš. Potom* $f \in \mathscr{L}^0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} Lf_n = Lf$.

Důkaz. Ze vztahu $|f_n| \leqq g$ plyne $|f| \leqq g$, tedy podle 5.12 $f, f_n \in \mathscr{L}^0$. Položme $h_n = \sup\limits_{k\geqq n} f_k$, $g_n = \inf\limits_{k\geqq n} f_k$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom $h_n \in \mathscr{F}$, $g_n \in \mathscr{F}$ a ze vztahů $-g \leqq \leqq g_n \leqq f_n \leqq h_n \leqq g$ plyne opět $h_n \in \mathscr{L}^0$, $g_n \in \mathscr{L}^0$. Jest $h_n \searrow h = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $g_n \nearrow g^* = = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, $f = h = g^*$ sk. vš. a použitím věty 6.2 dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} Lh_n = Lh = = Lf = Lg^* = \lim\limits_{n\to\infty} Lg_n$. Ze vztahů $Lg_n \leqq Lf_n \leqq Lh_n$ pak plyne naše tvrzení.

7.1. Věta. *Buďte $f \in \mathscr{L}^*$, $g \in \mathscr{L}^*$, nechť má smysl součet $Lf + Lg$. Pak má skoro všude smysl součet $f + g$, je $f + g \in \mathscr{L}^*$ a $L(f + g) = Lf + Lg$.*

Důkaz. Z existence součtu $Lf + Lg$ plyne, že je buďto $f \in \mathscr{L}^r$, $g \in \mathscr{L}^r$ nebo $f \in \mathscr{L}^k$, $g \in \mathscr{L}^k$. V prvním případě je $f > -\infty$ sk. vš., $g > -\infty$ sk. vš., má tedy smysl součet $f + g$ sk. vš. Obdobně v druhém případě. Pozměňme funkce f a g tak, aby jejich součet měl smysl všude.

1. Jsou-li f a g jednoduché funkce, je $f + g$ jednoduchá funkce a podle 5.8 lehko zjistíme, že $L(f + g) = Lf + Lg$.
2. Je-li $f \in \mathscr{F}^+$, $g \in \mathscr{F}^+$, plyne tvrzení z 0.4 a 6.1.
3. Pro libovolné funkce f, g splňující předpoklady naší věty, dokážeme přechodem ke kladným a záporným částem funkcí f a g.

7.2. Věta. *Buďte $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}^*$, buďte $c_1, \ldots, c_n$ reálná čísla, nechť má smysl $\sum_{k=1}^{n} L(c_k f_k)$. Potom má sk. vš. smysl součet $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$, je $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k \in \mathscr{L}^*$ a $L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, L(f_k)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z 5.6 a 7.1.

7.3. Věta. *Buďte $f_n \in \mathscr{F}^+$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathscr{L}^r$ o $Lf = \sum_{n=1}^{\infty} Lf_n$.*

Důkaz. Položme $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Podle předchozí věty je $g_n \in \mathscr{L}^r$ a $Lg_n = \sum_{k=1}^{n} Lf_k$. Zřejmě $g_n \nearrow f$, tedy podle 6.2 je $f \in \mathscr{L}^r$ a $\lim_{n\to\infty} Lg_n = Lf$, tj. $Lf = \sum_{n=1}^{\infty} Lf_n$.

7.4. Věta. *Buďte $f_n \in \mathscr{L}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, nechť $\sum_{n=1}^{\infty} L|f_n| < +\infty$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ konverguje absolutně sk. vš., $f \in \mathscr{L}^0$ a $Lf = \sum_{n=1}^{\infty} Lf_n$.*

Důkaz. Označme $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Podle věty 7.3 je $Lg = \sum_{n=1}^{\infty} L|f_n| < +\infty$. Podle 5.11 je g konečná sk. vš., tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně sk. vš. Položme dále $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Zřejmě $g_n \in \mathscr{L}^0$, $\lim_{n\to\infty} g_n = f$, $|g_n| \leqq g$ a podle 6.3 je $f \in \mathscr{L}^0$, $Lf = \lim_{n\to\infty} Lg_n = \sum_{n=1}^{\infty} Lf_n$.

7.5. Poznámka. Nyní bychom mohli definovat obvyklým způsobem Lebesgueův integrál přes podmnožiny prostoru X a odvodit jeho vlastnosti. Z výše dokázaných vět plynou také ostatní věty z teorie Lebesgueova integrálu (např. Fubiniova věta, věta o limitním přechodu za integračním znamením při stejně absolutně spojitých integrálech aj.), které je možno odvodit obvyklým způsobem; nebudeme je zde proto uvádět.

Literatura

[1] *П. Халмош:* Теория меры, Москва 1956.

[2] *V. Jarník:* Diferenciální počet II, Praha 1956.

[3] *A. Denjoy:* Sur les fonctions dérivées sommables, Bulletin de la Soc. Math. de France, *43* (1915), 161–248.

Adresa autora: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Резюме

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

ЯРОСЛАВ ЛУКЕШ (Jaroslav Lukeš), Прага

В первой части этой статьи введено понятие функционала A на классе Z, состоящем из всех неотрицательных, невозрастающих функций на $(0, +\infty)$. Функционал A определяется при помощи следующих аксиом:

(I) $Af = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n$, если $f_n \nearrow f (f_n \in Z)$.

(II) $A\chi_t = t$, где χ_t означает характеристическую функцию интервала $(0, t\rangle$.

(III) $A(f + g) = Af + Ag$ для любых ступенчатых функций (кусочно постоянных) из Z.

Показаны существование и единственность такого рода функционала A и выведены некоторые его свойства. Во второй части эти свойства использованы для введения интеграла Лебега в пространстве с мерой $(X, \mathscr{S}, \mu)$. Интеграл любой неотрицательной $\mathscr{S}$-измеримой функции определяется равенством $Lf = Ah_f$, где $h_f(t) = \mu\{x \in X, f(x) > t\}$. Для любой $\mathscr{S}$-измеримой функции интеграл определяется равенством $Lf = Lf^+ - Lf^-$ в случае, когда последняя разность определена; основные теоремы теории интеграла Лебега оказываются простыми следствами свойств функционала A.

THE LEBESGUE INTEGRAL

Jaroslav Lukeš, Praha

In the first part of the article a functional A on the class Z of all (possibly infinite) non-negative, non-increasing functions on $(0, \infty)$ is introduced by the following axioms:

(I) $Af = \lim_{n \to \infty} Af_n$ provided $f_n \nearrow f (f_n \in Z)$.

(II) $A\chi_t = t$, where χ_t is the characteristic function of $(0, t\rangle$.

(III) $A(f + g) = Af + Ag$ for any step-functions f, g (= finite linear combinations of characteristic functions of intervals) in Z.

Existence and uniqueness of such an A is established and some of its basic properties are derived. In the second part of the paper, these properties are used to introduce the Lebesgue integral on a measure space $(X, \mathscr{S}, \mu)$. The integral of a non-negative $\mathscr{S}$-measurable function f on X is defined by $Lf = Ah_f$, where $h_f(t) = \mu\{x \in X, f(x) > t\}$. For a general $\mathscr{S}$-measurable f the integral is defined, as usual, by $Lf = Lf^+ - Lf^-$ if the difference on the right hand side is well defined; fundamental theorems concerning the integral are shown to be simple consequences of the properties of A established in the first part of the paper.