Jaroslav Záhora

Dotykové nomogramy s kružnicemi

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 3, 308--319

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117568

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S KRUŽNICEMI

JAROSLAV ZÁHORA, Brno

(Došlo dne 3. července 1965)

1. ÚVOD

Dotykový nomogram rovnice

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

jako útvar duální k průsečíkovému nomogramu téže rovnice (1) se skládá ze tří systémů isoplét

$$f(\xi, \eta, x_1) = 0\,, \tag{2}$$

$$g(\xi, \eta, x_2) = 0\,, \tag{3}$$

$$h(\xi, \eta, x_3) = 0 \tag{4}$$

okótovaných postupně hodnotami x_1, x_2, x_3 a tak sestrojených, že trojice ${}^0x_1$, ${}^0x_2$, ${}^0x_3$ vyhovuje vztahu (1) právě tenkrát, existuje-li společná tečna tří křivek

$$f(\xi, \eta, {}^0x_1) = 0, \quad g(\xi, \eta, {}^0x_2) = 0, \quad h(\xi, \eta, {}^0x_3) = 0\,.$$

Jsou-li systémy isoplét (2), (3), (4) dány v bodových souřadnicích (ξ, η), lze získati rovnici (1) tímto postupem: Uvažujeme společnou tečnu křivek (2), (3), (4), která ať se dotýká křivky (2) v bodě $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, křivky (3) v bodě $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ a křivky (4) v bodě $({}^3\xi_0; {}^3\eta_0)$. Tato tečna má rovnice

$$\frac{\partial f({}^1\xi_0; {}^1\eta_0; x_1)}{\partial \xi}(\xi - {}^1\xi_0) + \frac{\partial f({}^1\xi_0; {}^1\eta_0; x_1)}{\partial \eta}(\eta - {}^1\eta_0) = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial g({}^2\xi_0; {}^2\eta_0; x_2)}{\partial \xi}(\xi - {}^2\xi_0) + \frac{\partial g({}^2\xi_0; {}^2\eta_0; x_2)}{\partial \eta}(\eta - {}^2\eta_0) = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial h({}^3\xi_0; {}^3\eta_0; x_3)}{\partial \xi}(\xi - {}^3\xi_0) + \frac{\partial h({}^3\xi_0; {}^3\eta_0; x_3)}{\partial \eta}(\eta - {}^3\eta_0) = 0\,. \tag{7}$$

Poněvadž rovnice (5) a (6) jsou rovnicemi téže přímky, existuje funkce k (proměnných x_1, x_2), $k \neq 0$ taková, že platí

(8)
$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = k \frac{\partial f}{\partial \xi}\,; \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = k \frac{\partial f}{\partial \eta}\,;$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}\,{}^2\xi_0 + \frac{\partial g}{\partial \eta}\,{}^2\eta_0 = k\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,{}^1\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,{}^1\eta_0\right).$$

Poněvadž rovnice (5) a (7) jsou rovnicemi téže přímky, existuje funkce m (proměnných x_1, x_3), $m \neq 0$ taková, že platí

(9)
$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = m \frac{\partial f}{\partial \xi}\,; \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = m \frac{\partial f}{\partial \eta}\,;$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi}\,{}^3\xi_0 + \frac{\partial h}{\partial \eta}\,{}^3\eta_0 = m\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,{}^1\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,{}^1\eta_0\right).$$

Poněvadž bod dotyku $({}^1\xi_0;\, {}^1\eta_0)$ leží na křivce (2), bod dotyku $({}^2\xi_0;\, {}^2\eta_0)$ leží na křivce (3) a bod dotyku $({}^3\xi_0;\, {}^3\eta_0)$ leží na křivce (4) platí

(10)
$$f({}^1\xi_0;\, {}^1\eta_0;\, x_1) = 0\,; \quad g({}^2\xi_0;\, {}^2\eta_0;\, x_2) = 0\,; \quad h({}^3\xi_0;\, {}^3\eta_0;\, x_3) = 0\,.$$

Soustavy (8), (9) a (10) představují 9 rovnic o 8 proměnných ${}^1\xi_0$, ${}^1\eta_0$, ${}^2\xi_0$, ${}^2\eta_0$, ${}^3\xi_0$, ${}^3\eta_0$, k, m. Eliminací těchto osmi proměnných z rovnic (8), (9) a (10) získáme rovnici (1), vztah mezi proměnnými x_1, x_2, x_3.

2. DOTYKOVÝ NOMOGRAM SE TŘEMI OBECNÝMI SOUSTAVAMI KRUŽNIC

2.1. Použijeme nyní postupu vyloženého v úvodu k odvození rovnice (1), kterou zobrazuje dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic

(2′)
$$(\xi - f_1)^2 + (\eta - g_1)^2 = h_1^2\,,$$

(3′)
$$(\xi - f_2)^2 + (\eta - g_2)^2 = h_2^2\,,$$

(4′)
$$(\xi - f_3)^2 + (\eta - g_3)^2 = h_3^2\,,$$

při čemž pro $i = 1, 2, 3$ jsou f_i, g_i, h_i funkcemi pouze proměnné x_i, $h_i \neq 0$. Rovnice vyskytující se v těchto výpočtech označíme stejnými čísly jako odpovídající rovnice v obecném postupu, označíme je však čárkovaně, např. (2′), (3′), ...

Společná tečna kružnic (2'), (3'), (4') se dotýká kružnice (2') v bodě $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, kružnice (3') v bodě $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ a kružnice (4') v bodě $({}^3\xi_0; {}^3\eta_0)$ a její rovnice jsou

$$(5') \qquad (\xi - f_1)({}^1\xi_0 - f_1) + (\eta - g_1)({}^1\eta_0 - g_1) = h_1^2,$$
$$(6') \qquad (\xi - f_2)({}^2\xi_0 - f_2) + (\eta - g_2)({}^2\eta_0 - g_2) = h_2^2,$$
$$(7') \qquad (\xi - f_3)({}^3\xi_0 - f_3) + (\eta - g_3)({}^3\eta_0 - g_3) = h_3^2.$$

Podmínku, že rovnice (5'), (6'), (7'), jsou rovnicemi téže přímky, vyjádříme takto:

$$(8') \qquad {}^2\xi_0 - f_2 = k({}^1\xi_0 - f_1)\,; \quad {}^2\eta_0 - g_2 = k({}^1\eta_0 - g_1)$$
$$h_2^2 + f_2({}^2\xi_0 - f_2) + g_2({}^2\eta_0 - g_2) = k[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]$$

$$(9') \qquad {}^3\xi_0 - f_3 = m({}^1\xi_0 - f_1)\,; \quad {}^3\eta_0 - g_3 = m({}^1\eta_0 - g_1)$$
$$h_3^2 + f_3({}^3\xi_0 - f_3) + g_3({}^3\eta_0 - g_3) = m[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]$$

Poněvadž body dotyku $({}^i\xi_0; {}^i\eta_0)$ pro $i = 1$ resp. 2 resp. 3 leží na kružnicích (2') resp. (3') resp. (4'), platí

$$(10') \qquad ({}^1\xi_0 - f_1)^2 + ({}^1\eta_0 - g_1)^2 = h_1^2,$$
$$({}^2\xi_0 - f_2)^2 + ({}^2\eta_0 - g_2)^2 = h_2^2,$$
$$({}^3\xi_0 - f_3)^2 + ({}^3\eta_0 - g_3)^2 = h_3^2.$$

Ze soustavy devíti rovnic (8'), (9'), (10') můžeme eliminovati proměnné ${}^1\xi_0 - f_1$; ${}^1\eta_0 - g_1$; ${}^2\xi_0 - f_2$; ${}^2\eta_0 - g_2$; ${}^3\xi_0 - f_3$; ${}^3\eta_0 - g_3$; k; m takto: Do rovnic (10') a do posledních rovnic soustav (8') a (9') dosadíme za ${}^2\xi_0 - f_2$, ${}^2\eta_0 - g_2$, ${}^3\xi_0 - f_3$, ${}^3\eta_0 - g_3$ výrazy z rovnic (8') a (9'). Tak dostaneme

$$(11) \qquad ({}^1\xi_0 - f_1)^2 + ({}^1\eta_0 - g_1)^2 = h_1^2,$$
$$k^2({}^1\xi_0 - f_1)^2 + k^2({}^1\eta_0 - g_1)^2 = h_2^2,$$
$$m^2({}^1\xi_0 - f_1)^2 + m^2({}^1\eta_0 - g_1)^2 = h_3^2,$$
$$h_2^2 + kf_2({}^1\xi_0 - f_1) + kg_2({}^1\eta_0 - g_1) = k[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)],$$
$$h_3^2 + mf_3({}^1\xi_0 - f_1) + mg_3({}^1\eta_0 - g_1) = m[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)].$$

Rovnice (11) obsahují již pouze 4 z původních 8 proměnných. Z prvních tří rovnic systému (11) vyplývá $h_1^2 = h_2^2/k^2 = h_3^2/m^2$ a z toho dále

$$(12) \qquad \frac{1}{k} = {}^1\varepsilon \frac{h_1}{h_2}\,; \quad \frac{1}{m} = {}^2\varepsilon \frac{h_1}{h_3}, \quad \text{kde} \quad {}^1\varepsilon = \pm 1;\ {}^2\varepsilon = \pm 1.$$

Upravíme-li poslední dvě rovnice systému (11) a dosadíme-li do nich za k a m výrazy z rovnic (12) získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $({}^1\xi_0 - f_1)$ a $({}^1\eta_0 - g_1)$

$$(13)\qquad \begin{aligned}({}^1\xi_0 - f_1)(f_2 - f_1) + ({}^1\eta_0 - g_1)(g_2 - g_1) &= h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2\,,\\ ({}^1\xi_0 - f_1)(f_3 - f_1) + ({}^1\eta_0 - g_1)(g_3 - g_1) &= h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3\,.\end{aligned}$$

Matice rozšířená soustavy (13) je

$$\begin{pmatrix} f_2 - f_1, & g_2 - g_1, & h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2 \\ f_3 - f_1, & g_3 - g_1, & h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3 \end{pmatrix}$$

a řešení této soustavy je

$$({}^1\xi_0 - f_1) = \frac{(h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2)(g_3 - g_1) - (h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3)(g_2 - g_1)}{(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)}\,,$$

$$({}^1\eta_0 - g_1) = \frac{(h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3)(f_2 - f_1) - (h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2)(f_3 - f_1)}{(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)}\,.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do první rovnice systému (11), obdržíme po úpravě hledaný vztah zobrazený dotykovým nomogramem se třemi obecnými soustavami kružnic.

$$(1')\qquad \begin{aligned}&[(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)(g_3 - g_1) - (h_1 - {}^2\varepsilon h_3)(g_2 - g_1)]^2 +\\ &+ [(h_1 - {}^2\varepsilon h_3)(f_2 - f_1) - (h_1 - {}^1\varepsilon h_2)(f_3 - f_1)]^2 =\\ &= [(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)]^2\,.\end{aligned}$$

Rovnici (1′) lze ještě poněkud upraviti. Roznásobíme-li dvojčleny vyskytující se v rovnici (1′), získáme

$$\begin{aligned}&(h_1 g_3 - {}^1\varepsilon h_2 g_3 + {}^1\varepsilon h_2 g_1 - h_1 g_2 + {}^2\varepsilon h_3 g_2 - {}^2\varepsilon h_3 g_1)^2 +\\ &+ (h_1 f_2 - {}^2\varepsilon h_3 f_2 + {}^2\varepsilon h_3 f_1 - h_1 f_3 + {}^1\varepsilon h_2 f_3 - {}^1\varepsilon h_2 f_1)^2 =\\ &= (f_2 g_3 - f_2 g_1 - f_1 g_3 - f_3 g_2 + f_3 g_1 + f_1 g_2)^2\end{aligned}$$

a dalšími úpravami

$$\begin{aligned}&[g_1({}^1\varepsilon h_2 - {}^2\varepsilon h_3) - g_2(h_1 - {}^2\varepsilon h_3) + g_3(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)]^2 +\\ &+ f_1({}^1\varepsilon h_2 - {}^2\varepsilon h_3) - f_2(h_1 - {}^2\varepsilon h_3) + f_3(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)]^2 =\\ &= [f_1(g_2 - g_3) - f_2(g_1 - g_3) + f_3(g_1 - g_2)]^2\,,\end{aligned}$$

neboli

$$(1'')\qquad \begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Podle předpokladu $h_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Rovnice (1′) a s ní ekvivalentní rovnice (1″) představuje tedy čtyři vztahy o proměnných x_1, x_2, x_3, lišící se pouze různou kombinací znamének u funkcí h_2, h_3. Můžeme totiž položiti buď ${}^1\varepsilon = +1$, ${}^2\varepsilon = +1$, nebo ${}^1\varepsilon = +1$, ${}^2\varepsilon = -1$, nebo ${}^1\varepsilon = -1$, ${}^2\varepsilon = +1$ nebo ${}^1\varepsilon = -1$, ${}^2\varepsilon = -1$. Máme tento výsledek:

Věta 2.1.1. *Dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic o zobrazovacích rovnicích* (2'), (3'), (4') *zobrazuje čtyři vztahy* (1'') *lišící se pouze různou kombinací hodnot* ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$.

2.2. V dalším ukážeme, které ze společných tečen kružnic (2'), (3'), (4') je třeba vzíti za indexy pro řešení konkrétního vztahu, který je jedním ze čtyř vztahů (1'').

Za tím účelem označme k_1 kružnici (2'), k_2 kružnici (3') a k_3 kružnici (4') a uvažujme o stejnolehlosti kružnic k_1 a k_2, ve které dotykovému bodu $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$ kružnice k_1 odpovídá dotykový bod $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ kružnice k_2. Podle známých vět z planimetrie je koeficient této stejnolehlosti roven $\pm|h_1|/|h_2|$, kde $|h_1|$ je poloměr kružnice k_1, $|h_2|$ je poloměr kružnice k_2 a znaménko $+(-)$ platí v tom případě, je-li spojnice bodů $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic k_1, k_2. Podle (12) jest $|h_1|/|h_2| = 1/|k|$. Dokažme ještě, že $1/k$ je koeficientem stejnolehlosti i co do znaménka.

V první dvojici rovnic (8') je buď ${}^1\xi_0 - f_1 \neq 0$ nebo ${}^1\eta_0 - g_1 \neq 0$. Kdyby totiž bylo ${}^1\xi_0 - f_1 = {}^1\eta_0 - g_1 = 0$, bylo by ${}^1\xi_0 = f_1$, ${}^1\eta_0 = g_1 \Rightarrow h_1 = 0$ proti předpokladu. Nechť např. ${}^1\xi_0 - f_1 \neq 0$, a tedy též ${}^2\xi_0 - f_2 \neq 0$. Jsou-li poloměry v odpovídajících bodech dotyku $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ stejně orientované, je uvažovaná společná tečna vnější společnou tečnou kružnic k_1, k_2. V tomto případě je $\operatorname{sgn}({}^1\xi_0 - f_1) = \operatorname{sgn}({}^2\xi_0 - f_2)$ a podle (8') $k > 0$, $1/k > 0$. Jsou-li poloměry v odpovídajících bodech dotyku opačně orientované, je společná tečna vnitřní společnou tečnou kružnic k_1, k_2 a je $\operatorname{sgn}({}^1\xi_0 - f_1) \neq \operatorname{sgn}({}^2\xi_0 - f_2)$ a podle (8') je $k < 0$, $1/k < 0$. Je tedy koeficient stejnolehlosti i co do znaménka roven $1/k$. Podobně lze ukázati, že $1/m$ je koeficient stejnolehlosti kružnic k_1, k_3. Máme tento výsledek:

Věta 2.2.1. *Platí-li pro dvojici* x_1, x_2 *nerovnost*

$$\frac{1}{k} = {}^1\varepsilon \frac{h_1(x_1)}{h_2(x_2)} > 0 \quad \left(\frac{1}{k} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv (2')$ *a* $k_2 \equiv (3')$ *kótovaných hodnotami* x_1, x_2.

Platí-li pro dvojici x_1, x_3 *nerovnost*

$$\frac{1}{m} = {}^2\varepsilon \frac{h_1(x_1)}{h_3(x_3)} > 0 \quad \left(\frac{1}{m} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv (2')$ *a* $k_3 \equiv (4')$, *kótovaných hodnotami* x_1, x_3.

Snadno lze také odvoditi, jakou polohu má společná tečna ke kružnicím (3′) a (4′) jsou-li znaménka koeficientů k a m známa. Stačí určiti, ve kterých polorovinách určených touto společnou tečnou leží středy kružnic (2′), (3′), (4′). Označíme-li $\varepsilon = {}^2\varepsilon/{}^1\varepsilon$, jest $k/m = \varepsilon h_2/h_3$. Je-li $k/m > 0$ pro dvojici x_2, x_3, potom je buď $k > 0$, $m > 0$ a podle předchozího výsledku leží středy všech tří kružnic k_1, k_2, k_3 v téže polorovině ohraničené společnou tečnou (indexem). Tento index je tedy vnější společnou tečnou kružnic k_2, k_3. Nebo je $k < 0$, $m < 0$, potom střed kružnice k_1 leží v jedné a středy kružnic k_2 a k_3 v opačné polorovině určené společnou tečnou (indexem) a tento index je opět vnější společnou tečnou kružnic k_2 a k_3. Podobně lze ukázati, že pro $k/m < 0$ jest příslušný index vnitřní společnou tečnou kružnic k_2 a k_3. Výsledek shrneme takto:

Věta 2.2.2. *Platí-li pro dvojici x_2, x_3 nerovnost*

$$\frac{k}{m} = \varepsilon \frac{h_2(x_2)}{h_3(x_3)} > 0 \quad \left(\frac{k}{m} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_2 \equiv (3')$ a $k_3 \equiv (4')$, kótovaných hodnotami x_2 resp. x_3.

Na základě provedeného rozboru lze určiti, které ze společných tečen kružnic k_1, k_2, k_3 je nutno vzíti jako indexy v konkrétním případě při řešení daného vztahu, který je jedním ze čtyř vztahů (1′). Aby se předešlo chybnému čtení z nomogramu, je vhodné vyznačiti v klíči nomogramu polohu indexů vzhledem ke třem systémům kružnic a nerýsovati všechny kružnice celé, ale jen ty kruhové oblouky, které jsou pro čtení na nomogramu potřebné.

2.3. Položíme-li v rovnici (1′) a v rovnici (1″) ${}^1\varepsilon = {}^2\varepsilon = +1$, získáváme jeden ze čtyř vztahů zobrazených dotykovým nomogramem se třemi soustavami kružnic, a to rovnici

$$\begin{aligned}(1^*) \qquad & [(h_1 - h_2)(g_3 - g_1) - (h_1 - h_3)(g_2 - g_1)]^2 + \\ & + [(h_1 - h_3)(f_2 - f_1) - (h_1 - h_2)(f_3 - f_1)]^2 = \\ & = [(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)]^2\end{aligned}$$

a s ní ekvivalentní rovnici

$$(1^{**}) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & h_2 & 1 \\ f_3 & h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & h_2 & 1 \\ g_3 & h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Rovnice (12) mají nyní tvar

$$\frac{1}{k} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{1}{m} = \frac{h_1}{h_3}$$

a dále platí

$$\frac{k}{m} = \frac{h_2}{h_3}.$$

Mají-li tedy pro určitou dvojici x_1, x_2 funkce h_1, h_2 stejná (opačná) znaménka, je $1/k > 0$ ($1/k < 0$). Mají-li pro určitou dvojici x_1, x_3 funkce h_1, h_3 stejná (opačná) znaménka, je $1/m > 0$ ($1/m < 0$). Mají-li konečně pro určitou dvojici x_2, x_3 funkce h_2, h_3 stejná (opačná) znaménka, je $k/m > 0$ ($k/m < 0$). Vzhledem k větám 2.1.1, 2.2.1 a 2.2.2 můžeme vysloviti tento výsledek:

Věta 2.3.1. *Dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic $k_1 \equiv (2')$, $k_2 \equiv (3')$, $k_3 \equiv (4')$ zobrazuje rovnici (1^{**}), při čemž pro dvojici x_i, x_j, $i, j = 1, 2, 3$ je třeba vzít za indexy vnější (vnitřní) společné tečny kružnic k_i, k_j, je-li $h_i h_j > 0$ ($h_i h_j < 0$).*

Poznámka. Je-li kupř. pro všechna x_i $h_1 > 0$, $h_2 < 0$, $h_3 > 0$ a jsou-li hodnoty x_1, x_2 dány, použijeme jako indexů vnitřních společných tečen kružnic k_1, k_2 a hodnoty x_3 čteme u těch kružnic systému $(4')$, které se jednoho nebo druhého indexu dotýkají a jejichž středy leží spolu se středem kružnice k_1 v téže polorovině určené příslušným indexem.

3. TRANSFORMACE DOTYKOVÝCH NOMOGRAMŮ S KRUŽNICEMI

Dotykový nomogram o zobrazovacích rovnicích $(2')$, $(3')$, $(4')$ lze podrobit homotetii

$$\xi' = \alpha\xi\,, \quad \eta' = \alpha\eta\,, \tag{14}$$

což je transformace převádějící každou kružnici v rovině opět v kružnici. Dosadíme-li do rovnic $(2')$, $(3')$, $(4')$ za ξ a η výrazy z rovnic (14), obdržíme po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} (\xi - \alpha f_1)^2 + (\eta - \alpha g_1)^2 &= \alpha^2 h_1^2\,, \\ (\xi - \alpha f_2)^2 + (\eta - \alpha g_2)^2 &= \alpha^2 h_2^2\,, \\ (\xi - \alpha f_3)^2 + (\eta - \alpha g_3)^2 &= \alpha^2 h_3^2\,. \end{aligned} \tag{15}$$

V těchto třech rovnicích jsou souřadnice ξ, η označeny opět nečárkovaně. Pro $i = 1, 2, 3$ má kružnice k_i střed o souřadnicích αf_i; αg_i a poloměr αh_i. Jsou tedy rovnice (15) zobrazovacími rovnicemi vztahu $(1'')$ s volitelným modulem α.

4. NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S KRUŽNICEMI

4.1. V odstavcích 1–3 bylo předpokládáno $h_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$, byl tedy uvažován obecný případ dotykového nomogramu se třemi soustavami kružnic (15). Tento nomogram zobrazuje čtyři vztahy $(1')$ příslušné různým kombinacím hodnot ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$.

Připustíme-li pro některé i $h_i \equiv 0$, potom se redukuje soustava kružnic

$$(\xi - \alpha f_i)^2 + (\eta - \alpha g_i)^2 = \alpha^2 h_i^2$$

na stupnici $(\xi - \alpha f_i)^2 + (\eta - \alpha g_i)^2 = 0$ neboli $\xi = \alpha f_i$; $\eta = \alpha g_i$.

Postupem podobným výpočtu rovnice (1′) v odst. 2 lze ukázati, že i v tomto případě je tímto nomogramem zobrazena rovnice (1′) event. (1″), ve které klademe $h_i \equiv 0$.

Snadno nahlédneme, že v případě jediného $h_i \equiv 0$ představuje rovnice (1′) dva vztahy, lišící se pouze různými znaménky u funkcí h_2, h_3 podle volby ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$. V případě, že $h_i = h_j \equiv 0$ pro $i \neq j$, je rovnice (1′) na volbě ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ nezávislá.

Podobně jako v odst. 2.3 můžeme položiti ${}^1\varepsilon = {}^2\varepsilon = +1$ a dokázati platnost věty 2.3.1 pro dotykový nomogram se dvěma soustavami kružnic a jednou stupnicí nebo s jednou soustavou kružnic a se dvěma stupnicemi.

4.2. Speciální tvary rovnice (1*) lze získat také speciální volbou funkcí f_i, g_i.

Je-li pro některé i $f_i = g_i \equiv 0$, jsou kružnice k_i soustředné o středu v počátku.

Je-li pro některé i $f_i \equiv 0$, $h_i = g_i$, mají kružnice k_i středy na ose η a dotýkají se v počátku osy ξ atd.

V připojené tabulce jsou uvedeny některé speciální tvary rovnice (1*) a příslušné zobrazovací rovnice nomogramů.

Všimněme si kanonického tvaru uvedeného v tabulce na druhém místě

$$h_1(f_2 - f_3) + h_2(f_3 - f_1) = 0 . \tag{16}$$

Předpokládáme, že $h_1 \neq 0 \neq h_2$. Rovnice (16) je nomograficky racionální 5. nomografického řádu a lze ji srovnat se Soreauovým kanonickým tvarem

$$F_3 = \frac{F_1 + F_2}{G_1 + G_2} \tag{17}$$

touto úpravou:

$$h_1 f_2 - h_1 f_3 + h_2 f_3 - h_2 f_1 = 0 ,$$
$$f_3(h_2 - h_1) = h_2 f_1 - h_1 f_2 ,$$
$$f_3 = \frac{h_2 f_1 - h_1 f_2}{h_2 - h_1} ,$$

a konečně rozšířením zlomku na pravé straně výrazem $1/h_1 h_2$ získáváme

$$f_3 = \left(\frac{f_1}{h_1} - \frac{f_2}{h_2}\right) : \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) .$$

Srovnávací rovnice jsou:

$$\frac{f_1}{h_1} = F_1 ; \quad -\frac{f_2}{h_2} = F_2 ; \quad \frac{1}{h_1} = G_1 ; \quad -\frac{1}{h_2} = G_2 ; \; f_3 = F_3 .$$

Obráceně lze každou rovnici (17), pro kterou $G_1 \neq 0 \neq G_2$ převést na tvar (16). Jest potom

$$f_1 = \frac{F_1}{G_1}; \quad h_1 = \frac{1}{G_1}; \quad f_2 = \frac{F_2}{G_2}; \quad h_2 = -\frac{1}{G_2}; \quad f_3 = F_3 .$$

Zobrazovací rovnice dotykového nomogramu pro funkci (17) jsou

$$\left(\xi - \alpha \frac{F_1}{G_1}\right)^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{G_1^2}; \quad \left(\xi - \alpha \frac{F_2}{G_2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{G_2^2}; \quad \xi_3 = \alpha F_3; \quad \eta_3 = 0 .$$

Platí-li pro dvojici x_1, x_2 nerovnost $h_1 h_2 = -1/G_1 G_2 > 0$, $(-1/G_1 G_2 < 0)$, je třeba vzíti za indexy vnější (vnitřní) společné tečny kružnic k_1, k_2.

Všimněme si dále kanonického tvaru uvedeného v tabulce na třetím místě.

$$h_1(f_2 - f_3) + h_2 f_3 = 0 . \tag{18}$$

Předpokládáme, že $f_3 \neq 0$, $h_1 \neq 0$. Kdyby toto neplatilo, nebyla by rovnice (18) vztahem mezi třemi proměnnými. Rovnice (18) je nomograficky racionální čtvrtého nomografického řádu a lze ji uvést na Cauchyho kanonický tvar dělením výrazem $h_1 f_3$:

$$\frac{f_2}{f_3} - 1 + \frac{h_2}{h_1} = 0 .$$

Naopak funkci Cauchyho kanonického tvaru

$$H_1 F_3 + H_2 G_3 + H_3 = 0 , \tag{19}$$

ve které $H_3 \neq 0$ lze uvést na tvar (18), položíme-li

$$H_1 = \frac{1}{f_3}; \quad H_2 = \frac{1}{h_1}; \quad \frac{F_3}{H_3} = -f_2; \quad \frac{G_3}{H_3} = -h_2 .$$

Zobrazovací rovnice dotykového nomogramu pro funkci (19) jsou

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{H_2^2}, \qquad \left(\xi + \frac{\alpha F_3}{H_3}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{\alpha G_3}{H_3}\right)^2, \qquad \xi_3 = \frac{\alpha}{H_1}; \quad \eta_3 = 0 .$$

Při čtení nomogramu je třeba vzíti za index vnější (vnitřní) společnou tečnu obou kružnic v případě, že

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{H_2 G_3}{H_3} > 0, \quad \left(\frac{h_2}{h_1} = -\frac{H_2 G_3}{H_3} < 0\right).$$

Všimněme si ještě kanonického tvaru uvedeného na posledním místě v tabulce

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{g_3^2} . \tag{20}$$

TABULKA

Zobrazovací rovnice nomogramu	Kanonický tvar
Soustavy kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha_2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + (\eta - \alpha g_2)^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$g_2^2(h_1^2 - f_3^2) + [h_1 f_2 - f_3(h_1 - h_2)]^2 = 0$
Soustavy kružnic $(\xi - \alpha f_1)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$h_1(f_2 - f_3) + h_2(f_3 - f_1) = 0$ (Lze převést na Soreauův kanonický tvar $F_3 = \dfrac{F_1 + F_2}{G_1 + G_2}$)
Soustavy kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$h_1(f_2 - f_3) + h_2 f_3 = 0$ (Lze převést na Cauchyho kanonický tvar)
Soustava kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ Stupnice $\xi_2 = \alpha f_2$; $\eta_2 = \alpha g_2$ $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = \alpha g_3$	$h_1^2[(g_3 - g_2)^2 + (f_3 - f_2)^2] =$ $= (f_2 g_3 - f_3 g_2)^2$
Soustava kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ Stupnice $\xi_2 = \alpha f_2$; $\eta_2 = 0$ $\xi_3 = 0$; $\eta_3 = \alpha g_3$	$\dfrac{1}{h_1^2} = \dfrac{1}{f_2^2} + \dfrac{1}{g_3^2}$ (Součtový tvar)

Rovnici (20) lze srovnat se součtovým tvarem

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 , \tag{21}$$

položíme-li $1/h_1^2 = \varphi_3$; $1/f_2^2 = \varphi_1$ a $1/g_3^2 = \varphi_2$. Naopak součtový tvar (21), pro který $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, lze zobrazit dotykovým nomogramem o zobrazovacích rovnicích

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{\varphi_3} ; \qquad \xi_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\varphi_1}} ; \quad \eta_1 = 0 ; \qquad \xi_2 = 0 ; \qquad \eta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\varphi_2}} .$$

4.3. Je-li $h_1 = h_2 = h_3 \equiv 0$, stane se dotykový nomogram spojnicovým o třech stupnicích $\xi_i = \alpha f_i$; $\eta_i = \alpha g_i$ $i = 1, 2, 3$. Rovnice (1**) se stane v tomto případě Soreauovou rovnicí

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Literatura

[1] *Václav Hruška:* Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1952.
[2] *František Jurga:* Nomografia a iné grafické metódy. Bratislava 1958.
[3] *M. d'Ocagne:* Traité de nomographie. Paříž 1921.
[4] *Václav Pleskot:* Nomografie. Praha 1963.

Adresa autora: Gorkého 42, Brno.

Резюме

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ С ОКРУЖНОСТЯМИ

ЯРОСЛАВ ЗАГОРА (Jaroslav Záhora), Брно

Тангенциальная номограмма с тремя системами окружностей

$$k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 , \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

где f_i, g_i, h_i — функции только переменной x_i, изображает четыре отношения

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2 ,$$

отличающиеся лишь разными сочетаниями значений ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$. Если ${}^1\varepsilon h_1/h_2 > 0$ (${}^1\varepsilon h_1/h_2 < 0$), надо при чтении номограммы считать индексом внешнюю (внутреннюю) касательную окружностей k_1, k_2. Если ${}^2\varepsilon h_1/h_3 > 0$ (${}^2\varepsilon h_1/h_3 < 0$), надо считать индексом внешнюю (внутреннюю) касательную окружностей k_1, k_3.

Специальным подбором функций f_i, g_i, h_i можно получить изобразительные уравнения и канонические формы тангенциальных номограмм с двумя системами окружностей и с одной шкалой, или с одной системой окружностей и с двумя шкалами.

В работе далее показано изображение уравнений канонической формы Соро пятого номографического порядка, канонической формы Коши и канонической формы третьего номографического порядка тангенциальными номограммами с окружностями.

Summary

TANGENT NOMOGRAMS WITH CIRCLES

JAROSLAV ZÁHORA, Brno

The tangent nomogram with three general systems of circles

$$k_i = (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

where f_i, g_i, h_i are functions of the variable x_i only, represents four relations (obtained by taking ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$ in)

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

If ${}^1\varepsilon h_1/h_2 > 0$ (or ${}^1\varepsilon h_1/h_2 < 0$), it is necessary when reading the nomogram take for the index the exterior (or interior, respectively) common tangent of the circles k_1, k_2. If ${}^2\varepsilon h_1/h_3 > 0$ (or ${}^2\varepsilon h_1/h_3 < 0$) it is necessary take for the index the exterior (or interior, respectively) common tangent of the circles k_1, k_3.

By special choice of the functions f_i, g_i, h_i it is possible to obtain the equations of representing and the canonic forms of tangent nomograms with two systems of circles and with one scale, and nomograms with one system of circles and with two scales.

It is also shown that it is possible to represent (by tangent nomograms) the Soreau canonic form of the 5th nomographic order, the Cauchy canonic form and the canonic form of the 3rd nomographic order.