Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE MIT EINER IRREDUZIBLEN KURVE DRITTER ORDNUNG INZIDIEREN

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Eingegangen am 27. April 1965)

EINLEITUNG

Eine bedeutungsvolle Klasse der ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ bilden diejenigen interessanten Fälle, in welchen die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. In der Literatur sind bisher nur vier von diesen Konfigurationen beschrieben worden und die Hauptaufgabe meiner Arbeit besteht darin alle übrigen zu finden.

Zuerst aber erlaube ich mir noch im Kurzen den Leser über einige Grundbegriffe und Definition zu informieren.

Man sagt, dass zwei Konfigurationspunkte P, Q verbunden sind (kurz $P-Q$), wenn sie miteinander auf einer von den Konfigurationsgeraden liegen. Wenn R ein dritter Konfigurationspunkt dieser Geraden ist, dann können wir diese als $P-Q-R$ Gerade bezeichnen. Im anderen Falle, wenn zwei Konfigurationspunkte P, Q nicht verbunden sind, können wir kurz diesen Umstand als $P : Q$ bezeichnen und man spricht von zwei separierten (*getrennten*) Punkten.

Es ist auch möglich (und wie wir weiter sehen werden, ist es nicht nur rein theoretischer Fall), dass drei separierte Konfigurationspunkte in einer Geraden liegen. Diese Gerade gehört selbstverständlich nicht zur Menge der Konfigurationsgeraden und aus diesem Grunde wird sie auch als eine „fremde" Gerade bezeichnet. Die Bezeichnung $P-Q-R$ Gerade wird ausschliesslich nur für eine Konfigurationsgerade benützt, dagegen wird in allen übrigen Fällen (namentlich bei fremden Geraden, oder wenn wir nicht ganz bestimmt wissen, ob es sich um eine Konfigurationsgerade handelt), diese Gerade als PQR bezeichnet.

Nach der Definition der Konfiguration $(12_4, 16_3)$ inzidiert jeder Punkt mit vier Geraden und auf jeder von diesen Geraden liegen noch zwei andere Konfigurationspunkte. Jeder Konfigurationspunkt ist also mit acht anderen verbunden und eben deswegen von den drei übrigen separiert.

Wenn ein Punkt P von den Punkten Q, R, S separiert ist, dann können wir diesen Umstand auch kurz in der Form $P : Q, R, S$ ausdrücken und sind nun schon imstande alle Konfigurationspunkte zu klassifizieren:

Definition. Es sei $P : Q, R, S$. Es ergeben sich dann folgende Möglichkeiten. Den Punkt P bezeichnen wir als:

1. A-Punkt, wenn $Q : R$, $Q : S$, $R : S$ ist;
2. B-Punkt, wenn $Q-R$, $Q-S$, $R-S$, aber nicht $Q-R-S$ ist;
3. C-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten Q, R, S separiert sind;
4. D-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten Q, R, S verbunden sind; und endlich
5. E-Punkt, wenn $Q-R-S$ ist, d.h. wenn diese Punkte eine Konfigurationsgerade bilden.

Bemerkung. Wie ich schon vorher angeführt habe, wurden bisher vier von den Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ beschrieben, die mit einer irreduziblen Kubik inzidieren. Alle diese Konfigurationen haben wenigstens einen A-Punkt. Ausserdem hat J. METELKA in der Arbeit [13] alle Konfigurationen mit den A-Punkten systematisch untersucht und in meiner Arbeit [15] habe auch ich alle Fälle mit D-Punkten beschrieben. Dass keine der letztgenannten Konfigurationen mit einer irreduziblen Kubik inzidiert, habe ich noch nicht bewiesen und muss mich daher mit diesen Fällen beschäftigen.

Für unsere Aufgabe ist die obenangeführte Klassifikation der Konfigurationspunkte ungenügend und es ist daher notwendig eine feinere und ausdruckvolle Klassifikation einzuführen, besonders bei den Konfigurationen, die B-, C- und E-Punkte haben.

Wir betrachten vorerst einen B-Punkt P (der von den Punkten Q, R, S getrennt ist, d. h. $P : Q, R, S$), dann sehen wir fast auf den ersten Blick, dass aus der Mengen der sechzehn Konfigurationsgeraden nur dreizehn mit Punkten P, Q, R, S inzidieren. Mit den Schnittpunkten der drei übrigen Geraden werden wir uns jetzt näher beschäftigen:

Definition. Unter der Voraussetzung, dass diese Geraden drei verschieden Schnittpunkte haben, können folgende Möglichkeiten vorkommen:

1. Entweder ein, oder zwei, oder alle drei Schnittpunkte sind Konfigurationspunkte, dann ist der betrachtete Punkt P entweder vom Type B^1, oder B^2, oder B^3.
2. In den übrigen Fällen, wo alle drei Geraden nur einen Schnittpunkt haben, ist dieser Punkt P vom Type B^4.

Bemerkung. Dazu bemerke ich, dass in diesem letzten Falle der einzige Schnittpunkt ein Konfigurationspunkt sein muss. Im gegenteiligen Falle inzidieren diese drei Geraden mit neun verschiedenen Konfigurationspunkten, die mit den Punkten P, Q, R, S die Gesamtzahl von dreizen Konfigurationspunkten ergeben, was begreiflich nicht möglich ist.

Analogisch könnte man auch für die C- und E-Punkte eine feinere Klassifikation einführen. In diesen Fällen kommen aber nur folgende zwei Möglichkeiten vor:

Definition. Wenn wir einen C-Punkt (bzw. einen E-Punkt) P haben, der von den Punkten Q, R, S getrennt ist, dann inzidieren vierzehn Konfigurationsgeraden mit diesen vier Punkten und je nach dem Schnittpunkt der zwei übrigen Geraden – ist dieser ein Konfigurationspunkt, oder nicht – können wir den C-Punkt (bzw. E-Punkt) P weiter klassifizieren:

Im ersten Falle (der Schnittpunkt ist ein Konfigurationspunkt) bezeichnen wir P als einen Punkt vom Typ C^1(bzw. E^1), im zweiten Falle als C^2 (bzw. E^2).

Es sei *1, 2, ..., 12* eine Menge von zwölf Konfigurationspunkten. Bekanntlich nur im Falle, wenn drei Punkte (z. B. *1, 2, 3*) auf einer Konfigurationsgeraden liegen, kann man diese als *1–2–3* Gerade bezeichnen. Wenn man alle Konfigurationsgeraden in diesem Sinne bezeichnet, bekommt man ein sogenanntes Totalschema und man sagt, dass dieses Schema eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$ definiert, wenn es mit zwölf Punkten und sechzehn Geraden in der Projektionsebene über dem Körper der komplexen Zahlen verwirklicht werden kann.

Eine einzige Konfiguration kann auch durch verschiedene totale Schemen definiert werden. Dann aber geht bei der Benützung einiger Permutationen der Zahlen *1, 2, ..., 12* ein Schema in das andere über. Solche Schemen nennt man äquivalente Schemen.

Eine Konfiguration ist also nicht nur durch ein Schema definiert, sondern durch die ganze Klasse äquivalenter Schemen. Dazu bemerke in noch, dass zwei Schemen nur in dem Falle äquivalent sind, wenn sie die gleiche Anzahl von A-, B-, ..., u. s. w. Punkten haben und wenn diese Punkte in den beiden Schemen auch vom gleichen Typus sind.

Jetzt bezeichnen wir mit P_i $(i = 1, 2, 3)$ drei Schnittpunkte der Geraden p (und analogisch mit Q_i drei Schnittpunkte der Geraden q) mit der Kubik. Bekanntlich liegen auch die dritten Schnittpunkte R_i der Geraden P_iQ_i (mit der Kubik) auf einer Geraden. Diesen Grundsatz kann man auch symbolisch als

(1) $$P_1P_2P_3 - Q_1Q_2Q_3 - R_1R_2R_3$$

ausdrücken.

Ausserdem wissen wir schon, dass auch die Punkte mit dem gleichen Index, d. h. P_i, Q_i, R_i $(i = 1, 2, 3)$ eine Gerade bilden.

Die Tangente im Punkte P schneidet die Kubik zum drittenmal im Punkte, den wir $\bar{P}$ bezeichnen werden und nun kann man schon die übrigen drei Grundsätzte symbolisch folgendermassen ausdrücken:

(2) $$P_1P_2P_3 - P_1Q_2Q_3 - \bar{P}_1R_2R_3 .$$

(3) $$PQR - PQR - \bar{P}\bar{Q}\bar{R},$$

(4) Im Falle, dass $\bar{A} \equiv \bar{B} \equiv T$ ist, dann impliziert $AB\bar{C} - ABC - TT\bar{C}$ die Identität $\bar{T} \equiv \bar{C}$.

Wenn P ein Inflexionspunkt ist, dann ist $\bar{P} \equiv P$ und die Tangente des Punktes P kann man als PPP Gerade bezeichnen.

Zu diesen Grundsätzen bemerke ich noch, dass sie nicht nur für die elliptische Kubik gelten, sondern auch für alle irreduziblen Kubiken gültig sind.

Bei der Lösung dieser Aufgabe werden wir nach diesem Arbeitsplan vorgehen:

Mit Hilfe der symbolisch oben beschriebenen Grundsätze suchen wir systematisch alle miteinander nicht äquivalente Schemen der ebenen Konfigurationen, die mit einer irreduziblen Kubik inzident sind.

Es sei $p > 0$. In den ersten neun Kapiteln werden wir folgende Konfigurationen suchen:

1. $B_p^4 B_q C_r D_s E_t$; 2. $B_p^3 B_q^2 B_r^1 C_s D_t E_u$; 3. $B_p^1 B_q^2 C_r D_s E_t$; 4. $B_p^2 C_q D_r E_s$; 5. $D_p C_q E_r$; 6. $E_p^1 E_q^2 C_r$ 7. $E_p^2 C_q$; 8. $C_p^2 C_q^1$; 9. C_{12}^1.

Im zehten Kapitel zeigen wir, welche von den Schemen realisierbar sind. Wir berechnen die Koordinaten der Konfigurationspunkte und schreiben die Gleichungen der Kubiken an.

Mit diesem Arbeitsplan schliessen wir auch unser Einleitungskapitel.

1. KAPITEL

In diesem Kapitel werden wir uns mit Konfigurationen beschäftigen — oder besser gesagt mit Schemen — die wenigstens einen B^4-Punkt haben.

Es sei 1 ein B^4-Punkt, der von den Punkten $2, 3, 4$ separiert ist. Bekanntlich existieren drei Geraden, die nur einen Schnittpunkt haben (der ein Konfigurationspunkt ist), und ausserdem inzidieren sie nicht mit den Punkten $1, 2, 3, 4$.

Diese Konfigurationsgeraden können wir als $5-6-7$, $5-8-9$, $5-0-P$ bezeichnen. Der Punkt 1 ist mit dem Punkte 5 verbunden und auf der Geraden $1-5$ muss schon der übriggebliebene Konfigurationspunkt (Q) liegen. D. h. $1-5-Q$ ist die erste Gerade, die mit dem Punkte 1 inzidiert. Als die drei übrigen Geraden, die den Punkt 1 enthalten, können wir die Geraden $1-8-0$, $1-P-6$, $1-7-9$ wählen. Der zwölfte Konfigurationspunkt Q ist schon mit den Punkten $2, 3, 4$ verbunden, kann aber nicht auf den Geraden $2-3, 2-4, 3-4$ liegen. Anderenfalls inzidiert der Punkt Q höchstens mit den drei verschiedenen Konfigurationsgeraden. Des besseren Überblicks halber führen wir diese Ergebnisse wie folgt an:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} \underline{\;\;1\;\;} & \underline{\;\;5\;\;} & \underline{\;2\;} & \underline{\;3\;} & \underline{\;4\;} & 2-3-. \\ 5\;0\;6\;7 & 6\;8\;0 & a\;Q & c\;Q & e\;Q & 2-4-. \\ Q\;8\;P\;9 & 7\;9\;P & b\;. & d\;. & f\;. & 3-4-. \end{array}$$

Wir beziechnen jetzt mit X den dritten Punkt auf der Geraden $5\bar{1}$. Dann besteht $0P5-11\bar{1}-86X$, $895-11\bar{1}-07X$, $675-11\bar{1}-P9X$. Deswegen gelten für den Punkt X folgende Relationen:

$$(2)\qquad 5\bar{1}X,\ 86X,\ 07X,\ P9X\,.$$

Im Falle, dass $X \equiv 1$ ist, folgt aus (1) und (2) die Relation $16P \equiv 168$, wobei aber die Punkte P und 8 verschieden sein müssen. Analogisch beweisen wir auch, dass der Punkt X von den Punkten $5, 6, 7, 8, 9, 0, P$ verschieden ist. Es können also folgende Möglichkeiten vorkommen:

Entweder ist $X \equiv 2, 3, 4, Q$, oder ist X kein Konfigurationspunkt.

Unter der Voraussetzung, dass der Punkt X ein Konfigurationspunkt ist und zu der Menge $(2, 3, 4)$ gehört, sind wenigstens zwei von den Geraden $86X, 07X, P9X$ fremde Geraden und der Punkt X wäre deswegen mindestens von vier verschiedenen Punkten getrennt, was nicht möglich ist.

Wenn $X \equiv Q$ ist, sind alle drei Geraden $8Q6, 07Q, P9Q$ – siehe (1) – fremde Geraden und der Punkt Q ist von den Punkten $6, 8, 0, 7, P, 9$ getrennt.

Der Punkt X kann also nicht ein Konfigurationspunkt sein, und nach der unter (2) angeführten Beziehung folgt die Separierung:

$$8:6;\; 0:7;\; P:9\,. \tag{3}$$

Unser Teilschema (1) und das Resultat (3) ändern sich nicht bei Benützung der Permutationen:

$$(0P), (68), (79);\; (07), (6P), (89);\; (P9), (67), (08)\,;$$
$$(15),\; (60), (78);\; (15), (69),\; (8P);\; (15),\; (09), (7P)\,.$$

Für drei Geraden $a-b$, $c-d$, $e-f$ (siehe 1) kommen nur folgende Möglichkeiten vor:

$$6-9,\; 6-0,\; 7-8,\; 7-P,\; 8-P,\; 9-0\,.$$

Auf den ersten Blick sehen wir, dass wenigstens ein Punkt der Menge $(6, 7, 8, 9, 0, P)$ auf zwei von den Geraden $a-b$, $c-d$, $e-f$ liegt.

Nach den oben beschriebenen Permutationen können wir voraussetzen, dass diese Eigenschaft der Punkt 6 hat. Es existieren deswegen zwei Geraden $6-0-x$, $6-9-y$, wobei $x, y \equiv 2, 3, 4$ sind.

Es ist gleichgültig, welche zwei Punkte der Menge $(2, 3, 4)$ wir für x und y einsetzen, z. B. können wir $x \equiv 2$ und $y \equiv 3$ wählen.

Aus den Beziehungen $07X-61P-299$, $9PX-657-300$ folgt $2:9$; $3:0$. Bezeichnet man mit $4-9-Y$ und $4-0-Z$ die letzten Geraden, die mit den Punkten 9 und 0 inzidieren, dann ist $Y \equiv Q, 0$ und $Z \equiv Q, 9$. Sogleich sehen wir, dass der Punkt Z von dem Punkte Q verschieden sein muss, und bekommen so die Konfigurationsgerade $4-0-9$.

Wenn man mit V den dritten Punkt auf der Geraden $2-4$ bezeichnet (d. h. $2-4-V$ und $V \equiv 7, 8, P$ ist), dann ist $3-Q-V$ die letzte Gerade, mit welcher der Punkt V inzidiert.

In diesem Falle folgt aus der Relation $904-602-33V$ die Separierung $V:3$ und es ist auch $3-Q-V$ die übriggebliebene Konfigurationsgerade, die durch den Punkt V gehen kann.

Da der Punkt V mit dem Punkte 3 nicht gleichzeitig getrennt und verbunden sein kann, können wir dieses Kapitel mit der Festlegung des folgenden Hilfssatzes schliessen:

Lemma 1. *Eine Konfiguration mit B^4-Punkten kann nicht mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.*

2. KAPITEL

Nach dem zweiten Punkte unseres Arbeitsplanes werden wir uns jetzt mit solchen Schemen beschäftigen, die wenigstens einen B^3-Punkt, aber schon keine A- und B^4-Punkte haben.

Es sei 1 ein B^3-Punkt, der wieder von den Punkten $2, 3, 4$ getrennt ist. Drei Geraden, die nicht mit den Punkten $1, 2, 3, 4$ inzidieren, kann man in diesem Falle als $5-6-7$, $7-8-9$, $9-0-5$ bezeichnen, (siehe die Definition der B^3-Punkte). Die zwei übrigen Konfigurationspunkte P und Q können nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen und sind auch mit den Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden. Im anderen Falle liegen diese zwei Punkte nicht auf vier Konfigurationsgeraden.

Für die Geraden, welche den Punkt 1 schneiden, kommen nur folgende drei Möglichkeiten vor:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;P \\ 8\;0\;6\;Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;0 \\ Q\;P\;6\;8 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;P \\ Q\;0\;6\;8, \end{array}$$

wenn wir selbstverständlich alle äquivalenten Möglichkeiten ausschliessen.

In diesen letzten zwei Möglichkeiten kann noch entweder $P-Q$, oder $P:Q$ sein. Im Falle, dass $P-Q$ ist, kann schon der dritte Punkt dieser Geraden nur ein Punkt der Menge $(2, 3, 4)$ sein. Wir setzen voraus, dass diese Eigenschaft der Punkt 2 hat (was zulässig ist).

Übersichtlich bekommen wir also folgende fünf Teilschemen:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;P \\ 8\;0\;6\;Q \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline 3\;P\;Q\;6 \\ .\;a\;.\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 4\;P\;Q \\ .\;.\;b \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline P\;Q \\ .\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;0 \\ Q\;P\;6\;8 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline 3\;P\;Q\;4 \\ .\;.\;.\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 4\;P\;Q \\ .\;.\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline P\;Q \\ .\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;7\;9\;0 \\ Q\;P\;6\;8 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline 3\;P\;4\;a \\ .\;Q\;.\;b \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 4\;P\;Q \\ .\;.\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline P\;Q \\ .\;. \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

(IV)	$\frac{1}{}$	$\frac{2}{}$	$\frac{3}{}$	$\frac{4}{}$	
	1	*2*	*3*	*4*	*5−6−7*
	5 7 9 P	*3 P Q 4*	*4 P Q*	*P Q*	*7−8−9*
	Q 0 6 8	. . . .	. . .	. .	*9−0−5*
(V)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5−6−7*
	5 7 9 P	*3 P 4 a*	*4 P Q*	*P Q*	*7−8−9*
	Q 0 6 8	. *Q* . *b*	. . .	. .	*9−0−5*.

Zuerst werden wir uns mit dem ersten Schema beschäftigen:

Wenn die drei Punkte *5*, *7*, *9* mit den Geraden *2−3*, *2−4*, *3−4* inzidieren, dann sind die zwei Punkte *P* und *Q* gleichzeitig von den Punkten *5*, *7*, *9* getrennt und wir sehen, dass diese Punkte *P* und *Q* vom Type B^4-sind. Bekanntlich schliessen wir diesen Fall aus und setzen voraus, dass auf den Geraden *2−3*, *2−4* und *3−4* wenigstens ein Punkt der Menge (*6*, *8*, *0*) liegt.

Nach den Permutationen (*68*), (*59*); (*60*), (*79*); (*80*), (*57*) können wir die Gerade *2−3* und den Punkt *6* wählen. So bekommen wir eine weitere Konfigurationsgerade *2−3−6*.

Die letzte Gerade, welche mit dem Punkte *6* inzidiert, muss dann eine Gerade *4−6−t* ($t \equiv P, Q$) sein. Der Permutation (*PQ*) halber können wir diese Gerade als *4−6−P* bezeichnen und deswegen ist *6* : *0*, *8*, *Q*. Aus dem Teilschema (I) sehen wir, dass auch *8* : *0* ist und diese Ergebnisse führen wir der besseren Übersicht halber folgendermassen an:

(1) *2−3−6*, *4−6−P*; *6* : *0*, *8*, *Q*; *8* : *0*.

Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass auf einer der Geraden *2−4*, *3−4* ein Punkt der Menge (*0*, *8*) liegt, und nach den zulässigen Permutationen

(*8*, *0*), (*5*, *7*) bzw. (*8*, *0*), (*5*, *7*), (*2*, *3*)

können wir voraussetzen, dass die Gerade *3−4* mit dem Punkte *0* inzidiert (also *3−4−0*), Dann besteht *196−756−00*$\bar{6}$, $\bar{6}$*66−034−02P*. Weil der Punkt *2* mit dem Punkte *P* verbunden ist, bekommen wir die weitere Konfigurationsgerade *0−2−P* und die Bedingung *0* : *6*, *8*, *Q*. Aus der Beziehung *619−2PO−3Q5* folgt die letzte Gerade *3−Q−5*, auf der ein Punkt *5* liegt, und die Separierung *5* : *2*, *4*, *P*.

Im Falle, dass mit der Geraden *2−4* ein Punkt *8* inzidiert, muss auch *3−P−8* eine Konfigurationsgerade sein und unser Punkt *8* (*8* : *6*, *0*, *Q*) wäre vom Type A. Das ist begreiflich ausgeschlossen und deswegen kann auf der Geraden *2−4* nur ein Punkt der Menge (*7*, *9*) liegen. Mit Rücksichtauf die Permutation (*24*), (*06*), (*79*), kann man diese Gerade als *2−4−7* wählen. Dann besteht *765−430−229*, *701−236−449*, also *9* : *4*, *2* und die letzte Gerade, die durch den Punkt *9* geht, ist die Gerade *3−P−9*.

Nun sind wir aber zu einen Widerspruch gekommen, denn die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die mit dem Punkte *8* inzidieren – nach diesen Resultaten – können nicht *2−Q−8* und *4−Q−8* sein.

Daraus folgt offensichtlich, dass auf den Geraden $2-4$, $3-4$ keiner von den Punkten 8, 0 liegen kann und dass im Gegenteil diese Geraden mit zwei Punkten der Menge $(5, 7, 9)$ inzidieren müssen.

a) Diese Punkte können nicht gleichzeitig die Punkte 5 und 9 sein. In diesem Falle können wir wieder zwei Geraden $2-4-5$, $3-4-9$ wählen und aus den Beziehungen $349-657-228$, $245-691-338$ ergibt sich $8:2, 3$. Ausserdem ist noch $8:6, 0$ (siehe 1).

b) Es können auch nicht gleichzeitig die Punkte 7 und 9 sein. Da man wieder $2-4-7$, $3-4-9$ wählen könnte, folgt $0:2, 3, \acute{6}, 8$ aus $675-349-220$, $691-247-$ -330 und aus dem Resultate (1).

Auf den Geraden $2-4$, $3-4$ liegen also die Punkte 5 und 7 und mit Hilfe der Permutation (23) ist es zulässig diese als

$$2-4-5, \quad 3-4-7 \tag{2}$$

zu bezeichnen. Deswegen besteht $5:3, P, Q$; $7:2, P, Q$.

Aus der Anführung (1) sehen wir, dass $236-PQ1-ab9$ und $a, b \equiv 0, 8, 9$ sind.

Aus den Geraden $0-9-5$ (siehe I) folgt, dass der Punkt 0 von den Punkten a, b verschieden sein muss (denn im Falle $a, b \equiv 0$ wäre $5 \equiv b, a$). Analogisch ergibt sich aus $7-8-9$, dass im Falle $8 \equiv a, b$; $7 \equiv b, a$ wäre, was unmöglich ist. Es ist nur noch eine Möglichkeit übriggeblieben: $a \equiv b \equiv 9$. Dann aber gehen durch den Punkt 9 fünf verschiedene Geraden, was begreiflich unzulässig ist.

Damit haben wir bewiesen, dass die erste Möglichkeit (I) nicht zu einer Konfiguration führt, und können uns der Möglichkeit II widmen.

II. Der Punkt 6 muss auf zweien von den drei Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen und deswegen muss er wenigstens mit einem der Punkte P und Q verbunden sein. Im Hinblick auf eine zulässige Permutation (57), (80), (PQ) kann man voraussetzen, dass $6-Q$ ist und man kann auch den Punkt 2 für den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik halten. Es ist also $2-6-Q$.

Dann ergibt sich die Relation $657-Q51-2\bar{5}P$, und da auch die zwei Punkte P und 2 verbunden sind, bekommen wir eine weitere Konfigurationsgerade $2-P-\bar{5}$. Unmittelbar aus dem Teilschema (II) folgt, dass $0:6, 7$; $8:5, 6$ und $P:Q$ sein muss. Wir führen diese Teilerfolge an:

$$2-6-Q, \; 2-P-\bar{5}; \; 8:5, 6; \; 0:6, 7; \; P:Q\,. \tag{1}$$

Wir nehmen zuerst an, dass der Punkt 5 ein Inflexionspunkt ist, d. h. $\bar{5} \equiv 5$, 555, $2-P-5$.

Aus der Beziehung $555-691-70Q$ sehen wir, dass die Gerade $70Q$ eine fremde Gerade sein muss, d. h. $Q:7, 0, P$.

Dann müssen auf den übrigen zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, die Punkte 8 und 9 liegen. Die zulässige Permutation (34) ermöglicht uns diese letzten zwei Geraden als $3-Q-8$ und $4-Q-9$ zu bezeichnen. Da auch der

Punkt 3 mit dem Punkte P verbunden ist, bekommen wir aus der Relation $Q15-$ $-879-3P0$ eine weitere Konfigurationsgerade $3-P-0$. Folglich ist $0 : 7, 6, Q$ und die letzte (d. h. vierte) Gerade, die mit dem Punkte 0 inzidiert, muss schon die Gerade $2-4-0$ sein. In diesem Falle ergibt sich aber $240-691-Q08$, d. h. $Q : 8$, und der Punkt Q wäre von den vier Punkten $7, 0, P, 8$ getrennt.

Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 5 kein Inflexionspunkt sein kann und dass unsere Voraussetzung – siehe oben – falsch ist.

Der Punkt $\bar{5}$ muss aber ein Konfigurationspunkt sein (siehe die Konfigurationsgerade $2-P-\bar{5}$) und daraus folgt, dass $\bar{5} \equiv 8$ ist. (Anderenfalls stossen wir auf einen Widerspruch zwischen den Geraden $55\bar{5}$ und $5-0-9$, resp. auf einen Widerspruch der Geraden $2-P-\bar{5}$ mit den Geraden $2-Q-6$, $1-P-7$.) Es ist also:

$$558, \quad 2-P-8 . \tag{2}$$

Wir konzentrieren uns auf die Beziehung $558-691-700$ und $081-095-77Q$.

Im Falle, dass $6-P$ ist, könnte der dritte Schnittpunkt dieser Geraden (mit der Kubik) nur ein Punkt $T \equiv 3,4$ sein und aus der Relation $576-17P-QQT$ wäre $Q : T$, was der Verbindung $Q-T$ widerspricht.

Es ist also $6 : P$ und insgesamt $6 : P, 0, 8$.

Die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt 6 geht, muss deswegen die Gerade $3-4-6$ sein und die übrige durch den Punkt 8 gehende Gerade kann nur noch eine Gerade $8-Q-X$ sein (wobei $X \equiv 3, 4$ ist). Dann aber ergibt sich $879-$ $-Q51-X66$ und gleichzeitig $3-4-6$, was begreiflich nicht möglich ist.

Alle Möglichkeiten sind schon ausgeschöpft und wir sehen, dass auch das zweite Teilschema keine neue Konfiguration geben kann.

III. Nun werden wir uns mit dem Falle III beschäftigen.

Aus der Relation $15Q-17P-\bar{1}62$ folgt, dass die Punkte $\bar{1}, 2, 6$ auf einer Geraden liegen. Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass der Punkt a (siehe III) mit dem Punkte 6 identisch ist. Dann folgt aus der Geraden $2-a-b$, $\bar{1}62$, dass $b \equiv \bar{1}$ sein muss. Anderenseits aber sehen wir, dass auf den Geraden $2-6-b$ nur $b \equiv 8, 0$ sein kann, und deswegen sind die Punkte b und 1 verbunden, was dem Resultate $b \equiv \bar{1}$ (d. h. $11b$) widerspricht.

Unsere Voraussetzung ($a \equiv 6$) ist also falsch und analogisch kann nicht $b \equiv 6$ sein.

Für die Gerade $2-a-b$ kommen deswegen nur die Möglichkeiten $2-5-8$, $2-7-0$ vor. Der Permutation $(57), (80), (PQ)$ halber sind diese Möglichkeiten äquivalent und wir können voraussetzen, dass $2-5-8$ ist.

Mit Hilfe der Beziehung $\bar{1}62$ gilt auch $11\bar{1}-852-0Q6$, und da die Gerade $0-Q-6$ nicht unter der Anführung III vorkommt, muss es eine fremde Gerade sein. Es ist also $6 : 0, Q$ und $0 : Q$.

Die dritte Konfigurationsgerade, welche durch den Punkt 6 geht, können wir als $6-P-T$ bezeichnen (wobei $T \equiv 2, 4$ ist), und können begreiflich $T \equiv 3$ wählen.

So haben wir die Gerade $6-P-3$ bekommen und die übrige Konfigurationsgerade, die mit dem Punkte 6 inzidiert, muss schon die Gerade $2-4-6$ sein. Anderenfalls würden durch den Punkt 6 nur drei Geraden gehen.

Die weitere Konfigurationsgerade $4-Q-7$ bekommt man aus der Beziehung $258-619-4Q7$ (mit Hinsicht auf die Verbindung $4-Q$). Analogisch gewinnen wir aus $675-PQ3-348$ die Gerade $3-4-8$ und gleichzeitig sehen wir, dass $Q:6,0,8$ ist.

Die übrige Gerade, welche mit dem Punkte Q inzidiert, muss also die Gerade $3-9-Q$ sein. So kommen wir aber zu einem Widerspruch zwischen der Relation $5Q1-897-23P$ und der Geraden $2-P-Q$, weil diese zwei Geraden nicht identisch sein können.

IV. Auch im vorletzten Falle (IV) werden wir beweisen, dass keine neue Konfiguration entstehen kann.

Aus der Anführung (IV) sehen wir vorerst, dass der Punkt 8 von den Punkten $5,6,0$ separiert ist, also $8:5,6,0$. In Bezug auf die Existenz der Konfigurationsgeraden $1-P-8$ kann man die letzten zwei Geraden, die durch den Punkt 8 gehen, als $8-Q-a$, $8-b-c$ bezeichnen (wobei $a,b,c\equiv 2,3,4$ sind) und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a\equiv 2$, $b\equiv 3$, $c\equiv 4$ wählen, d. h. $8-Q-2$, $8-3-4$.

Der Punkt 2 muss von dem Punkte 0 separiert sein (siehe $897-Q51-200$), deswegen können die letzten letzten zwei Geraden, die durch den Punkt 0 gehen, nur die Geraden $0-P-T$ und $0-Q-V$ sein (wobei $T,V\equiv 3,4$ sind). Der Permutation (34) halber, können wir $T\equiv 3$ und $V\equiv 4$ ansetzen. Dann muss aber der Punkt X auf der Geraden $2-3-X$ mit dem Punkte 1 verbunden sein und wir stossen auf einen Widerspruch mit der Relation $2Q8-30P-X41$ (weil $1:4$ und deswegen auch $1:X$ ist).

Im Gegenteil zu diesen vier oben beschriebenen Fällen, die ein negatives Resultat ergeben haben, führt der letzte Fall (V) zu einer realisierbaren Konfiguration, wie sich aus dem folgenden ergibt.

V. Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass der Punkt 8 mit dem Punkte Q verbunden ist.

In diesem Falle können wir den Punkt 3 auf die Gerade $8-Q$ legen. So bekommen wir die Gerade $3-Q-8$ und aus den Relationen $879-Q51-366$, $576-916-003$ die Bedingung $3:1,0,6$. Mühelos beweisen wir, dass der Punkt 0 mit dem Punkte 6 verbunden sein muss (anderenfalls gehen durch den Punkt 6 oder 0 nur drei verschiedene Konfigurationsgeraden), und der dritte Schnittpunkt der Geraden $6-0$ mit der Kubik kann nur der Punkt 2 sein, d. h. $2-0-6$ ist eine weitere Konfigurationsgerade. Nach dem Resultate $3:1,0,6$ muss auch schon $3-P$ sein und mit dieser Geraden kann nur der Punkt 5 inzidieren. (Siehe $260-Q15-P99$, $169-059-77P$, d. h. $P:7,9$). Es ist also $3-P-5$.

Aus der Beziehung $8P1-950-737$ folgt ein Widerspruch, da der Punkt 3 schon (der Separierung $3:1,0,6$ nach) mit dem Punkte 7 verbunden sein muss.

So haben wir bewiesen, dass unsere Voraussetzung $8-Q$ falsch ist und deswegen ergibt sich:

(1) $$Q:8.$$

In diesem Falle muss aber die dritte durch den Punkt 8 gehende Konfigurationsgerade die Gerade $3-4-8$ sein und in der Anführung (V) kann man für a den Punkt 8 setzen. Deswegen ist $b \equiv 5, 6, 0$ (siehe die Gerade $2-a-b$). Nach der zulässigen Permutation (79), (60) kann man weiterhin voraussetzen, dass für den Punkt b nur die Möglichkeiten $b \equiv 5, 6$ vorkommen.

Wäre der Punkt 0 mit beiden Punkten P, Q verbunden, dann könnte man $3-P-0$, $4-Q-0$ zulassen und der Relation $3P0-4Q0-82\bar{0}$ nach wäre auch der Punkt b mit dem Punkte $\bar{0}$ identisch. Weil $x \equiv 5, 6$ ist, ist auch $\bar{0} \equiv 5, 6$ und im Falle, dass $\bar{0} \equiv 5$ ist, stossen wir auf einen Widerspruch 005 mit der Geraden $0-5-9$. Auch im Falle, dass $\bar{0} \equiv 6$ ist (d. h. $2-8-6$, 006) widerspricht die Gerade $5-1-Q$ der Beziehung $006-978-512$.

Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 0 mindenstens von einem der Punkte P, Q separiert sein muss, und da durch den Punkt 0 vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss gleichzeitig $3-0$ und $4-0$ (aber $3-4-0$) sein. Begreiflich inzidiert der Punkt 0 nur mit einer der Geraden $2-3$ oder $2-4$ und der zulässigen Permutation (34) halber kann man diese Gerade als $2-4-0$ bezeichnen.

Diese Ergebnisse fassen wir (zur besseren Übersicht) folgenderweise zusammen:

(2) $$Q:8,\ 3-4-8,\ 2-4-0,\ 3-0,\ 2-8-b\ (b \equiv 5, 6).$$

Aus der Relation $81P-402-37Q$ bekommt man die Gerade $3-7-Q$ und der dritte Schnittpunkt der Geraden $3-0$ (mit der Kubik) kann nur der Punkt P sein, also $3-0-P$.

Wir überzeugen uns leicht, dass der Punkt 6 mit dem Punkte 4 verbunden ist und dass auf der Geraden $4-6$ entweder der Punkt P, oder Q liegen muss (siehe V).

Im Falle $4-6-P$ bekommt man aus der Beziehung $46P-071-258$ die Gerade $2-5-8$ (siehe 2) und die Separierung $8 : Q, 0, 6$; $Q : 0, 6$; $0 : 6$ d. h. der Punkt 8 wäre vom Type A.

Deswegen muss $4-6-Q$ sein und aus $071-4Q6-239$ bekommen wir die Gerade $2-3-9$.

Dann ergibt sich $4 : 1, 7, 9$ und die übrige durch den Punkt 4 gehende Konfigurationsgerade kann nur die Gerade $4-P-5$ sein. Mühelos finden wir die letzte (sechzehnte) Konfigurationsgerade $2-8-6$ und können dieses Kapitel mit folgendem Hilfsatz schliessen:

Lemma 2. *Wenn sich auf einer irreduziblen Kubik wenigstens ein B^3-Punkt (aber schon kein A-Punkt) befindet, dann ist das Schema dieser Konfiguration:*

$$
S_1 \qquad \begin{array}{cccccc}
\underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & 5-6-7 \\
5\ 7\ 9\ 8 & P\ 6\ 3\ 4 & P\ Q\ 4 & P\ Q & 7-8-9 \\
Q\ 0\ 6\ P & Q\ 8\ 9\ 0 & 0\ 7\ 8 & 5\ 6 & 9-0-5\,.
\end{array}
$$

Bemerkung. In dem zehnten Kapitel wird bewiesen, dass dieses Schema wirklich realisierbar ist.

3. KAPITEL

Es sei *1* der B^1-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Nach der Definition existieren drei Konfigurationsgeraden, die mit keinem der Punkte *1, 2, 3, 4* inzidieren; diese Geraden kann man als $5-8-9$, $5-6-7$, $0-P-Q$ bezeichnen. Wenn wir alle äquivalenten Möglichkeiten ausschliessen, bekommen wir nur folgendes Teilschema:

$$
(\mathrm{R}) \qquad \begin{array}{ccccccc}
\underline{1} & 5-6-7 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & 2-3 \\
5\ 6\ 7\ 8 & 5-8-9 & .\ . & .\ . & .\ . & 2-4 \\
P\ Q\ 9\ 0 & 0-P-Q & .\ . & .\ . & .\ . & 3-4\,.
\end{array}
$$

Wir setzen voraus, dass

(P_1) der Punkt $\bar{1}$ ein Konfigurationspunkt ist.

In diesem Falle kann begreiflich nur $\bar{1} \equiv 1, 2, 3, 4$ sein, weil der Punkt *1* mit den übrigen Konfigurationspunkten verbunden (und von dem Punkte $\bar{1}$ getrennt) ist. Aus der Relation $5P1-6Q1-70\bar{1}$ sehen wir, dass $\bar{1}$ von dem Punkte *1* verschieden sein muss (anderenfalls fallen die Geraden *701*, *791* zusammen).

Aus diesem Grunde kann man $\bar{1} \equiv 2$ wählen. Weiter erhält man aus $5P1-6Q1-$ -702, $791-0QP-225$, $5P1-801-9Q2$ vor allem die Separierung $2:5, 1$ und deswegen müssen schon $7-0-2$, $9-Q-2$ die Konfigurationsgeraden sein.

Auf der Geraden $3-4$ können nicht gleichzeitig beide Punkte *0* und *Q* liegen; und der zulässigen Permutation $(68), (79), (0Q)$ nach kann man voraussetzen, dass diese Eigenschaft der Punkt *0* hat. Die letzte Gerade, die durch den Punkt *0* geht, ist also $3-0-a$ (wobei $a \equiv 5, 6, 9$ ist), d. h. $0:4$ und wir können jetzt das Schema R mit den vorangeführten Ergebnissen vervollständigen:

$$
(\mathrm{R}_1) \qquad \begin{array}{ccccccc}
\underline{1} & 5-6-7 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & 2-3-X\,; & 112, 225, 0:4 \\
5\ 6\ 7\ 8 & 5-8-9 & 0\ Q & .\ 0 & .\ . & 2-4-Y & \\
P\ Q\ 9\ 0 & 0-P-Q & 7\ 9 & .\ a & .\ . & 3-4-Z & a \equiv 5, 6, 9.
\end{array}
$$

Wir nehmen zuerst den Fall

$$a \equiv 5\,, \quad \text{d.h.} \quad 3-0-5$$

in Betracht.

Direkt aus R_1 sehen wir, dass $4 : 1, 0, 5$ ist. Weil durch den Punkt Z (auf der Geraden $3-4-Z$) vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss $Z \equiv 7, 9, Q$ sein.

Im Falle $Z \equiv 7$ ist die Relation $305-719-488$ mit der Verbindung $4-8$ im Widerspruch (siehe oben $4 : 1, 0, 5$). Im Falle $Z \equiv 9$, d. h. $3-4-9$ bekommt man aus $305-917-486$ die Konfigurationsgerade $4-8-6$ und aus der Relation $081-765-$ $-24P$ die Gerade $2-4-P$. Der Punkt P muss zwar mit dem Punkte 3 verbunden sein, kann aber nicht auf der Geraden $2-3$ liegen, d. h. $3-P-t$ $(t \equiv 6, 7, 8)$ und daraus ergibt sich die letzte durch den Punkt Q gehende Konfigurationsgerade $4-Q-7$; ausserdem haben wir die vierte Gerade, auf welcher der Punkt 7 liegt, erhalten, d. h. $7 : 3, 8, P$. Aus der Relation $350-47Q-96P$ fogt, dass $P : 6, 9, 7$ ist, und auf der Geraden $3-P-t$ muss nur $t \equiv 8$ sein. Dann aber widerspricht die ursprüngliche Voraussetzung $2-3$ der Beziehung $958-Q0P-233$.

Daraus ist ersichtlich, dass nur $Z \equiv Q$ sein kann und wir können diese Teilergebnisse festlegen:

$$3-0-5, \quad 3-4-Q, \quad 4 : 1, 0, 5\,. \tag{1}$$

Direkt aus der Relation $530-6Q1-748$ bekommt man die Gerade $7-4-8$. Wäre $2-4-P$, dann widerspricht $24P-985-Q71$ der Geraden $Q-6-1$ und deswegen muss $2-4-6$ sein.

Durch den Punkt 4 geht noch die letzte Gerade $4-P-9$ und daraus ist ersichtlich, dass $3 : 1, 7, 9$ ist.

Zu einem weiteren Widerspruch kommen wir, wenn wir voraussetzen, dass $2-3-8$ ist ($225-847-366$ und deswegen $3 : 6, 1, 7, 9$). Es ist also $2-3-P$ die vorletzte und $3-6-8$ die letzte Konfigurationsgerade. In diesem Falle ist aber der Punkt 2 $(2 : 1, 5, 8)$ vom Type B^3, was begreiflich ausgeschlossen ist.

Unter der Voraussetzung, dass $a \equiv 5$ ist, kann keine neue Konfiguration entstehen und wir können den Fall

$$a \equiv 6, \quad \text{d. i.} \quad 3-0-6$$

untersuchen.

Aus der Relation $567-801-939$ sehen wir, dass die Punkte 3 und 9 separiert sind, und für den Punkt X auf der Geraden $2-3-X$ sind nur zwei Alternativen $X \equiv 8, P$ möglich.

Der Fall $X \equiv P$ führt aber zum Widerspruch der Beziehung $993-522-8QP$ mit der Geraden $0-Q-P$ und deswegen muss $X \equiv 8$ sein, d. h. $2-3-8$ ist die weitere Konfigurationsgerade.

Durch den Punkt 9 geht noch die letzte Gerade $4-9-t$ (wobei $t \equiv 6$, P ist). Begriflich kann nur $t \equiv P$ sein, weil anderenfalls aus der Beziehung $496-29Q-Y31$ und der Separierung $1 : 3$ folgt, dass der Punkt Y von dem Punkte 1 separiert ist. Der Schnittpunkt Y (der Geraden $2-4-Y$ mit der Kubik) muss aber schon mit dem Punkte 1 verbunden sein.

Es ist also $4-9-P$ und die weiteren Konfigurationsgeraden $4-2-6$ und $3-P-7$

bekommen wir aus der Beziehungen *P51–92Q–426*, *2Q9–801–3P7* (wenn wir die Verbindung *3–P* erwägen). Deswegen sind die letzten Konfigurationsgeraden *4–8–Q* und *3–4–5*, was aber der Relation *993–522–8Q8* widerspricht.

Damit ist auch der Fall $a \equiv 6$ ausgeschlossen und aus dem Teilschema (R_1) bleibt – unter der Voraussetzung (P_1) – nur die Möglichkeit

$$a \equiv 9, \quad \text{d.i.} \quad 3-0-9$$

zu lösen.

Daraus folgt unmittelbar, dass $9 : 4, 6, P$ ist, und im Falle *2–3–8* wäre der Punkt *9* vom Type B^3. Deswegen bekommen wir für den Punkt X auf der Geraden *2–3* nur die drei Möglichkeiten $X \equiv 5, 6, P$.

Wegen der Relation *225–309–X78* sehen wir, dass nicht $X \equiv 5, 6$ sein kann (mit Rücksicht auf die Gerade *5–6–7*) und daraus ergibt sich die Gerade *2–3–P* und die Separierung $P : 7, 8, 9$ (siehe *225–309–P78*). Die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt P gehen kann, muss schon die Gerade *4–6–P* sein. Leicht finden wir nun die zwei letzten Geraden *3–6–8*, *2–4–8*, die mit den Punkten *6* und *2* inzidieren.

Dann aber widerspricht die Beziehung *702–6P4–5Q8* der Geraden *5–9–8*.

Die Voraussetzung (P_1) führt also nicht zu einer neuen Konfiguration und wir werden weiterhin erwägen, dass der Punkt $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist. Wenn wir uns über die Beziehungen $5P1-6Q1-70\bar{1}$ und $5P1-801-9Q\bar{1}$ klar werden, bekommen wir die Separierung $7 : 0$ und $9 : Q$.

Diese Ergebnisse fassen wir folgendermassen zusammen:

$$(V_1) \qquad 7 : 0, \; 9 : Q\,.$$

Der Punkt $\bar{1}$ ist nicht konfigurationell.

Wir setzen weiter voraus, dass

(P_2) mindestens einer der Punkte *0*, *Q* nicht mit den Geraden *2–3*, *2–4*, *3–4* inzidiert.

Der zulässigen Permutation (*68*), (*79*), (*0Q*) nach könnte man diese Eigenschaft dem Punkte *0* zuschreiben und das Teilschema (R) – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – folgendermassen erweitern:

$$(R_2) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\;6\;7\;8 \\ P\;Q\;9\;0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 5-8-9 \\ 0-P-Q \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline .\,0 \\ .\,a \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline .\,0 \\ .\,b \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline .\,r \\ .\,s \end{array} \quad \begin{array}{l} 2-3-X\,; \\ 2-4-Y \\ 3-4-Z\,. \end{array} \quad \begin{array}{l} 7:0; 9:Q \\ \\ \\ \end{array}$$

Auch die Permutation (*23*) ist zulässig und deswegen bekommen wir für die zwei Konfigurationspunkte a, b folgende drei Möglichkeiten:

$$(M_{ab}) \qquad a \equiv 5,\; b \equiv 6\,; \quad a \equiv 5,\; b \equiv 9\,; \quad a \equiv 6,\; b \equiv 9\,.$$

Nehmen wir zuerst die Möglichkeit:

(M_{56}) d. i. $2-0-5,\ 3-0-6$

in Betracht, dann sehen wir (der Relation $657-081-399$ nach), dass $3:9$ ist, und wir überzeugen uns leicht von der Separierung $9:3,\ 0,\ Q$. Die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt 9 gehen, können also nur die Geraden $2-9-c$ und $4-9-d$ sein, wobei $c, d \equiv 6, P$ sind. Daraus ist ersichtlich, dass keiner der Punkte $7, 8, Q$ auf der Geraden $3-4$ liegen kann, wenn wir natürlich voraussetzen, dass durch diese Punkte vier Konfigurationsgeraden gehen müssen.

Für den Punkt Z auf der Geraden $3-4$ kommt also nur die Möglichkeit $Z \equiv P$ vor, d. h. $3-4-P$ ist die Konfigurationsgerade. Dann folgt aus den obenangeführten Ergebnissen, dass $c \equiv P$ und $d \equiv 6$ ist (also $3-4-P,\ 4-9-6$), was aber der Verbindung $2-3$ widerspricht (wenn wir die Relationen $993-15P-784,\ 801-756-$ $-42Q,\ P0Q-964-232$ berücksichtigen).

In der weiteren Möglichkeit

(M_{59}), d. i. $2-0-5,\ 3-0-9$

setzen wir für einen Augenblick voraus, dass $Q-7$ ist, wobei begreiflich $T \equiv 2, 3, 4$ der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik ist. Aus der Beziehung $791-$ $-Q0P-T35$ folgt, dass nur $T \equiv 3$ sein kann (anderenfalls wäre $T-3$ und gleichzeitig $3:5$), d. h. $Q-7-3$ ist die vorletzte Konfigurationsgerade, auf der der Punkt Q liegt, und die letzte – durch diesen Punkt gehende-Gerade muss (der Separierung $Q:8, 9, 5$ nach) die Gerade $2-4-Q$ sein.

Folglich $Q73-250-469,\ 3Q7-469-Z11$, was aber der Verbindung $Z-1$ widerspricht.

Die Voraussetzung $Q-7$ führt also auf einen Widerspruch und deswegen muss $Q:7$ sein. Leicht überzeugen wir uns, dass $Q:5, 7, 9$ ist.

Suchen wir nur den Punkt $T \equiv 2, 3, 4$ auf der Geraden $8-Q-T$.

Die Voraussetzung $T \equiv 4$ kann man ausschliessen, weil in diesem Falle $16Q-$ $-958-774$, d. h. $4:7, 1, 5, 0$ wäre.

Auch die Möglichkeit $T \equiv 2$ führt sogleich zu einem Widerspruch. In diesem Falle würden aus der Beziehungen $16Q-958-772$ und $16Q-052-878$ die unzulässige Separierung $7:2, 0, 8, Q$ folgen.

Es ist also nur die letzte Möglichkeit $T \equiv 3$, d. h. $8-Q-3$ übriggeblieben.

Die Separierung $7:3$ (und daraus $7:3, 0, Q$) bekommt man aus der Relation $16Q-958-773$ und deswegen können die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt 7 gehen, nur die Geraden $2-7-u$ und $4-7-v$ sein (wobei $u, v \equiv$ $\equiv P, 8$ sind).

Den Fall $u \equiv 8,\ v \equiv P$ führt aber (der Beziehung $278-390-X11$ nach) auf einen Widerspruch mit der Verbindung $X-1$. In dem übriggebliebenen Falle $u \equiv P$, $v \equiv 8$ kommen wir zu der unzulässigen Separierung $3:1, 5, 7, P$. Diese erhalten wir sofort aus der Beziehung $052-917-3PP$, wenn wir uns darüber klar werden, dass der Punkt 3 schon von den Punkten $1, 5, 7$ getrennt ist.

Daraus ergibt sich, dass nicht einmal die Möglichkeit M_{59} zu einer Konfiguration führt und wir können uns dem letzten Falle

$$(M_{69}), \quad \text{d. h.} \quad 2-0-6,\ 3-0-9$$

zuwenden.

Vor allem folgt aus der Relation $567-801-929$ die Separierung $9:2$ und daraus die letzte Konfigurationsgerade $4-9-t$, die durch den Punkt 9 gehen kann (wobei $t \equiv 6, P$ ist).

Nehmen wir zuerst an, dass $t \equiv 6$, d. h. $903-964-22Z$ ist. Deswegen kann nicht $Z \equiv 7, 8, P, Q$ sein (weil anderenfalls $3-4-Z$, $Z:2$ wäre und durch den Punkt Z keine vier Konfigurationsgeraden gehen können). Die letzte zulässige Möglichkeit für den Punkt Z ist also $Z \equiv 5$ und die daraus folgende Gerade $3-4-5$ impliziert die Relation $309-589-412$. Dies aber widerspricht den Bedingungen $2-4$ und $1:2$.

Es ist deswegen $t \equiv P$ und die entsprechende Konfigurationsgerade ist $4-9-P$. Der Beziehung $971-P51-46\bar{1}$ nach bekommt man die Separierung $4:6$ (oder in Zusammenfassung $4:1, 0, 6$) und die letzte Konfigurationsgerade, auf der der Punkt 6 liegt, muss schon die Gerade $3-6-v$ sein (wobei $v \equiv 8, P$ ist).

Um durch den Punkt Y auf der Geraden $2-4$ vier Konfigurationsgeraden legen zu können, muss $Y \equiv 5, 8$ sein und im Falle $Y \equiv 5$ wäre $4: Q, 1, 0, 6$, wie wir sofort aus der Relation $206-5P1-4QQ$ ersehen. Es muss also $Y \equiv 8$, d. h. $2-4-8$ sein. Daraus folgt $v \equiv 8$ und $3-6-8$ ist die letzte Gerade, die noch durch den Punkt 8 gehen kann.

Die vorletzte und letzte – durch den Punkt 7 gehende – Konfigurationsgerade erhält man aus der Beziehungen $299-801-437$ resp. $903-9P4-2Q7$. Es ist also $3-4-7$, $2-Q-7$ und die übriggebliebene Gerade, auf der der Punkt P liegt, kann nur die Gerade $2-3-P$ sein; dies aber widerspricht der Relation $791-Q0P-235$.

Es ist also notwendig aus den weiteren Erwägungen die Voraussetzung (P_2) auszuschalten und wir sehen, dass die beiden Punkte 0 und Q auf den Geraden der Menge $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen müssen. Es ist begreiflich gleichgültig, welche zwei Geraden wir aus dieser Menge wählen, und deswegen können wir das letzte Teilschema aus diesem Kapitel folgendermassen festlegen:

$$(R_3) \quad \begin{array}{cccccc}
\underline{\quad 1 \quad} & 5-6-7 & \underline{\ 2\ } & \underline{\ 3\ } & \underline{\ 4\ } & 2-3-0\,; \\
5\ 6\ 7\ 8 & 5-8-9 & .\ . & .\ Q & .\ 0 & 2-4-Q \\
P\ Q\ 9\ 0 & 0-P-Q & .\ . & .\ b & .\ a & 3-4-Z
\end{array} \qquad \begin{array}{l} 7:0;\ 9:0 \\ \text{Der Punkt } \bar{1} \text{ ist kein} \\ \text{Konfigurationspunkt.} \end{array}$$

Für das Paar ab, wobei $a \equiv 5, 6, 9$ und $b \equiv 5, 7, 8$ ist, kann man – in Hinblick auf die zulässige Permutation $(68), (79), (0Q), (34), (ab)$ – nur folgende Möglichkeiten in Betracht ziehen:

$$(M_{ab}), \qquad ab \equiv 57, 58, 97, 67, 68\,.$$

Jede dieser Möglichkeiten werden wir jetzt getrennt erwägen. Zuerst:

(M_{57}), d. h. $4-0-5,\ 3-Q-7$.

Wegen den Beziehungen $Q61-450-278$, $37Q-081-226$ erhält man die Separierung $2:6,\ 1,\ 5$ und die Konfigurationsgerade $2-7-8$. Daraus muss die letzte Gerade, die mit dem Punkte 2 inzidiert, $2-9-P$ sein. Dann aber widerspricht $0-P-Q$ der Relation $226-791-8PQ$.

(M_{58}), d. i. $4-0-5,\ 3-Q-8$.

Aus $Q16-895-377$ folgt $7:3,\ 0,\ Q$ und die übrigen zwei Geraden, die durch den Punkt 7 gehen, können nur die Geraden $7-8-c$, $7-P-d$ sein (wobei $c, d \equiv 24$ ist). Im Falle, dass $c \equiv 2$ ist, stossen wir auf einen Widerspruch der Relation $782-PQ0-d33$ mit der Verbindung $d-3$. Analogisch widerspricht die übriggebliebene Möglichkeit $c \equiv 4$ der Beziehung $773-810-492$ (wenn wir die Geraden $2-4-Q$ vor Augen halten).

(M_{97}), d. i. $4-0-9,\ 3-Q-7$.

Es ist zu erwägen, dass sich $3-4-5$ und 221 ergibt (aus den Beziehungen $971-0QP-435$, $345-0QP-221$).

Unter der Voraussetzung, dass $7-8$ ist, muss der dritte Punkt dieser Geraden der Punkt T sein, wobei $T \equiv 2, 4$ ist, und die Gerade $1-Q-6$ führt zu einem Widerspruch mit der Relation $782-904-11Q$, resp. $784-302-Q1Q$.

Der Punkt 7 muss deswegen von dem Punkte 8 getrennt sein und die letzte Gerade, die durch den Punkt 7 geht, ist die Gerade $7-P-T$ (wobei $T \equiv 2, 4$ ist). Der Fall $T \equiv 2$ widerspricht (wie oben) der Relation $7P2-302-QQ1$ (siehe die Verbindung $1-Q$) und daraus folgt, dass $T \equiv 4$, d. h. $7-P-4$ sein muss.

Dann aber ergibt sich $5P1-801-9Q\bar{1}$, $719-42Q-P2\bar{1}$, und da $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist, muss ausser der Separierung $2:1,\ 5,\ 7$ noch $2:P$ eintreten, was begreiflich unzulässig ist.

(M_{67}), d. i. $4-0-6,\ 3-Q-7$.

Der Widerspruch folgt augenblicklich aus der Relation $765-Q0P-341$ (denn wir wissen, dass $3-4$ und $1:3,\ 4$ ist).

(M_{68}), d. i. $4-0-6,\ 3-Q-7$ zu lösen,

wobei wir augenblicklich auf einen Widerspruch zwischen der Relation $6Q1-081-43\bar{1}$ und der Verbindung $3-4$ stossen, wenn wir stets voraussetzen, dass $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist.

Die Teilergebnisse dieses Kapitels kann man also im folgenden Nebensatz zusammenfassen:

Lemma 3. *Unter der Vorassetzung, dass eine Konfiguration mit B^1-Punkten (aber ohne B^3- und B^4-Punkte) existiert, können die Punkte dieser Konfiguration nicht auf einer irreduziblen Kubik liegen.*

4. KAPITEL

Es sei *1* der Konfigurationspunkt vom Typ B^2, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Die drei Konfigurationsgeraden, welche nicht mit den Punkten *1, 2, 3, 4* inzidieren, kann man als die Geraden $0-5-P$, $6-0-7$, $P-8-9$ bezeichnen. Einfach begreifen wir auch, dass für die Geraden, welche durch den Punkt *1* gehen, nur folgende drei Möglichkeiten entstehen können:

M_1	$1-5-Q,\ 1-0-8,\ 1-P-6,\ 1-7-9,$
M_2	$1-0-Q,\ 1-P-6,\ 1-5-8,\ 1-7-9,$
M_3	$1-7-Q,\ 1-P-6,\ 1-5-8,\ 1-0-9.$

Ausserdem muss der Punkt Q mit allen drei Punkten *2, 3, 4* verbunden sein, kann aber nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen.

Weil wir für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, so viele Möglichkeiten erhalten haben, wird dieses Kapitel im Vergleich mit den vorangegangenen umfangreicher sein.

Wir konzentrieren uns zuerst auf den Fall M_1 und erwägen die Beziehungen $067-8P9-111$, $111-5P0-Q68$. Daraus folgen die Separierungen $Q:6, 8$ und $8:6$.

Der Punkt Q ist deshalb mindestens von einem der Punkte *7, 9, 0* getrennt und mit den drei übrigen Punkten dieser Menge muss er schon verbunden sein.

Der zulässigen Permutation $(79), (68), (0P)$ nach kann man voraussetzen, dass die drei Punkte, mit denen der Punkt Q verbunden ist, entweder eine Menge $7, 9, P$ oder $7, 0, P$ bilden. Auch die willkürliche Permutation der Punkte *2, 3, 4* ist zulässig (und darauf werde ich in analogischen Fällen nicht mehr hinweisen). Man kann deswegen das Teilschema für den Fall M_1 folgendermassen anführen:

R_1	*1*	*2*	*3*	*4*			
	5 0 P 7	*. Q*	*. Q*	*. Q*	$2-3-X,$	$0-5-P,$	$111, Q68,\ 8:6$
	Q 8 6 9	*. 7*	*. P*	*. a*	$2-4-Y,$	$0-6-7,$	$Q:6, 8$
					$3-4-Z,$	$P-8-9,$	$a \equiv 0, 9.$

Berücksichtigen wir zuerst den Fall

$$a \equiv 0, \quad \text{d. h.} \quad 4-Q-0$$

und setzen voraus, dass $2-8$ ist. Für den Punkt t $(t \equiv 5, 7)$ folgt die Beziehung $27Q-86Q-t0\bar{Q}$ und unter der Voraussetzung, dass $t \equiv 5$ ist, erhält man die Identität $\bar{Q} \equiv P$ (siehe die Gerade $5-0-P$), dies widerspricht der Geraden $Q-P-3$.

Der zweite Fall (wo $t \equiv 7$, d. h. $\bar{Q} \equiv 6$ ist, siehe $7-0-6$) führt auf einen Widerspruch mit der fremden Geraden $Q68$.

Daraus ist erischtlich, dass $2:8$ sein muss, dann aber ist der Punkt 2 von vier Punkten (namentlich $8, P, 0, 1$) separiert.

Wir können also den Fall $a \equiv 0$ ausschliessen und sich dem Falle

$$a \equiv 9\,, \quad \text{d.i.} \quad 4-Q-9$$

zu widmen.

Aus der Beziehung $2Q7-4Q9-Y\bar{Q}1$ ersehen wir (wenn wir die Verbindung $Y-1$ berücksichtigen), dass $\bar{Q}$ ein Konfiguratinspunkt sein muss. Begreiflich ist nur $\bar{Q} \equiv$ $\equiv 0, Q$ (siehe $QQ\bar{Q}$, $Q68$). Im Falle $\bar{Q} \equiv 0$ widerspricht die Beziehung $QQ0-P98-$ -341 den Bedingungen $1:3,4$ und $3-4$. Es muss also QQQ sein, d. h. Q ist ein Inflexionspunkt.

Die zwei Konfigurationsgeraden $4-2-5$, $4-3-6$ bekommt man aus den Relationen $179-QQQ-524$, $89P-QQQ-643$ und die letzte Gerade, die durch den Punkt 4 geht, muss also die Gerade $4-7-8$ sein. Die letzte Gerade, auf der der Punkt 6 liegt, ist $2-6-9$ (der Beziehung $5Q1-487-269$ nach) und der Punkt 7 ($7:3,5,P$) ist vom Type B^1. Das schliessen wir aus und sehen gleichzeitig, dass die Möglichkeit M_1 zu keiner neuen Konfiguration führen kann.

Deswegen werden wir uns der Möglichkeit M_2 zuwenden und das dazugehörige Teilschema folgendermassen anführen:

$$R_2 \qquad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0\ P\ 5\ 7 & .\ Q & .\ Q & .\ Q \\ Q\ 6\ 8\ 9 & .\ a & .\ b & .\ c \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 2-3-X, & 0-5-P \\ 2-4-Y, & 0-6-7 \\ 3-4-Z, & P-8-9\,. \end{array}$$

Es ist klar, dass die Verbindung $8-0$ und $8-7$ nicht gleichzeitig eintreten kann. Ein solcher Fall ermöglicht auf der Geraden $0-8$, bzw. $8-7$ die Punkte 2 und 3 zu wählen, dann aber wäre der Punkt 4 – welcher von den Punkten $1, 0, 8$ getrennt ist – vom Type B^3.

Deswegen ergeben sich nur folgende drei Möglichkeiten:

M_{21} $\quad 8:0,7$
M_{22} $\quad 8:0,\ 8-7$ und
M_{23} $\quad 8-0,\ 8:7$.

Nehmen wir zuerst die Möglichket

M_{21}, $\quad$ d. i. $8:0,7$

in Betracht.

Aus der Beziehung $719-05P-688$ ist ersichtlich, dass noch $8:6$ ist. Also $8:0,7,6$ und deswegen muss der Punkt Q auf einer von den Geraden liegen, die durch den Punkt 8 gehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man diese Gerade als $4-8-Q$ bezeichnen und die letzte Gerade, die noch mit dem Punkte 8 inzidiert, kann nur die Gerade $2-3-8$ sein. Aus der Beziehung $6P1-791-08\bar{1}$ und der Separierung $8:0$ folgt, dass der Punkt $\bar{7}$ kein Konfigurationspunkt sein kann, und daraus folgt (siehe die Beziehung $581-0Q1-P4\bar{1}$) die Separierung $4:P$. Mit Rücksicht auf die zulässige Permutation (23) kann man voraussetzen, dass die letzte durch den Punkt P gehende Gerade die Gerade $2-P-t$ ($t \equiv Q, 7$) ist.

Wäre $t \equiv Q$, würde man zum Widerspruch der Grundbedingungen $3-4$, $1:3$ mit der Beziehung $2PQ-868-314$ kommen.

Es muss also $2-P-7$ sein. Die übrige durch den Punkt 7 gehende Konfigurationsgerade ist die Gerade $4-5-7$, da schon $4:1, P$ ist und der Relation $Q10-886-457$ nach kann also die Gerade 457 keine fremde Gerade sein. Im diesen Falle ist der Punkt 3 ($3:1, P, 7$) vom Typ B^3.

M_{22}, d. h. $8:0,\ 8-7$.

Auf die Gerade $8-7$ kann man vor allem den Punkt 2 legen, d. h. $2-8-7$, und aus den Beziehungen $719-05P-688$, $197-688-PP2$ folgt die Separierung $8:0, 6$ und $2:1, P$. Weiter sehen wir aus der Anführung R_2, dass auf der Geraden $2-Q-a$ nur $a \equiv 5, 6, 9, 0$ sein kann. Mit Hinblick auf die Beziehung $278-Q01-a65$ kann man sofort die Möglichkeit $a \equiv 0$ ausschliessen (siehe $0-6-7$). Im Falle $a \equiv 5$ ergibt sich nicht nur 565, $2-Q-5$ sondern auch $Q96$ (siehe $2PP-581-Q96$), was zu einer unzulässigen Separierung $6:9, Q, 5, 8$ führt.

Deswegen bleiben nur zwei Möglichkeiten $a \equiv 9, 6$ zu lösen.

Im Falle

$$a \equiv 9, \quad \text{d. i.} \quad 2-Q-9,\ 965$$

sehen wir, dass $6:5, 8, 9$ wäre und die zwei übrigen durch den Punkt 6 gehenden Konfigurationsgeraden kann man als die Geraden $6-Q-3$, $2-4-6$ bezeichnen. Die Separierung $5:2, 6, 9$ folgt unmittelbar aus der Beziehung $868-791-255$ und deswegen sind $3-5-7$, $4-Q-5$ die letzten zwei Geraden, die noch mit dem Punkte 5 inzidieren können. Dann aber widerspricht die Relation $735-0Q1-668$ dem Ergebnis 886.

Aus der Möglichkeit M_{22} ist nur der Fall

$$a \equiv 6, \quad \text{d. i.} \quad 2-Q-6,\ 665$$

übriggeblieben.

Wäre $9-0-t$, dann ist $t \equiv 3, 4$, und die Relation $98P-076-t21$ widerspricht den Resultaten $t-2$, $1:2$. Es ist also $9:0$. Weiter folgt aus $688-6P1-595$, $851-P50-$ $-99Q$ die Separierung $9:0, 5, Q$. Der zulässigen Permutation (34) halber kann man $9-6-3$ und $2-4-9$ als die letzten zwei Konfigurationsgeraden wählen, die durch den Punkt 9 gehen. Die Gerade $2-3-5$ ergibt sich aus $89P-760-235$ und folglich kann auf der Geraden $5-4-v$ $v \equiv 7, Q$ sein. Mit Hinsicht auf die Verbindung $3-Q$ und Beziehung $665-924-3Qv$ muss $v \equiv 7$, d.h. $5-4-7$, $3-Q-7$ entstehen und durch den Punkt 7 gehen fünf verschiedene Konfigurationsgeraden.

Die ersten zwei Möglichkeiten M_{21} und M_{22} (für die Anführung R_2) können also keine neuen Konfigurationen ergeben (wie wir gerade festgestellt haben). Die letzte Möglichkeit

M_{23}, d. i. $8-0$, $8:7$

führt dagegen zu einer neuen Konfiguration, wie wir uns übrigens gleich überzeugen werden.

Man legt (selbstverständlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit) den Punkt 2 auf die Gerade $0-8$, also $2-0-8$. Mit Rücksicht auf $719-05P-688$, $688-P50-$ -112 folgt, dass $8:6, 7$ ist.

Jetzt werden wir für einen Augenblick voraussetzen, dass

(P_1) $9:2$

ist.

Durch den Punkt 9 müssen vier Konfigurationsgeraden gehen, deswegen ist $9-3$, $9-4$, aber nicht $3-4-9$. Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 9 mit dem Punkte Q verbunden sein muss, weil anderenfalls der Punkt 9 ($9:0, 2, Q$) vom Type B^1 wäre. Begreiflich kann man $9-Q-4$ wählen und die weitere Konfigurationsgerade $2-4-6$ bekommt man aus $0Q1-89P-246$.

Wäre $3-6-Q$, dann wäre die letzte durch den Punkt 9 gehende Gerade die Gerade $3-9-5$ und die Beziehungen $10Q-886-523$, $395-280-5PP$ sind dann im Widerspruch mit der Geraden $5-P-0$.

Da aber $3-6-Q$ nicht entstehen kann, muss die letzte Gerade, die durch den Punkt 6 geht (und gleichzeitig auch die letzte mit dem Punkte 9 inzidierbare Gerade) die Gerade $3-6-9$ sein.

Wir haben für den Punkt a auf der Geraden $2-Q-a$ nur folgende drei Möglichkeiten: $a \equiv 5, 7, P$. Wäre $a \equiv 7$, dann ist der Punkt 0 ($0:3, 4, 9$) vom Typ B^1. Auch der Fall $a \equiv P$ führt zu einem Widerspruch, da aus $8P9-0Q1-227$, $89P-$ $-112-57Q$ die unzulässige Separierung $7:2, 5, Q, 8$ folgt. Es bleibt also nur die letzte Möglichkeit $a \equiv 5$, d. h. $2-Q-5$ übrig.

Eine der Geraden, auf welchen der Punkt 7 liegt, muss die Gerade $2-3-7$ sein (anderenfalls wäre $3-Q-7$ und auf der Geraden $2-3$ könnte nur der Punkt P liegen, was zu einem Widerspruch der Beziehung $23P-0Q1-876$ mit der Geraden $0-7-6$ führt). Folglich $208-719-3QP$, d. h. $3-Q-P$ und der Punkt P – der von den Punkten $2, 4, 7$ getrennt ist – ist ein B^1-Punkt.

Daraus ist ersichtlich, dass unsere Voraussetzung (P_1) falsch ist, und weiterhin kann man voraussetzen, dass

(P_2) $9-2$, 688, 112, $2-0-8$, $8:6, 7$

ist.

Leicht überzeugen wir uns, dass auf der Geraden $2-9$ einer der Punkte $3, 4$ liegen muss (im Falle $2-9-Q$ wäre $6:2, 5, Q, 8$, was aus den Beziehungen $89P-0Q1-$

-226, $89P-112-56Q$ hervorgeht). Begreiflich können wir auf die Gerade $2-9$ den Punkt 4 legen, also $2-9-4$. Die weitere Konfigurationsgerade $4-5-6$ bekommen wir aus $112-8P9-564$ und aus der Separierung $4:1, 0$. Daraus ist nämlich ersichtlich, dass nicht $4:5, 6$ sein kann, und deswegen kann 564 nicht eine fremde Gerade sein.

Für den Punkt c auf der Geraden $4-Q-c$ (siehe R_2) können wir die Werte $c \equiv 7, 8, P$ einsetzen und mühelos beweisen wir dann, dass $c \equiv 7$ sein muss, weil wir anderenfalls – mit Rücksicht auf die Beziehung $249-0Q1-8c7$ – zu einem Widerspruch der Geraden $8c7$ mit 886, resp. $8-P-9$ kommen. Daraus folgt $4-Q-7$ und die Bedingung 877.

Auf der Geraden $2-Q$ kann nicht der Punkt 5 liegen, denn aus $2Q5-076-844$ folgt $8:6, 7, 4$ und der Punkt 8 wäre vom Type B^3. Einfach überzeugen wir uns, dass man (unter diesen Bedingungen) auf die Gerade $2-Q$ nur den Punkt 6 legen kann, d. h. $2-Q-6$ ist die weitere Konfigurationsgerade und ausserdem ist $3:1, 0, 6$.

Für den dritten Schnittpunkt f der Geraden $2-Q-f$ mit der Kubik ergibt sich $f \equiv Q, 5$. Ist $f \equiv Q$, dann widerspricht die Verbindung $2-Q-6$ der Beziehung $89P-0Q1-236$. Es ist deswegen $3-9-5$ und aus den Relationen $112-Q74-099$, $099-851-237$, $208-719-3QP$ erhalten wir die Geraden $2-3-7$, $3-Q-P$, so dass die letzte Konfigurationsgerade die Gerade $3-4-8$ sein muss.

Dieses Totalschema vermerken wir uns, da es tatsächlich zu einer neuen Konfiguration führt und – wie wir übrigens weiter sehen werden – auch realisierbar ist:

$$S_2 \qquad \begin{array}{c} \underline{\;1\;} \\ 0\ P\ 5\ 7 \\ Q\ 6\ 8\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;2\;} \\ 0\ Q\ 3\ 4 \\ 8\ 6\ 7\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;3\;} \\ 9\ Q\ 4 \\ 5\ P\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;4\;} \\ 5\ Q \\ 6\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0-5-P \\ 0-6-7 \\ P-8-9\,. \end{array}$$

Wir werden uns jetzt mit der letzten Möglichkeit dieses Kapitels beschäftigen. Zuerst führen wir das dazugehörige Totalschema an:

$$R_3 \qquad \begin{array}{c} \underline{\;1\;} \\ 7\ P\ 5\ 0 \\ Q\ 6\ 8\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;2\;} \\ .\ Q \\ .\ . \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;3\;} \\ .\ Q \\ .\ . \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\;4\;} \\ .\ Q \\ .\ . \end{array} \quad \begin{array}{c} 2-3-X, \\ 2-4-Y, \\ 3-4-Z, \end{array} \quad \begin{array}{c} 0-5-P \\ 0-6-7 \\ P-8-9\,. \end{array}$$

Wir setzen voraus, dass der Punkt Q von dem Punkte P und 5 getrennt ist, d. h.

$$(P_r) \qquad Q:P, 5, r\,, \quad \text{wobei} \quad r \equiv 6, 8, 9, 0$$

ist.

Der Reihe nach treten wir zuerst an die Möglichkeit

$$(P_6), \qquad \text{d. i.} \quad Q:P, 5, 6$$

heran.

Die drei übrigen Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, kann man begreiflich als $2-Q-8$, $3-Q-9$, $4-Q-0$ bezeichnen. Da der Punkt Z (auf der

Geraden $3-4$) mit dem Punkt 1 verbunden sein muss, sehen wir aus $390-40Q-$ $-Z1\bar{Q}$, dass $Z-\bar{Q}-1$ eine Konfigurationsgerade ist und dass für den Konfigurationspunkt $\bar{Q}$ nur die Möglichkeiten $5, 6, P, Q$ in Betracht kommen. Dann ergibt sich $20Q-39Q-XP\bar{Q}$ und daraus ist ersichtlich, dass im Falle $\bar{Q} \equiv 5$ genau $X \equiv 0$ sein muss (siehe die Konfigurationsgerade $0-5-P$) und dass durch den Punkt 0 eine fünfte Gerade geht. Im Falle $\bar{Q} \equiv 6$ wäre analogisch $X \equiv 1$ (siehe $6-P-1$) und die fremde Gerade 231 würde den Grundbedingungen $1:2$, $2-3$ widersprechen. Folglich können wir für den Punkt $\bar{Q}$ nur die Werte P oder Q in Betracht nehmen.

Wenn wir noch für einen Augenblick voraussetzen, dass $8-6$ ist, dann muss der dritte Punkt $T \equiv 3, 4$ dieser Geraden mit dem Punkte Q verbunden sein (siehe $815-670-TQP$), was aber der Separierung $P:Q$ widerspricht und TQP keine Konfigurationsgerade ist. Unsere Voraussetzung $8-6$ ist falsch und diese zwei Punkte sind getrennt.

Im Falle $Z \equiv 8$ wäre auch $\bar{Q} \equiv 5$ (wenn man $Z-\bar{Q}-1$ mit $8-5-1$ vergleicht) und unter diesen Umständen begreifen wir sofort, dass die letzte durch den Punkt 8 gehende Konfigurationsgerade die Gerade $8-7-T$ sein muss (wobei $T \equiv 3, 4$ ist). Wäre $T \equiv 3$, dann widerspricht die Beziehung $3Q9-7Q1-8\bar{Q}0$ den Ergebnissen $8:0$, $\bar{Q}-0$. Es ist also $T \equiv 4$, d. h. $8-7-4$ und im Hinblick auf die Relationen $478-019-QQP$, $QQP-901-346$, $28Q-39Q-XPP$ sehen wir, dass $\bar{Q} \equiv P$ und $3-4-6$ ist.

Für den Punkt X kommen auf der Geraden $2-3$ also nur zwei Möglichkeiten $X \equiv 7$, P in Betracht. Im Falle $X \equiv 7$ kommen wir zu einem Widerspruch der Geraden $3-5-P$ (die noch durch den Punkt 3 gehen kann) mit der Konfigurationsgeraden $0-5-P$.

Es bleibt also nur die Möglichkeit $X \equiv P$ übrig, d. h. PPP, $2-3-P$ und $3-5-7$ ist die letzte Gerade, die durch den Punkt 3 geht. Jetzte aber widerspricht die Beziehung $23P-Q71-856$ der Geraden $8-5-1$.

Damit ist auch der Fall (P_6) gelöst und wir können an den Fall

(P_8), d. i. $Q:5, P, 8$

herantreten.

Die übrigen durch den Punkt Q gehenden drei Geraden kann man als $2-Q-6$, $3-Q-9$, $4-Q-0$ bezeichnen und aus der Relation $39Q-40Q-Z1\bar{Q}$ entsteht die weitere Konfigurationsgerade $Z-1-\bar{Q}$ (weil der Punkt Z mit dem Punkte 1 verbunden sein muss). Für den Konfigurationspunkt $\bar{Q}$ ergeben sich also folgende Möglichkeiten: $\bar{Q} \equiv Q, P, 5, 8$.

Man bezeichnet mit t den dritten Punkt der Geraden $12t$. Folglich $Q71-Q62-\bar{Q}0t$ und in den Fällen $\bar{Q} \equiv Q, 5, P$ wäre $t \equiv 4, P, 5$ und die Gerade würde den Geraden $2-4-Y$, $1-6-P$, $1-8-5$ widersprechen. Es muss also $\bar{Q} \equiv 8$ sein, d. h. $QQ8$, und aus $1-\bar{Q}-Z$ folgt deswegen $Z \equiv 5$, d. h. $3-4-5$.

Dann ist aber $Y \equiv \bar{1}$ (siehe $6P1-091-78\bar{1}$, $QQ8-607-24\bar{1}$), was mit Rücksicht auf die Verbindung $Y-1$ ausgeschlossen ist.

Im dritten möglichen Falle

(P_9), d. i. $Q : P, 5, 9$

kann man vor allem die drei übriggebliebenen Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, als $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-0$ wählen und mit t den dritten Punkt auf der Geraden PQ bezeichnen, also PQt. Wäre t ein Konfigurationspunkt, dann wäre $t \equiv Q, P, 5, 9$ was begreiflich die Beziehung $05P-71Q-68t$ ausschliesst. Es kann also t kein Konfigurationspunkt sein, d. h. $P : Q$ und ausserdem noch $6 : 8$.

Wenn für einen Augenblick voraussetzen, dass $8 : 7$ und daraus $8 : 6, 7, 0$ ist, dann muss die letzte durch den Punkt 8 gehende Gerade die Gerade $2-4-8$ sein. Daraus folgt $518-0Q4-P72$, $P89-7Q1-230$ und ein Widerspruch mit $2 : 0$, $2-3$.

Es muss also $8-7$ sein und der besseren Übersicht halber führen wir die bisherigen Teilergebnisse folgenderweise an:

(1) $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-0$, PQt, $68t$, $8 : 6, 0$, $8-7$, t ist kein Konfigurationspunkt.

Für den Punkt T der Geraden $8-7-T$ kann man nur die Werte $2, 4$ einsetzen. Aus den Relationen $89P-706-T11$. $P98-Q17-t0T$ und der Tatsache, dass t kein Konfigurationspunkt ist, folgt die Beziehung $T : 0$. Deswegen ist offensichtlich $T \equiv 2$ (siehe $4-0-Q$). So haben wir $8-7-2$, 112 und $2 : 0$ erhalten und weiter sehen wir aus der Beziehung $581-091-PP2$, dass auch $2 : 1, 0, P$ ist. Für den Punkt Y auf der Geraden $2-4-Y$ ergibt sich $782-0Q4-63Y$, d. h. Y kann nur $5, 9$ sein.

Wäre $Y \equiv 9$, dann stösse $6Q2-901-341$ an $3-4$, $1 : 3$. Es ist also $2-4-5$ und $3-5-6$ ist die letzte Gerade, welche noch durch den Punkt 5 gehen kann. Leicht sehen wir, dass $4-7-9$, $2-3-9$, $3-4-P$ die drei übriggebliebenen Konfigurationsgeraden sein müssen. In diesem Falle ist aber der Punkt 2 – der von den Punkten $1, 0, P$ getrennt ist – vom Type B^1.

Es verbleibt noch über die letzte Möglichkeit

(P_0), d. h. $Q : P, 5, 0$

zu sprechen.

Man bezeichnet $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-9$ als die letzten drei druch den Punkt Q gehenden Konfigurationsgeraden. Wäre 8 mit 6 verbunden, dann könnte auf dieser Geraden nur der Punkt 4 liegen und wegen der Relation $158-706-QP3$ würde man zu einen Widerspruch mit $Q-8-3$ kommen. Es muss also $8 : 6$ sein.

Infolge der Beziehung $346-89P-QQ1$ und der Geraden $Q-1-7$ kann auch nicht $Z \equiv 6$ sein und die letzte durch den Punkt 6 gehende Gerade muss also eine Gerade $6-T-t$ sein, wobei $T \equiv 3, 4$ und $t \equiv 5, 9$ ist. Den Fall $T \equiv 4$ (und daraus $t \equiv 5$, siehe $4-9-Q$) kann man sofort ausschliessen, was wir sogleich begreifen, wenn wir uns über $645-Q38-2Z1$ und $2 : 1$, $1-Z$ klar werden. Folglich $6-3-t$, wobei $t \equiv 5, 9$ ist.

Im Falle $t \equiv 9$, d. h. $6-3-9$ muss $5 : Q, 9, 6$ und gleichzeitig $5-7-S$ sein, wobei

$S \equiv 2, 4$ ist. Der Relation $581-7Q1-S3\bar{1}$ halber sehen wir, dass unter der Voraussetzung $S \equiv 2, 4$ auch $\bar{1} \equiv X, Z$ wäre, was begreiflich nicht möglich ist, da der Punkt 1 mit beiden Punkten X und Z verbunden sein muss.

Es ist also $t \equiv 5$, d. h. $6-3-5$. Wenn wir erwägen, dass die Punkte $5, 7, 9$ eine fremde Gerade bilden (siehe $61P-3Q8-579$), folgen daraus die Separierungen $5 : 7, 9, Q$; $9 : 5, 6, 7$. Die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch die Punkte 5 und 9 gehen, müssen deswegen die Geraden $2-3-9$, $2-4-5$ sein und dann widersprechen die Beziehungen $579-8Q3-112$, $112-876-9QQ$ der Geraden $9-Q-4$.

Damit haben wir bewiesen, dass

(T_1) der Punkt Q mindestens mit einem der Punkten 5, P verbunden ist.

Man setzt voraus (für einen Augenblick), dass Q mit beiden Punkten 5 und P verbunden ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man auf die Gerade $5-Q$ den Punkt 2 und analogisch auf $P-Q$ den Punkt 3 legen.

Aus den Beziehungen $5P0-Q71-266$, $05P-71Q-683$ folgt, dass $6 : 2$ ist, weil schon der Punkt 6 mit dem Punkte 3 (so wie mit dem Punkte 4) verbunden sein muss, und man bekommt die Konfigurationsgerade $6-8-3$. Durch den Punkt 9 müssen vier Geraden gehen und deswegen kann nicht $2-4-9$ sein. Der Separierung $2 : 1, P, 6$ nach sehen wir, dass $2-9$ ist, dass aber nicht $2-3-9$ sein kann (anderenfalls widerspricht die Relation $239-581-Q60$ der Geraden $7-6-0$). Daraus folgt, dass auf der Geraden $2-9$ nur der Punkt 7 liegen kann, d. h. dass $2-9-7$ ist.

In diesem Falle aber würde die Gerade $2-Q-5$ der Beziehung $\bar{7}60-982-\bar{2}35$ widersprechen und daraus ist ersichtlich, dass

(T_2) gleichzeitig nicht $5-Q$ und $P-Q$ entstehen kann.

Im Falle $P-Q$ ergeben sich für den Punkt $\bar{1}$ zwei Möglichkeiten, oder besser gesagt wir werden jetzt unterscheiden, ob dieser Punkt konfigurationell oder nichtkonfigurationell ist.

(P_1) Vor allem setzen wir voraus, dass $\bar{1}$ nicht ein Konfigurationspunkt ist (begreiflich stets unter der Bedingung $P-Q$).

Der Anführung T_2 nach muss schon $Q : 5$ sein und auf der Geraden $P-Q$ kann man den Punkt 2 wählen, d. h. $2-Q-P$. Aus den Beziehungen $16P-17Q-\bar{1}02$, $16P-109-\bar{1}78$, $P50-Q17-286$ sehen wir sofort, dass $7 : 8$ und $2 : 0, 1$ ist. Folglich kann 286 nicht eine fremde Gerade sein. Also $2-8-6$. Diese Teilergebnisse fassen wir der besseren Übersicht halber zusammen:

$$(\mathrm{I}) \qquad 2-Q-P,\ 2-8-6,\ 2:0,1,\ 7:8,P,\ Q:5.$$

Der Punkt 7 muss noch von einem der Punkte $2, 5, 9$ separiert sein. Es sind also folgende Möglichkeiten zu erwägen:

$$(\mathrm{I}_r) \qquad 7:8,P,r\,(r \equiv 9,5,2).$$

$$(\mathrm{I}_9), \qquad \text{d. h.}\quad 7:8,P,9.$$

Die beiden übrigen Geraden, welche durch den Punkt *7* gehen, kann man als *7−3−5*, *2−4−7* bezeichnen und aus *P50−Q71−239* folgt die weitere Konfigurationsgerade *2−3−9*. Dann ist *4−5−t* $(t \equiv 6, 9)$ die letzte durch den Punkt *5* gehende Konfigurationsgerade. Deswegen ergibt sich aus *427−581−t6Q* noch *6 : Q*.

Wäre $t \equiv 9$, dann kann der Punkt *6* noch auf der Geraden *3−4* liegen und die Gerade *4−Q−0* ergibt sich aus *375−61P−4Q0*. In diesem Falle wäre der Punkt *0* (*0 : 2, 3, 8*) vom Type B^1.

Auch in dem zweiten Falle, d. h. $t \equiv 6$ und folglich *4−5−6*, *66Q* kommt man zu einem Widerspruch, weil *4−Q−9* die letzte durch den Punkt *9* gehende Gerade ist und die daraus hervorgehende Beziehung *274−66Q−809* der Geraden *8−P−9* widerspricht;

I_5), d.h. *7 : 8, P, 5* .

Durch den Punkt *7* kann man noch die Geraden *7−9−3*, *2−4−7* legen und *2−3−5* ergibt sich aus *P98−Q71−235*. Analogisch wie oben ist *4−5−t* $(t \equiv 6, 9)$ die letzte Gerade, die noch durch den Punkt *5* gehen kann. Daraus folgt die Beziehung *427−581−t6Q* und Separierung *6 : Q*.

Im Falle $t \equiv 6$, d. h. *4−5−6*, *66Q* muss wieder *4−Q−9* sein, was aber die Beziehung *274−66Q−089* impliziert, welche der Geraden *8−9−P* widerspricht.

Es muss also $t \equiv 9$, d. h. *4−5−9* und *96Q* sein. Dann ist *3−4−6* die letzte durch den Punkt *6* gehende Gerade und die weitere Konfigurationsgerade *4−Q−8* bekommt man leicht aus *379−61P−4Q8*. Daraus ergibt sich die sechzehnte Gerade *3−Q−0* und der Punkt *8* (*8 : 3, 7, 0*) ist vom Type B^1.

Bei der letzten Möglichkeit

(I_2), d. h. *7 : 8, P, 2*

kann man *3−7−5* und *4−7−9* als zwei Geraden, die sich im Punkte *7* schneiden, wählen und aus *P50−Q71−239*, *P98−Q71−245* folgen die Geraden *2−3−9*, *2−4−5*.

Im Falle *3−4−6* wäre *5* (*5 : Q, 6, 9*) vom Type A, im Falle *3−4−0* wäre *0* (*0 : 2, 8, Q*) vom Type B^1 und in dem letzten Falle *3−4−8* wäre *8* (*8 : 7, 0, Q*) vom Type B^1.

Damit haben wir bewiesen, dass

(T_3) unter der Voraussetzung *P−Q*, der Punkt $\bar{7}$ ein Konfigurationspunkt sein muss.

Den Anführungen T_2, T_3 nach kann man weiter voraussetzen, dass *Q : 5* ist, und auf der Geraden *P−Q* den Punkt *2* wählen. Es ist also *2−Q−P*. Folglich *P50−−Q17−286*, *6P1−091−78*$\bar{7}$ und wegen des Widerspruches *78*$\bar{7}$ mit *7Q1* bzw. *682* kann sich nicht $\bar{7} \equiv 1$ bzw. $\bar{7} \equiv 2$ ergeben. Begreiflich wählen wir $\bar{7} \equiv 3$, d. h. *113*, *378*.

Wäre *378* eine fremde Gerade, dann *3 : 7, 8, 1, P*. Deswegen ist *3−7−8* eine Konfigurationsgerade und *2 : 1, 6, 8*; *8 : 2, 6, 0*. Dann kann durch den Punkt *8* noch die Gerade *4−8−Q* gehen und mit Rücksicht auf *6 : 2* ist der Punkt *6* schon mit beiden Punkten 3 und 4 verbunden, aber inzidiert nicht mit der Geraden $3-4$. $3-6-Q$ ist also eine der Geraden, die durch den Punkt 6 gehen.

Erwägt man die Gültigkeit der Beziehung $230-P61-QQ9$, $3Q6-4Q8-Z92$, $2:1,6,8$, dann kann man auf der Konfigurationsgeraden $Z-9-2$ für Z nur 5 einsetzten, d. h. $2-9-5$, $3-4-5$.

In diesem Augenblick wäre aber der Punkt 4 (der von den Punkten $1, P, 0$ getrennt ist) vom Type B^1.

Den obenangeführten Resultaten nach sahen wir, dass

$$(T_4) \qquad P:Q \text{ und gleichzeitig } Q-5 \text{ sein muss .}$$

Auf die Gerade $Q-5$ legt man den Punkt 2, also $2-Q-5$, und $5P0-Q71-266$ impliziert die Separierung $2:6,1$. Im Falle $8-6$ wäre $T \equiv 2,3,4$ der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik und man würde zu einem Widerspruch der Relation $851-607-TPQ$ mit den Grundbedingungen $T-Q$, $Q:P$ kommen. Daraus folgt die Separierung $6:8,2$ und der besseren Übersicht halber führen wir folgendermassen die drei übrigen Möglichkeiten an:

$$(P_r) \qquad 2-Q-5,\ 266,\ 2:6,1,\ P:Q,\ 6:8,2,r \quad (\text{wobei } r \equiv Q,9,5 \text{ ist}) .$$

Bei der Möglichkeit

$$(P_Q), \qquad \text{d. h.} \quad 6:8,2,Q$$

kann man $3-6-5$, $4-6-9$ als die letzten zwei Geraden wählen, die mit dem Punkte 6 inzidieren. Mühelos begreifen wir, dass mit dem Punkte 7 noch die Geraden $2-7-t$ $(t \equiv 8,9,P)$ und $3-4-7$ inzidieren. Mit Rücksicht auf die Beziehung $347-662-59t$, kann nur $t \equiv 9$ sein, d. h. $2-7-9$, 995, und die Relation $995-076-123$ widerspricht den Bedingungen $1:2$, $2-3$.

$$(P_9), \qquad \text{d. h.} \quad 6:8,2,9 .$$

Analogisch wählt man $3-Q-6$, $4-5-6$ als die letzten zwei Geraden, die durch den Punkt 6 gehen. Wäre $9-Q$, dann inzidiert diese Gerade mit dem Punkte 4 und $8P9-564-11Q$ schliesst $1-7-Q$ aus. Es ist also $9:Q$, d. h. zusammen $9:6,Q,5$, und auf der Geraden $9-4$ liegt noch der Punkt 2 (siehe $3Q6-456-Z22$, $9-2$), d. h. $2-4-9$ ist die vorletzte und $9-3-7$ die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt 9 geht.

Im Falle $4-Q-0$ widerspricht $Z-1$ der Beziehung $389-4Q0-Z11$.

Im Falle $4-Q-8$ widerspricht $98P-7Q1-346$ der Beziehung $3-Q-6$.

Daraus aber ergibt sich $Q:0,8,9$ und noch $Q:P$, was begreiflich unzulässig ist.

Bei der letzten Möglichkeit:

$$(P_5) \qquad \text{d. h.} \quad 6:8,2,5$$

wählen wir $3-Q-6$, $4-6-9$ als die letzten Geraden, die mit dem Punkte 6 inzidieren, und da durch den Punkt 7 vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss gleichzeitig $2-7$, $3-7$, aber nicht $2-3-7$ sein. Auf keiner dieser Geraden kann der Punkt 8 liegen (siehe $2-7-8$ und der Widerspruch $1-Q-7$ mit $P98-662-147$, bzw. im Falle $3-7-8$ die Gerade $1-X$ und die Beziehung $378-2Q5-X11$). Es muss notwendig $7:8$ sein und ausserdem sehen wir, dass $4-Q-8$, $2-3-8$ die übrigen durch 8 gehenden Konfigurationsgeraden sind. Dann widerspricht aber die Relation $P98-662-143$ den gut bekannten Beziehungen $1:4$, $4-3$.

Die Ergebnisse dieses Kapitels kann man mit Hilfe des folgenden Nebensatzes zusammenfassen:

Lemma 4. *Besteht eine Konfiguration mit B^2- (aber nicht mit A-, B^1-, B^3-, B^4-) Punkten, die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidiert, dann kann man das Schema dieser Konfiguration folgendermassen ausdrücken*:

	1	2	3	4	$0-5-P$
S_2	0 P 5 7	0 Q 3 4	9 Q 4	5 Q	$0-6-7$
	Q 6 8 9	8 6 7 9	5 P 8	6 7	$P-8-9$.

5. KAPITEL

In der im Literaturverzeichniss angeführten Arbeit [13] hat J. Metelka bewiesen, dass in den Konfigurationen mit A-Punkten keine D-Punkte vorkommen können. Diese D-Punkte ergeben sich auch nicht in den obenangeführten Schemen S_1 und S_2. Die einzige Konfiguration mit den D-Punkten, in welcher gleichzeitig keine B-Punkte vorkommen, ist vom Type $D_4C_7E_1$. Das Totalschema

9	Q	0	P	1
1 2 3 7	1 2 3 4	3 4 6	2 4 5	2 0
4 5 6 8	6 7 8 5	5 8 7	8 7 6	3 P

dieser Konfiguration kann man mit den Punkten und Geraden in der Projektionsebene über dem Körper der komplexen Zahlen realisieren, wie ich übrigens in meiner Arbeit (16) schon früher bewiesen habe.

Aus der Beziehung $194-350-228$ ersehen wir fast augenblicklich den Widerspruch mit der Geraden $P-2-8$. Daraus ist ersichtlich, dass die Konfigurationspunkte nicht auf einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung liegen.

Man kann also den folgenden Hilfsatz dieses kurzen Kapitels aussprechen:

Lemma 5. *Mit einer irreduziblen Kubik kann keine Konfiguration mit D-Punkten inzidieren.*

6. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen von Konfigurationen, welche nur E- und C-Punkte enthalten, unter der Voraussetzung der Existenz mindestens eines E^1-Punktes.

Es sei 1 ein E^1-Punkt, der von den Punkten $2, 3, 4$ getrennt ist. Dann bilden bekanntlich (siehe die Definition der E^1-Punkte) die Punkte $2, 3, 4$ eine Konfigurationsgerade und ausserdem existieren zwei weitere Geraden, welche mit den vier Punkten $1, 2, 3, 4$ nicht inzidieren. Diese Geraden kann man als $5-6-7$, $5-8-9$ bezeichnen, da sie einen gemeinsamen Konfigurationspunkt haben.

Das Teilschema von sechzehn Konfigurationsgeraden kann man deswegen folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{\quad 1 \quad} & \underline{\quad 2 \quad} & \underline{\quad 3 \quad} & \underline{\quad 4 \quad} & 2-3-4 & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 5-6-7\,; & 1:2,3,4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 5-8-9 & \end{array} \tag{1}$$

Wir beziechnen weiter die drei übrigen Konfigurationspunkte als $0, P, Q$.

Der Punkt 1 muss mit dem Punkte 5 verbunden sein und auf der Geraden $1-5$ kann nur ein einziger der Punkte $0, P, Q$ liegen.

Wählt man

$$1-5-Q\,, \tag{2}$$

was zulässig ist, dann inzidiert die letzte durch den Punkt 5 gehende Konfigurationsgerade mit einem Punkte der Menge $2, 3, 4$ und auf dieser Geraden muss der Punkt 0 oder P liegen. Begreiflich kann man diese Gerade als

$$2-5-P \tag{3}$$

annehmen und dann ergibt sich $5 : 3, 4, 0$.

Wenn wir uns über die Verbindung 0 mit den Punkten $3, 4$ klar werden und wenn wir gleichzeitig erwägen, dass der Punkt 0 nicht auf der Geraden $3-4$ liegen kann, dann sehen wir, dass 5 vom Typ B ist.

Man kann also den folgenden Hilfsatz aussprechen:

Lemma 6. *Es existieren keine Konfigurationen vom Typ $E_i C_{12-i}$, die mindestens einen E^1-Punkt enthalten.*

7. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Totalschemen vom Typ $E_i^2 C_{12-i}$ unter der Voraussetzung der Existenz wenigstens eines E^2-Punktes.

Zum Unterschied von den vorhergehenden Kapiteln wird man jetzt nicht ausdrücklich voraussetzen, dass die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kubik inzidieren.

Anfangs ist es zweckmässig die Konfigurationspunkte nicht mit Zahlen, sondern mit Buchstaben zu bezeichen.

Es sei Z ein E^2-Punkt, der von den Punkten P_1, P_2, P_3 separiert ist. Nach der Definition ergibt sich vorerst $P_1 - P_2 - P_3$ und es existieren genau zwei Konfigurationsgeraden, die nicht mit den Punkten P_1, P_2, P_3, Z inzidieren und auf welchen sechs verschiedene Konfigurationspunkte liegen. Diese Geraden werden wir weiterhin kurz als q, r bezeichnen und auf die Gerade q (bzw. r) werden wir die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 (bzw. R_1, R_2, R_3) legen. Die übrigenen zwei Konfigurationspunkte mögen U_1, U_2 sein.

So haben wir zwölf Konfigurationspunkte in fünf disjunkte Mengen geteilt:

$$\bar{z} \equiv (Z); \quad \bar{p} \equiv (P_i); \quad \bar{q} \equiv (Q_i); \quad \bar{r} \equiv (R_i); \quad \bar{u} \equiv (U_j), \quad \text{wobei} \quad i = 1, 2, 3; \; j = 1, 2 \text{ ist.} \tag{1}$$

Es sei weiter $\bar{s}$ die Vereinigung $\bar{q} + \bar{r}$.

Analogisch kann man auch die sechzehn Konfigurationsgeraden in drei disjunkte Menge teilen. In die Menge $\bar{m}_1$ legen wir die Geraden $p \equiv P_1 - P_2 - P_3$, $q \equiv Q_1 - Q_2 - Q_3$ und $r \equiv R_1 - R_2 - R_3$. Vier Geraden, die durch den Punkt Z gehen, reihen wir in die Menge $\bar{m}_2$ ein und die neun übrigen Geraden gehören zur Menge $\bar{m}_3$.

Der besseren Übersicht halber kann man symbolisch das Teilschema folgendermassen anführen:

$$\begin{array}{llcccc}
 & p \equiv P_1 - P_2 - P_3 & \underline{\quad Z \quad} & \underline{\;P_1\;} & \underline{\;P_2\;} & \underline{\;P_3\;} \\
(2) & r \equiv R_1 - R_2 - R_3 & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \underline{q \equiv Q_1 - Q_2 - Q_3} & \underline{\ldots\ldots} & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & & \bar{m}_3 &
\end{array}$$

Der Punkt Z ist nur von den Punkten der Menge $\bar{p}$ getrennt, so dass ein beliebiger Punkt S_i (aus der Menge $\bar{s}$) schon mit dem Punkte Z verbunden sein muss. Eine der Geraden, die durch den Punkt S_i geht, gehört zur Menge $\bar{m}_2$, die zweite zur Menge $\bar{m}_1$ (siehe 2) und deswegen müssen die zwei übrigen Geraden zur Menge $\bar{m}_3$ gehören. Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt S_i genau mit zwei Punkten aus der Menge $\bar{p}$ verbunden ist und von dem dritten Punkte dieser Menge getrennt sein muss.

Man kann also behaupten, dass $P_1 : S_1, S_3, Z$; $P_2 : S_2, S_5, Z$; $P_3 : S_3, S_4, Z$ ist.

Überprüfen wir vorerst, dass die Punkte S_i, S_j welche von dem Punkte P_i getrennt sind – also $P_i : S_i, S_j, Z$ – auf keiner der Geraden q (resp. r) liegen können. Anderenfalls würden diese zwei Punkte S_i, S_j gleichzeitig mit Z verbunden sein, d. h. $S_i - Z$, $S_j - Z$ und ausserdem $S_i - S_j - S_k$. In diesem Falle wäre der Punkt P_i (im Widerspruch zur Voraussetzung) vom Typ B. Wir sehen also, dass sich

$$P_i : Q_i, R_i, Z \tag{3}$$

für alle $i = 1, 2, 3$ ergibt.

Weiter wird man beweisen, dass

(T_1) kein Punkt der Menge $\bar{s}$ von beiden Punkten der Menge $\bar{u}$ getrennt sein kann.

Den Beweis dieser Behauptung bekommt man mit Hilfe des Widerspruches.

Man setzt voraus, dass wenigstens ein Punkt der Menge $\bar{s}$ (z. B. der Punkt Q_1) von beiden Punkten der Menge $\bar{u}$ getrennt ist, also $Q_1 : U_1, U_2, P_1$. Dann kann begreiflich der Punkt P_1 nicht ein C-Punkt sein (dem Ergebnisse 3 nach) und er muss vom Typ E sein. D. h. $Q_1 - R_1 - Z$ ist eine Konfigurationsgerade und in diesem Falle stellen wir schon leicht die dritten Punkte auf den Geraden $Q_1 - P_2$, $Q_1 - P_3$ fest. Man bekommt also die Beziehungen:

(a) $$Q_1 : P_1, U_1, U_2;\ Q_1 - R_1 - Z;\ Q_1 - P_2 - R_3;\ Q_1 - P_3 - R_2 .$$

P_1 ist ein E-Punkt. Deswegen existieren genau zwei Konfigurationsgeraden, die mit keinem der Punkte P_1, Q_1, R_1, Z inzidieren. Sofort ersehen wir, dass keine von diesen Geraden zu den Mengen $\bar{m}_1$ und $\bar{m}_2$ gehören kann, und deswegen müssen beide Geraden zur Menge $\bar{m}_3$ gehören. Man kann also behaupten, dass

(b) $$v_2 \equiv P_2 - X_2 - Y_2,\ v_3 \equiv P_3 - X_3 - Y_3$$

ist, da diese Geraden nicht mit dem Punkte P_1 inzidieren können.

Auf den Geraden v_2, v_3 liegt auch keiner der Punkte Q_1, R_1 und gemäss dem Ergebnisse (3) erhalten wir nur folgende zwei Möglichkeiten: $X_2, Y_2 \equiv Q_3, U_1, U_2$; $X_3, Y_3 \equiv Q_2, U_1, U_2$.

Unter Hinweis auf die Bedingung, dass P_1 ein E-Punkt ist, muss er sogar vom Typ E^2 sein. Die Geraden v_2, v_3 können sich also nicht im Konfigurationspunkte schneiden und daraus (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) folgt:

(c) $$v_2 \equiv P_2 - Q_3 - U_2 ,\quad v_3 \equiv P_3 - Q_2 - U_1 .$$

Man wird jetzt die durch den Punkt R_1 gehenden Geraden näher untersuchen. Wir kennen schon zwei von diesen Geraden (der Anführung (a) und dem Ergebnisse (2) nach). Die zwei übriggebliebenen Geraden (die durch den Punkt R_1 gehen) müssen also $R_1 - P_2 - U_1$ und $R_1 - P_3 - U_2$ sein (siehe die Anführung 2). Folglich $R_1 : P_1$, Q_2, Q_3 und der Punkt R_1 ist vom Typ B.

Damit ist die Behauptung T_1 völlig bewiesen.

Weiter kann man behaupten, dass

(T_2) alle Punkte der Menge $\bar{p}$ vom Type C sind.

Für den Beweis setzen wir selbstverständlich das Gegenteil voraus, nämlich dass wenigstens ein Punkt der Menge $\bar{p}$ (z. B. P_1) ein E-Punkt ist. Wegen des vorangeführten Ergebnisses ist der Punkt P_1 von dem Punkte Q_1 getrennt und der Punkt Q_1 kann deswegen nur von zwei Punkten der Menge (U_1, U_2, R_2, R_3) separiert sein.

Die Separierung $Q_1 : P_1, U_1, U_2$ widerspricht der Behauptung T_1 und im Falle $Q_1 : R_2, R_3, P_1$ wäre der Punkt Q_1 vom Type B. Es muss also $Q_1 : P_1, U_i, R_j$ sein und man kann begreiflich voraussetzen, dass

(d) $$Q_1 : P_1, U_1, R_2$$

ist. Ausserdem wissen wir schon, dass sich $Q_1 - R_1 - Z$ ergibt.

Aus den Ergebnissen (2), (3) und der Anführung (d) folgt, dass auf der Geraden $Q_1 - P_3$ der Punkt U_2 liegt, und folglich kann mit der Geraden $P_3 - R_2$ nur ein einziger Punkt aus der Gruppe U_1, Q_2 inzidieren.

Beide diese Möglichkeiten sind ausgeschlossen, weil im Falle $P_3 - R_2 - U_1$ (resp. $P_3 - R_2 - U_2$) der Punkt Q_1 (resp. P_2) vom Type B wäre.

Damit ist auch die Behauptung T_2 völlig bewiesen.

Weil alle Punkte der Menge $\bar{p}$ vom Typ C sind, kann man das Teilergebnis (3) folgendermassen vervollständigen:

(4) Es ist $P_i : Q_i, R_i, Z;\ Q_i : R_i$ für alle Werte $i = 1, 2, 3$

gültig.

Weiter behaupte ich, dass

(T_3) $$U_1 - U_2$$

ist.

Zum Beweis dieser Behauptung setzen wir voraus, dass im Gegenteil $U_1 : U_2$, d. h. $U_1 : U_2, S_i, S_j$ ist (denn beide Punkte der Menge $\bar{u}$ müssen schon mit dem Punkte Z und mit allen Punkten der Menge $\bar{p}$ verbunden sein). Unter der Voraussetzung $S_i : U_2$ wäre $S_i : U_1, U_2$ im Widerspruch mit der Behauptung T_1. Es muss also $S_i - U_2$ und analogisch $S_j - U_2$ sein.

Die Punkte U_2, S_i, S_j liegen auf keiner Konfigurationsgeraden, weil eine solche Gerade nicht in den Mengen $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$ vorkommt. (Ausserdem gemäss der Verbindung $S_i - U_2$ können diese Punkte nich einmal auf einer fremden Geraden liegen). Der Punkt U_1 ist also vom Type C und folglich $S_i : S_j$, so dass $U_1 : U_2, Q_i, R_t$; $Q_i : R_t$ ist.

Dem Ergebnis (4) nach sehen wir, dass $Q_i : P_i, R_i, U_1, R_t$ und folglich $R_t \equiv R_i$ ist, was zu den folgenden Beziehungen führt:

(e) $$U_1 : U_2, Q_i, R_i \text{ und analogisch } U_2 : U_1, Q_j, R_j\,,$$

wobei begreiflich die Punkte Q_i, Q_j, R_i, R_j untereinander verschieden sind.

Wir beachten jetzt näher den dritten Punkt (Q_k) aus der Menge $\bar{q}$, den wir bis jetzt noch nicht in Erwägung gezogen haben. Vor allem ist dieser Punkt mit allen Punkten den Mengen $\bar{q}, \bar{u}, \bar{z}$ verbunden und im Sinne der Anführung (4) von einem der Punkte (P_k) aus der Menge $\bar{p}$ getrennt.

Es ergeben sich also folgende zwei Möglichkeiten:

$$\text{entweder} \quad Q_k : P_k, R_k, R_i\,, \quad \text{oder} \quad Q_k : P_k, R_k, R_j\,.$$

Das ist aber unzulässig, da (wegen der Beziehung $R_i : U_1, Q_i, P_i$; $R_j : U_2, Q_j, P_j$) der Punkt Q_k mit beiden Punkten R_i, R_j verbunden sein muss.

Damit ist T_3 bewiesen.

Für die Punkte der Menge $\bar{u}$ kommen also nur die Separierungen $U_1 : S_1, S_2, S_3$; $U_2 : S_4, S_5, S_6$ in Betracht. In diesen Beziehungen sind begreiflich auch verschiedene Punkte der Menge $\bar{s}$ mit verschiedenen Indexen bezeichnet (da jeder Punkt der Menge $\bar{s}$ höchstens von einem Punkte aus der Menge $\bar{u}$ getrennt sein kann). Es ergeben sich also folgende zwei Möglichkeiten:

Entweder liegen die Punkte S_1, S_2, S_3 (und dann auch S_4, S_5, S_6) auf einer Geraden q (resp. r) oder liegen diese Punkte auf verschiedenen Geraden. Diese zwei Möglichkeiten kann man kurz so bezeichnen:

(f) $\qquad$ entweder $U_i : Q_i, Q_j, R_k$, oder

(g) $\qquad U_i : Q_1, Q_2, Q_3\,.$

Wir werden uns zuerst mit der Möglichkeit (f) beschäftigen. Weil $Q_i - Q_j - R_k$ zu keiner der Mengen $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$ gehört und Q_i mit Q_j verbunden ist, muss U_i vom Typ C sein und es ist entweder $Q_i : R_k$, oder $Q_j : R_k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $Q_i : R_k$ ist. Wegen Ergebnisse (4) und (f) muss also $Q_i : R_k, U_i, P_i, R_i$, d. h. $R_k \equiv R_i$ sein. Daraus folgt $U_i : Q_i, Q_j, R_i$ und $U_j : R_j, R_k, Q_k$. In diesem Falle ergibt sich aber $Q_i : U_i, P_i, R_i$; $R_i : U_i, P_i$, d. h. der Punkt Q_i ist vom Typ D.

Damit ist der Fall (f) ausgeschlossen und es verbleibt nur der Fall (g). Diesen Fall führen wir folgendermassen an:

(5) $\qquad U_1 : Q_1, Q_2, Q_3\,; \quad U_2 : R_1, R_2, R_3\,.$

In diesem Stadium ist es vorteilhaft, die bisher mit Buchstaben bezeichneten Konfigurationspunkte mit Ziffern zu bezeichnen, zusätzlich mit P und Q:

$$\begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & U_1 & U_2 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 8 & 6 & 7 & 9 & P & Q\,. \end{matrix}$$

Aus den Ergebnissen (*1*), (*4*) und (*5*) bekommt man einfach:

(6) $\quad 1 : 7, 0, Q$; $2 : 8, 9, Q$; $3 : 6, P, Q$; $4 : 6, 8, 0$; $5 : 7, 9, P$; $6 : 3, 4, P$; $7 : 1, 5, 0$; $8 : 2, 4, 9$; $9 : 2, 5, 8$; $0 : 1, 4, 7$; $P : 3, 5, 6$; $Q : 1, 2, 3$; $1-2-3$; $6-8-0$; $7-9-P\,.$

Daraus ist ersichtlich, dass nur die Punkte *4*, *5*, Q vom Typ E^2 sind. Die übrigen Konfigurationspunkte sind schon vom Typ C.

Das Teilschema (6) ändert sich nicht bei Benützung folgender Permutationen:

(7) $$p_1 \equiv (45), (89), (6P), (70); \; p_2 \equiv (23), (68), (9P); \\ p_3 \equiv (12), (78), (90), (45), (6P).$$

Dazu bemerke ich, dass noch weitere Permutationen existieren, aber die drei obenangeführten werden uns für unsere Aufgabe reichlich genügen.

Die Konfigurationspunkte *4, 5* sind verbunden und der dritte Punkt dieser Geraden muss ein einziger bestimmter Punkt der Menge *1, 2, 3, Q* sein (weil *4–5* eine Gerade der Menge $\overline{m}_2$ und $\overline{m}_3$ ist).

Bei Benützung der Permutation p_2 sehen wir, dass die Möglichkeiten *4–5–2*, *4–5–3* äquivalent sind, und zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir für die Möglichkeiten *4–5–1*, *4–5–2* die Permutation p_3 benützen. Daraus ist ersichtlich, dass es hinreicht, wenn für die Geraden *4–5* nur folgende zwei Möglichkeiten in Betracht genommen werden:

(8) $$M_1 \equiv 4-5-Q\,; \quad M_2 \equiv 4-5-2\,.$$

Beschäftigen wir uns vorerst mit der Möglichkeit M_1, dann sehen wir, dass durch den Punkt *Q* entweder

$$\frac{Q}{\begin{matrix}4&6&8&0\\5&7&P&9\end{matrix}} \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{\begin{matrix}4&6&8&0\\5&9&7&P\end{matrix}} \quad \text{Geraden gehen können.}$$

Unter Hinweis auf die Permutation p_1 sind diese zwei Möglichkeit äquivalent und man kann nur dier erste Möglichkeit erwägen. Die übrigen Konfigurationsgeraden finden wir schon verhältnismässig leicht und bekommen so das Totalschema:

(9) $$\frac{Q}{\begin{matrix}4&6&8&0\\5&7&P&9\end{matrix}} \quad \frac{1}{\begin{matrix}2&6&8&4\\3&9&5&P\end{matrix}} \quad \frac{2}{\begin{matrix}6&0&4\\5&P&7\end{matrix}} \quad \frac{3}{\begin{matrix}8&0&4\\7&5&9\end{matrix}} \quad \begin{matrix}6-8-0\\7-9-P\,.\end{matrix}$$

In diesem Kapitel bleibt noch die Möglichkeit M_2 aus der Anführung (8) zu erwägen. Hier stellen wir augenblicklich alle durch den Punkt *2* gehende Konfigurationsgeraden fest. Es sind die Geraden:

(10) $$2-3-1,\; 2-4-5,\; 2-6-7,\; 2-0-P\,.$$

Für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, haben wir bisher zwei Möglichkeiten:

$$\frac{1}{\begin{matrix}2&6&8&4\\3&9&5&P\end{matrix}} \quad \frac{1}{\begin{matrix}2&6&8&4\\3&5&P&9\,.\end{matrix}}$$

Diese Möglichkeiten sind äquivalent (siehe die Permutation p_1) und man kann also nur die erste Möglichkeit für weitere Erwägungen benützen. Die übriggebliebenen Konfigurationsgeraden finden wir schon ohne viel Mühe und bekommen so das weitere Totalschema:

(11)

Q	*1*	*2*	*3*	
6 8 0 4	*2 6 8 4*	*4 6 0*	*8 0 4*	*6–8–0*
5 P 9 7	*3 9 5 P*	*5 7 P*	*7 5 9*	*7–9–P*.

Mit Rücksicht auf das Resultat (6) sehen wir, dass die Konfigurationspunkte *2, 6, 7* vom Typ C^2 und *4, 5, Q* vom Typ E^2 sind. Die übrigen Punkte sind vom Type C^1, so dass das ganze Schema (11) vom Type $E_3^2C_6^1C_3^2$ ist.

Analogisch finden wir den Typ $E_3^2C_9^2$ des Schemas (9).

Unter den gegebenen Verhältnissen können diese zwei Schemen nicht äquivalent sein. Die Ergebnisse dieses Kapitels kann man also in dem folgenden Hilfsatz zusammenfassen:

Lemma 7. *Es existieren nur die zwei folgenden, nicht äquivalenten Schemen, in denen nur E^2- und C-Punkte vorkommen*:

$S_{3,4}$

Q	*1*	*2*	*3*		
4 6 8 0	*2 6 8 4*	*6 0 4*	*8 0 4*	*6–8–0*,	wobei
x y P 9	*3 9 5 P*	*x P y*	*7 5 9*	*7–9–P*	$x, y \equiv 5, 7$ ist.

Im Falle $x \equiv 5$ handelt es sich um den Typ $E_3^2C_9^2$ und im anderen Falle um den Typ $E_3^2C_6^1C_3^2$.

Bemerkung. In dem letzten Kapitel werden wir auch beweisen, dass diese zwei Schemen wirklich realisierbar sind und dass die Konfigurationspunkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen.

8. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen von Type C_{12}, wobei die Existens mindestens eines C^2-Punktes vorausgesetzt wird.

Es sei *1* ein C^2-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist, und weiter ergebe sich auch *3 : 4*. Wir wissen schon, dass genau zwei Konfigurationsgeraden existieren, die sich nicht in dem Konfigurationspunkte schneiden und gleichzeitig mit keinem Punkte der Gruppe *1, 2, 3, 4* inzidieren. Als diese zwei Geraden kann man *5–6–7*, *8–9–0* wählen und die zwei übrigen Konfigurationspunkte kann man als *P, Q* bezeichnen.

Diese Teilergebnisse fassen wir zusammen und führen die zwei möglichen Alternativen für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, an:

M_1 $1-5-8, 1-6-9, 1-7-0, 1-P-Q, 5-6-7, 8-9-0, 2-3, 2-4,$
$3:4;\ 1:2,3,4.$

M_2 $1-5-8, 1-6-9, 1-7-Q, 1-P-0, 5-6-7, 8-9-0, 2-3, 2-4,$
$3:4;\ 1:2,3,4.$

Ich empfehle dem Leser sich zu überzeugen, dass alle übrigen Möglichkeiten für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen können, mit den Möglichkeiten M_1 oder M_2 äquivalent sind.

Wir konzentrieren uns jetzt auf die Möglichkeit M_1. Durch den Punkt P (bzw. Q) müssen vier Konfigurationsgeraden gehen und deswegen ist dieser Punkt mit den Punkten *1, 2, 3, 4* verbunden, aber er kann nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$ liegen. Man kann also das Teilschema für diese Möglichkeit folgendermassen anführen:

$$(M_1)\qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5\ 6\ 7\ P & P\ Q & .\ P\ Q & .\ P\ Q \\ 8\ 9\ 0\ Q & x\ y & .\ .\ . & .\ .\ . \end{array} \qquad 8-9-0,\ 5-6-7,\ 2-3,\ 2-4\,.$$

Der Punkt *2* ist von dem Punkte *1* getrennt und wir sehen, dass er noch von den zwei Punkten aus der Menge (5, 6, 7, 8, 9, 0) separiert sein muss. Begreiflich kann man voraussetzen, dass $2:0$, d. h. $2:1,0$ ist.

In dem Falle $2:7$ wäre der Punkt *2* vom Typ E. In den Fällen $2:8$ oder $2:9$ wäre er vom Typ B. Deswegen muss entweder $2:5$, oder $2:6$ sein. Mit Rücksicht auf die zulässige Permutation (*56*), (*89*), kann man $2:6$ wählen, der Punkt *2* ist also von den Punkten *1, 0, 6* getrennt. Ausserdem muss $0:6$ sein, weil der Punkt *2* vom Typ C ist.

Für die zwei Punkte x, y auf den Geraden $2-P$, $2-Q$ ergeben sich – den zulässigen Permutation (*79*), (*60*), (*58*) nach – nur die Möglichkeiten *79, 59, 58, 57.* Weil auch (PQ) eine zulässige Permutation ist, kann man für die erste Ziffer (aus diesen Paaren) x und für die zweite y annehmen.

Diese Möglichkeiten fassen wir mit den bisherigen Ergebnissen kurz zusammen:

$$(1)\qquad 2:1,0,6;\ 0:6;\ xy \equiv 79, 59, 57, 58\,.$$

Im Falle

$$x \equiv 7,\ y \equiv 9,\quad \text{d. h.}\quad 2-P-7,\ 2-Q-9$$

können auf den Geraden $2-3$, $2-4$ nur die Punkte *5, 8* liegen. Der Permutation (*34*) nach kann man $2-3-5$, $2-4-8$ wählen und somit folgt aus $2P7-815-4Q6$, $248-961-QQ5$, dass $4-Q-6$ und $Q:5$ ist.

Im Falle, dass der Punkt P mit dem Punkte *6* verbunden ist, kann auf dieser Geraden nur der Punkt *3* liegen und wir haben einen Widerspruch der Relation $235-$ $-QP1-968$ mit der Geraden $9-6-1$. Es muss also $6:P$ sein, d. h. $6:0,2,P$.

Dann ist $3-6-8$ die letzte Gerade, die noch durch den Punkt 6 gehen kann, und daraus folgt, die Separierung $8 : 7, P, Q$. Weil sich $P-Q$ und $P-7$ ergibt, muss schon $7 : Q$ sein (8 ist ein C-Punkt), d. h. $Q : 5, 7, 8$, so dass die letzte durch den Punkt Q gehende Gerade die Gerade $Q-3-0$ ist.

Dann aber widerspricht $2P7-3Q0-511$ der Geraden $5-1-8$ und wir können uns dem weiteren Falle zuwenden.

$$x \equiv 5, \; y \equiv 9\,, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-9\,.$$

Auf den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $7, 8$ liegen und der Permutation (34) nach kann man diese Geraden als $2-3-7$, $2-4-8$ bezeichnen. Die weitere Konfigurationsgerade $3-8-P$ bekommt man aus der Beziehung $29Q-701-38P$. Dann ergibt sich $8 : 6, 7, Q$ und $6 : 2, 0, 8$, so dass die letzten durch den Punkt 6 gehenden Geraden die Geraden $3-Q-6$, $4-P-6$ sein können. Jetzt aber kommen wir schon zum Widerspruch der Geraden $7-1-0$ mit der Beziehung $2P5-3Q6-717$.

Im vorletzten Falle

$$x \equiv 5, \; y \equiv 7\,, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-7$$

bekommt man augenblicklich einen Widerspruch der Beziehung $PQ1-576-229$ mit der Separierung $2 : 1, 0, 6$ (wo schon die Punkte 2 und 9 verbunden sein müssen).

Es bleibt also noch der letzten Fall

$$x \equiv 5, \; y \equiv 8\,, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-8$$

zu lösen. Mit den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $7, 9$ inzidieren und der zulässigen Permutation (34) nach kann man diese Geraden als $2-3-7$, $2-4-9$ bezeichnen. Man bekommt vor allem zwei weitere Konfigurationsgeraden $4-Q-7$, $3-P-9$ und ausserdem noch die Bedingungen $7 : 8, 9, P$; $9 : 5, 7, Q$. Weil 7 und 9 auch C-Punkte sein müssen, ergibt sich notwendigerweise $5 : Q$ und $8 : P$.

Wäre $P-0$, dann könnte auf dieser Geraden nur der Punkt 4 liegen und man würde zu dem Widerspruch der Relation $PQ1-089-426$ mit der Geraden $4-2-9$ kommen. Es muss also $P : 0$ sein und daraus ergibt sich $P : 7, 8, 0$; $0 : 2, 6, P$. Der Punkt 6 ist schon mit dem Punkte P verbunden und diese Gerade inzidiert mit dem Punkte 4. So haben wir die Gerade $4-6-P$ bekommen und aus der Beziehung $249-QP1-866$ sehen wir, dass auch $8 : 6$, d. h. $8 : 6, 7, P$ ist. Die letzte durch den Punkt 8 gehende Gerade $3-4-8$ widerspricht der Beziehung $3 : 4$ und damit ist die Möglichkeit M_1 völlig ausgeschöpft.

Bei der zweiten Möglichkeit M_2 müssen analogisch die

(T_1) Punkte P, Q mit allen vier Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden sein, können aber nich auf den Geraden $2-3$, $2-4$ liegen.

Das Teilschema für diese Möglichkeit kann man also folgendermassen ausdrücken:

$$(M_2)\qquad \begin{array}{ccccc} \underline{\mathit{1}} & \underline{\mathit{2}} & \underline{\mathit{3}} & \underline{\mathit{4}} & \\ 5\,6\,7\,P & 3\,4\,.\,. & .\,.\,. & .\,.\,. & 5-6-7 \\ 8\,9\,Q\,0 & .\,.\,.\,. & .\,.\,. & .\,.\,. & 8-9-0\,. \end{array}$$

Man erwägt, dass sich dieses Teilschema bei der Benützung den angeführten Permutationen nicht ändert:

$$(\mathrm{p})\qquad p_1 \equiv (56),(89)\,;\quad p_2 \equiv (58),(69),(70),(PQ)\,;\quad p_3 \equiv (34)\,.$$

Wir beweisen zuerst, dass sich

$$(\mathrm{T}_2)\qquad X-7-0 \quad (\text{wobei } X \equiv 3, 4) \quad \text{nicht ergibt}\,.$$

Der Permutation (34) nach kann man nur den Fall $3-7-0$ voraussetzen. Der Punkt 3 ist von den Punkten $1, 4, t\,(t \equiv 5, 6, 8, 9)$ getrennt und der zulässigen Permutationen p_1, p_2 halber kann man weiter voraussetzen, dass $3 : 1, 4, 5$ ist. Es folgt daraus $3-8-X$, $3-9-Y$, $3-6-Z$, wobei $X \equiv 6, P, Q$; $Y \equiv 5, P, Q$; $Z \equiv 8, P, Q$ ist. Ausserdem folgen aus den Beziehungen $567-890-113$, $113-908-6PX$, $113-{}$ ${}-809-5PY$, $113-576-8QZ$ die Separierungen $6 : P$; $5 : P$; $8 : Q$.

Im Falle $5 : 0$ wäre der Punkt $5\,(5 : 3, P, 0)$ vom Typ B. Es ist also $5-0$. Wäre $2-P-Q$, dann würde die Beziehung $P01-Q71-233$ der Verbindung $2-3$ widersprechen. Aus diesen Ergebnissen erwägen wir, dass der Punkt 2 nicht auf der Geraden $5-0$ liegen kann (weil sich anderenfalls nach der Behauptung T_1 $2-P-Q$ ergäbe). Es muss also $5-0-4$ sein und deswegen ist $2-5-Q$ die letzte durch den Punkt 5 gehende Konfigurationsgerade. Folglich ergibt sich $5 : 3, P, 9$ und $0 : 6, Q, 2$.

Der Punkt 2 muss mit dem Punkte 7 verbunden sein, denn anderenfalls wäre er von Typ B. Es muss auch $7-P$ sein. (Im gegenteiligen Falle wäre $P : 5, 6, 7$ und daraus folgt, dass P vom Typ E ist.) Die letzte durch den Punkt 7 gehende Gerade ist also die Gerade $2-7-P$, d. h. $7 : 4, 8, 9$; $4 : 1, 3, 7$ und der Punkt 7 ist vom Typ B.

Damit ist die Anführung T_2 völlig bewiesen und ich behaupte noch, dass sich

$$(\mathrm{T}_3)\qquad 7 : 0 \quad \text{ergibt}\,.$$

Zur Beweisführung genügt die Voraussetzung, dass $7-0-2$ ist und dass wir auf einen Widerspruch stossen. Unter diesen Bedingungen muss nach der Behauptung T_1 auch $2-P-Q$ sein. Weil $2 : 1, a, b$ und der Punkt 2 vom Typ C ist, muss auch a : b sein. Dann ergeben sich zwei Alternativen: entweder $2 : 1, 5, 9$, oder $2 : 1, 6, 8$. Diese Alternativen sind äquivalent (der Permutation p_1 nach) und man kann voraussetzen, dass $2 : 1, 5, 9$ und daraus auch $5 : 9$ ist.

Auf den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $6, 8$ liegen und mit Hilfe der Permutation p_3 wählen wir auf der Geraden $2-3$ den Punkt 6, d. h. $2-3-6$, $2-4-8$. Aus den Relationen $890-567-112$, $112-576-8Q3$, $112-908-6P4$ folgen die

Beziehungen $8-Q-3$, $6-P-4$, $6:8, 0, Q$; $8:6, 7, P$ und weiter $0:Q$; $7:P$, weil $6, 8$ die C-Punkte sind.

Im Falle $3-5-P$ widerspricht die Beziehung $263-01P-795$ der Geraden $7-6-5$ und einfach überzeugen wir uns, dass auf der Geraden $3-P$ nur der Punkt 9 liegen kann. Es ist also $3-P-9$ die weitere Konfigurationsgerade und die Trennung $9:7, 2, 5$ bekommt man aus $236-0P1-799$. Dann muss aber $4-Q-9$ die letzte durch den Punkt 9 gehende Konfigurationsgerade sein und man bekommt einen Widerspruch der Geraden $0-9-8$ mit der Relation $248-7Q1-095$.

So haben wir die Behauptung T_3 bewiesen.

Weiter kann man behaupten, dass

(T_4) der Punkt 7 wenigstens von einem Punkte der Menge 2, 3, 4 getrennt ist.

Begreiflich setzen wir das Gegenteil voraus. Im Falle $7:0, 8, 9$ ist der Punkt 7 vom Typ E. Die zulässige Permutation p_1 erlaubt uns die Voraussetzung $7:0, 9, P$ zu erwägen. Es ist entweder $2-3-7$ oder $2-4-7$ eine der Geraden, die durch den Punkt 7 gehen. Hinsichtlich der Permutation p_3 kann man diese Gerade als $2-3-7$ bezeichnen. Dann muss durch den Punkt 7 noch die Gerade $4-7-8$ gehen. Die Separierung $P:9$ folgt aus der Bedingung, dass 7 ein C-Punkt sein muss.

Für den Punkt t auf der Geraden $4-P-t$ ergeben sich zwei Möglichkeiten $t \equiv \equiv 5, Q$ (siehe $1P0-748-Qt9$) und ausserdem im Falle $t \equiv 5$ wäre $9:Q, 5, 7, P$. Es ist also $4-P-Q$ und folglich $QQ9$; $9:7, P, Q$. Auf der Geraden $2-9$ kann also nur der Punkt 4 liegen und so bekommen wir die letzten zwei Geraden $2-4-9$, $3-5-9$, die noch durch den Punkt 9 gehen können. Die weitere Konfigurationsgerade $3-P-6$ ergibt sich aus $7Q1-249-3P6$.

Wäre $2-0$, d. h. $2-0-Q$, dann würde die Gerade $0-8-9$ im Widerspruch mit $Q71-249-086$ sein. Es ist also $2:0$ und auf der Geraden $3-0$ kann nur der Punkt Q liegen, also $3-0-Q$. In diesem Augenblicke widerspricht die Gerade $7-4-8$ der Beziehung $249-3Q0-7P8$.

Damit ist die Behauptung T_4 bewiesen und man kann noch in Erwägung ziehen, dass im Falle $7:3$, d. h. $3:1, 4, 7$; $7:3, 0, t$ ($t \equiv 8, 9, P$) der Punkt 7 vom Typ B wäre. Es muss deswegen $7-3$ und analogisch auch $7-4$ sein. Mit Rücksicht auf T_4 bekommen wir so die Trennung:

(T_5) $$7:2.$$

Setzen wir für einen Augenblick voraus, dass

(P_1) $$2-0 \text{ ist},$$

dann $2:1, 7, a$ (wobei sich $a \equiv 8, 9$ und $a:7$ ergeben muss), da der Punkt 2 vom Typ C ist. Die zulässige Permutation p_1 erlaubt uns die Separierung $2:1, 7, 8$ voraussetzen, daraus folgt noch $7:8$ und $7:2, 0, 8$.

Wenn wir die durch den Punkt *7* gehenden Konfigurationsgeraden suchen, benützen wir die Permutation p_3, und diese Geraden bezeichnen wir als die Geraden $3-7-P$, $4-7-P$. Weil $8:2$ ist, muss auch $8-4-t$ ($t \equiv 6, Q$) sein, was aber wegen der Beziehung $908-7P4-31t$ und Bedingungen $1-t$, $1:3$ unmöglich ist. Damit ist bewiesen, dass

$$(\mathrm{T}_6) \qquad 2:1,7,0 \quad \text{ist}.$$

Wir setzen noch die Existenz der Konfigurationsgeraden

$$(\mathrm{P}_2) \qquad 2-P-Q$$

voraus.

Wegen der Permutationen p_1 und p_3 kann man $2-5-9$, $2-3-6$, $2-4-8$ als die übrigen durch den Punkt *2* gehenden Geraden annehmen. In den Fällen $5-Q-t$ (bzw. $9-Q-t$), wobei $t \equiv 3, 4$ ist, würde die Relation $581-Q2P-t40$ der Verbindung $4-0$ (bzw. $961-Q2P-t30$ der Geraden $3-0$) widersprechen. Es ist also $Q:5$, $9, T$ und $T \equiv 6, 8, 0$.

Der Punkt Q ist allerdings vom Typ C und ausserdem ergibt sich $5-9-2$. Es muss also entweder $5:7$, oder $9:T$ sein und daraus sehen wir, dass nicht $T \equiv 6, 8$ sein kann. Im letzten Falle $T \equiv 0$, d. h. $Q:5,9,0$ wäre $0:2,7,Q,5$ und daraus ergibt sich, dass die Voraussetzung P_2 falsch ist.

$$(\mathrm{T}_7) \qquad Q:P$$

beweisen.

Wegen der Permutation p_3 genügt es die Existenz der Konfigurationsgeraden $3-P-Q$ vorauszusetzten. Die Permutation p_1 erlaubt uns auch die Gerade $3-7-8$ zu erwägen.

Im Falle $Q-9-T$ ($t \equiv 2, 4$) widerspricht die Gerade $Q-3-P$ der Relation $980-$ $-Q71-T3P$. Es muss also $9:Q$ sein und für den Punkt t der Geraden $2-9-t$ kommen drei Möglichkeiten $t \equiv 3, 4, P$ in Betracht. Wäre $t \equiv 3$, dann wäre $2:1$, $7, 0, 5$ (siehe $961-378-255$). Auch der Fall $t \equiv 4$ ist unmöglich, weil $3-0-9$ als die letzte durch den Punkt *9* gehende Gerade der Geraden $8-0-9$ widersprechen würde. Daraus folgt nur $2-9-P$ und $9:3$ (wie wir sofort sehen können), d. h. $3:1,4,9$ und $9:Q,3,x$ (wobei $x \equiv 5, 7$ ist). Begreiflich kann nicht $x \equiv 7$ sein, weil anderenfalls *9* vom Typ B wäre. Folglich $9:Q,3,5$ und $5:Q$.

$4-9-7$ ist die letzte mit dem Punkte *9* inzidierbare Gerade, d. h. $7:2,0,5$. Daraus sehen wir, dass auf der Geraden $4-0$ nur der Punkt Q liegen kann und man kommt zu einem Widerspruch der Bedingungen $3-6$, $3:4$ mit $809-7Q1-346$.

Die Behauptung T_5 ist damit bewiesen.

Der Punkt *7* ist von den Punkten $0, 2$ getrennt und deswegen muss er noch von einem der Punkte $8, 9$ separiert sein. Gemäss den Permutationen p_1 und p_3 kann man voraussetzen, dass $3-7-8$ ist.

Mit Rücksicht auf $2:0$ muss schon $0:3$ und $0:4$ sein, d. h. auf der Geraden $0-3$ liegt der Punkt Q (anderenfalls inzidiert er mit der Geraden $3-P$, was im Gegensatz zur Behauptung T_7 wäre).

Schliesslich kann auf der letzten durch den Punkt 0 gehenden Geraden $4-0$ weder P noch Q liegen.

Fassen wir alle diese Ergebnisse zusammen, können wir das Teilschema M_2 folgendermassen anführen:

1	2	3	4		
5 6 7 P	3 4 P Q	7 P Q	0 P Q	$5-6-7$	$2:1, 7, 0$
8 9 Q 0	. . . .	8 . 0	. . .	$8-9-0$	$7:0$

Dann ist offenbar $4-7-P$ eine weitere mit dem Punkte 7 inzidierbare Konfigurationsgerade und aus den Relationen $1P0-873-540$, $809-7Q1-336$ folgt $4-Q-5$ und $3:1, 4, 6$. Danach muss $4-0-6$ eine von den durch den Punkt 6 gehenden Geraden sein. Leicht finden wir noch die weiteren zwei Geraden $3-P-9$, $2-3-5$ und stellen fest, dass der Punkt 5 $(5:0, P, 9)$ vom Typ B ist.

Wir können jetzt den Hilfsatz dieses Kapitels anführen:

Lemma 8. *Die Punkte der Konfigurationen $C_i^1 C_{12-i}^2$ $(i > 0)$ können nicht mit einer irreduziblen Kubik inzidieren.*

Bemerkung. Dazu bemerke ich noch, dass vier Konfigurationen vom Type $C_i^1 C_{12-i}^2$ existieren (die aber begreiflich nicht mit der Kubik inzidieren) und in einer meiner anderen Arbeiten angeführt werden.

9. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen der Konfigurationen C_{12}^1. Es sei 1 ein C^1-Punkt, der von den Punkten $2, 3, 4$ getrennt ist. Wir setzen weiter voraus, dass $3:4$ ist. Es existieren genau zwei Konfigurationsgeraden (die sich in einem Konfigurationspunkte schneiden), welche nicht mit den Punkten $1, 2, 3, 4$ inzidieren. Man kann diese Geraden als $5-6-7$, $5-8-9$ bezeichnen und die übrigen drei Konfigurationspunkte als $0, P, Q$ wählen.

Auf der Geraden $1-5$ muss schon irgend einer von den Punkten $0, P, Q$ liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man diese Gerade als die Gerade $1-5-Q$ bezeichnen. Der besseren Übersicht halber führen wir das Teilschema von sechzehn Konfigurationsgeraden folgendermassen an:

(S)

1	2	3	4	5
5 . . .	3 4 . .	. . .	. . .	6 8
Q . . .	. . . .	. . .	. . .	7 9 .

(1) Daraus ist ersichtlich, dass jeder der Punkte $0, P, Q$ mit allen Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden sein muss, aber auf keiner der Geraden $2-3$, $2-4$ liegen kann.

Nach den obenangeführten Ergebnissen muss vorerst $2 : 1, a, b$ sein, wobei $a, b \equiv 5, 6, 7, 8, 9$ ist. Ausserdem ergibt sich noch $a : b$, weil der Punkt 2 vom Typ C sein muss. Man kann also voraussetzen,

(2) dass $2 : 1, 6, 8$ und folglich $6 : 8$ ist.

Wäre der Punkt 5 von beiden Punkten $3, 4$ getrennt, dann $3 : 1, 4, 5$ und der Punkt 3 wäre vom Typ D. Der Punkt 5 muss also wenigstens mit einem Punkte der Gruppe $3, 4$ verbunden sein und man kann voraussetzen, dass genau $5-3$ ist. Aus der Anführung (2) sehen wir, dass auch $5-2$ ist, d. h. $2-3-5$ muss die letzte durch den Punkt 5 gehende Gerade sein.

(3) $2-3-5$ impliziert $4 : 1, 3, 5$; $5 : 4, 0, P$

und daraus folgt $0 : P$.

Wir werden jetzt den Konfigurationspunkt 3 näher untersuchen. Aus den obenangeführten Ergebnissen folgt $3 : 1, 4, X$ $(X \equiv 6, 7, 8, 9)$. Im Falle $X : 2$ gehen durch den Punkt X nur drei Geraden. Es ist also $X-2$, d. h. (siehe 2) $X \equiv 7, 9$. Die zulässige Permutation (79), (68) erlaubt uns

(4) $3 : 1, 4, 7$

in Betracht zu nehmen.

Der Punkt 9 ist schon mit allen Punkten $2, 3, 4$ verbunden und deswegen muss $2-4-9$ eine Konfigurationsgerade sein (weil schon die Gerade $2-3-5$ existiert). Die übrigen zwei durch den Punkt 2 gehenden Geraden kann man als $2-0-t$, $2-P-v$ bezeichnen $(t, v \equiv 7, Q)$, wenn wir uns der Separierung $0 : P$ bewusst sind.

Nach der zulässigen Permutation $(0P)$ kann man also diese Geraden als Geraden $2-0-7$, $2-P-Q$ erwägen.

Dann aber existieren eben zwei Konfigurationsgeraden $(2-P-Q,\ 5-8-9)$ die mit keinem der Punkte $2, 1, 4, 7$ inzidieren. Folglich (siehe die Anführung 4) ist der Punkt 3 vom Typ C^2, was den Grundvoraussetzungen widerspricht.

Damit haben wir den folgenden Hilfsatz bewiesen:

Lemma 9. *Es existieren keine Konfigurationen vom Type* C^1_{12}.

10. KAPITEL

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir vier Schemen gefunden und wir müssen noch beweisen, dass diese Schemen wirklich realisierbar sind und dass die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.

Wir konzentrieren uns vorerst auf das Schema

$$
S_1 \quad \begin{array}{ccccc}
\underline{\mathit{1}} & \underline{\mathit{2}} & \underline{\mathit{3}} & \underline{\mathit{4}} & \mathit{5-6-7} \\
\mathit{5\;7\;9\;8} & \mathit{P\;6\;3\;4} & \mathit{P\;Q\;4} & \mathit{P\;Q} & \mathit{7-8-9} \\
\mathit{Q\;0\;6\;P} & \mathit{Q\;8\;9\;0} & \mathit{0\;7\;8} & \mathit{5\;6} & \mathit{9-0-5}
\end{array} \quad \text{vom Type } B_2^1B_4^2B_2^3C_2^1C_1^2E_1^2
$$

aus dem Hilfsatze L. 2.

Die Konfigurationspunkte *0, 4, Q* können nicht auf einer Geraden (weder konfigurationellen oder fremden) liegen und deswegen kann man diese Punkte als Eckpunkte des Koordinatendreiecks wählen. Also $0 = (1, 0, 0)$, $4 = (0, 1, 0)$, $Q = (0, 0, 1)$. Weiter setzen wir voraus, dass der Schnittpunkt der fremden Geraden *06* und *2Q* der Punkt $J = (1, 1, 1)$ ist. Die Koordinaten dieser Geraden sind $06J = (0, 1, -1)$, $2QJ = (1, -1, 0)$ und weil auch $4-6-Q = (1, 0, 0)$ ist, muss der Punkt *6* die Koordinaten $6 = (0, 1, 1)$ haben. Aus $2-4-0 = (0, 0, 1)$ bekommen wir analogisch $2 = (1, 1, 0)$. Die Koordinaten des Punktes P können wir mit $P = (1, 1, a)$ bezeichnen, weil der Punkt P auf der Geraden $2-P-Q = (1, -1, 0)$ liegt. Aus $4-5-P = (a, 0, -1)$ ergibt sich analogisch $5 = (1, c, a)$ und aus $1-5-Q = (c, -1, 0)$ bekommt man die Koordinaten des Punktes $1 = (1, c, cx)$.

Auf der fremden Geraden $0Q = (0, 1, 0)$ muss der Punkt *8* liegen (siehe *923−−5P4−0Q8*), und da dieser Punkt auch mit der Geraden $2-6-8 = (1, -1, 1)$ inzidiert, sind $(-1, 0, 1)$ die Koordinaten des Punktes *8*. Aus $3-4-8 = (1, 0, 1)$, $3-P-0 = (0, a, -1)$ ergibt sich folglich $3 = (-a, 1, a)$ und aus $1-7-0 = (0, x, -1)$, $3-Q-7 = (1, a, 0)$ bekommt man analogisch $7 = (-a, 1, x)$.

Die Koordinaten des letzten Punktes *9* wählen wir aus der Geraden $9-0-5 = (0, a, -c)$, d. h. $9 = (-b, c, a)$.

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen:

$$
s_1 \qquad \begin{array}{llll}
1 = (1, c, cx), & 2 = (1, 1, 0), & 3 = (-a, 1, a), & 4 = (0, 1, 0), \\
5 = (1, c, a), & 6 = (0, 1, 1), & 7 = (-a, 1, x), & 8 = (-1, 0, 1), \\
9 = (-b, c, a), & 0 = (1, 0, 0), & P = (1, 1, a), & Q = (0, 0, 1)
\end{array}
$$

und erwägen, dass diese Konfigurationspunkte auch (ohne weitere Bedingungen) mit den folgenden Geraden inzidieren:

$$
\begin{array}{lll}
1-5-Q = (c, -1, 0), & 1-7-0 = (0, x, -1), & 2-P-Q = (1, -1, 0), \\
2-6-8 = (1, -1, 1), & 2-4-0 = (0, 0, 1), & 3-P-0 = (0, a, -1), \\
3-Q-7 = (1, a, 0), & 3-4-8 = (1, 0, 1), & 4-5-P = (a, 0, -1), \\
4-6-Q = (1, 0, 0), & 9-0-5 = (0, a, -c). &
\end{array}
$$

Zwischen a, b, c, x müssen gewisse Beziehungen bestehen und diese Beziehungen stellen wir aus den Bedingungen der Inzidenz der Konfigurationspunkte mit den folgenden Geraden fest:

$$
\begin{array}{ll}
5-6-7 \ldots x-ac-1+a^2 = 0, & 1-8-P \ldots ac+c-cx-1 = 0, \\
2-3-9 \ldots a.(b+c-a-1) = 0, & 1-9-6 \ldots (a-c+bcx-bc) = 0, \\
7-8-9 \ldots cx-a+b-ac = 0. &
\end{array}
$$

Leicht erwägen wir, dass wir diese Bedingungen auch in der Form

$b_1 \quad x = ac+1-a^2,\ b = a+1-c,\ abc = 1$ anführen können,

denn im Falle $a = 0$ wäre $3 \equiv 4$ und im Falle $x = 1$ wäre $1-7-0 \equiv 5-9-0$.

Analogisch wie in diesem Falle suchen wir auch die Koordinaten der Konfigurationspunkte der Schemen S_2, S_3, S_4. Weiterhin führe ich nur die Ergebnisse an und der Leser kann sich leicht überzeugen, dass alle nötigen Inzidenzbedingungen erfüllt sind.

S_2	*1*	*2*	*3*	*4*	*0−5−P*	vom Type B^2_{12}
	0 P 5 7	*0 Q 3 4*	*9 Q 4*	*5 Q*	*0−6−7*	
	Q 6 8 9	*8 6 7 9*	*5 P 8*	*6 7*	*P−8−9*.	

s_2 $\quad 1 = (1, 0, 0),\ 2 = (0, 1, 0),\ 3 = (av, v^2, a),\ 4 = (b, 1, c),\ 5 = (0, 0, 1),$
$6 = (b, 1, b),\ 7 = (tv, v, t),\ 8 = (a, 0, 1),\ 9 = (a, v, t),\ 0 = (a, 1, 1),$
$P = (a, 1, b),\ Q = (1, 1, 1).$

b_2 $\quad t-1 = v.(b-1) = a.(c-1);\ (c-1).v^2 = t-v;\ ac = bt.$

S_3	*Q*	*1*	*2*	*3*		
	4 6 8 0	*2 6 8 4*	*6 0 4*	*8 0 4*	*6−8−0*	vom Type $E^2_3C^1_6C^2_3$
	7 5 P 9	*3 9 5 P*	*7 P 5*	*7 5 9*	*7−9−P*	

s_3 $\quad 1 = (1, tx, x),\ 2 = (1, 0, 0),\ 3 = (x, t, 1),\ 4 = (0, 1, 0),\ 5 = (1, 1, 0),$
$6 = (1, 0, -1),\ 7 = (0, 0, 1),\ 8 = (x^2, tx, 1),\ 9 = (x, tx, 1),\ 0 = (1, tx, x^2),$
$P = (1, t, x),\ Q = (0, 1, 1).$

b_3 $\quad x^2+x+1 = tx.$

S_4	*Q*	*1*	*2*	*3*		
	4 6 8 0	*2 6 8 4*	*6 0 4*	*8 0 4*	*6−8−0*	vom Type $E^2_3C^2_9$
	5 7 P 9	*3 9 5 P*	*5 P 7*	*7 5 9*	*7−9−P*	

s_4 $\quad 1 = (1, r, 1),\ 2 = (0, 1, 0),\ 3 = (1, q, 1),\ 4 = (1, 0, 0),\ 5 = (0, 0, 1),$
$6 = (0, 1, 1),\ 7 = (1, 1, 0),\ 8 = (1, r, s),\ 9 = (y, q, 1),\ 0 = (1, q, y),$
$P = (s, r, 1),\ Q = (1, 0, -1).$

b_4 $\quad r = s+2,\ q = y+2,\ sy = 1.$

Damit ist bewiesen, dass alle Schemen wirklich realisierbar sind, und es bleibt nur die Inzidenz der Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kubik zu beweisen.

Wie oben, so werde ich mich auch hier ausführlich nur mit dem Schema S_1 beschäftigen.

Gemäss der Beziehung *923–5P4–0Q8* konstruieren wir vor allem die Kubik F_1 aus den Geraden

$$923 = (a, -a, a+1), \quad 5P4 = (a, 0, -1), \quad 0Q8 = (0, 1, 0) \text{ und analogisch}$$

die Kubik F_2 aus den Geraden

$$950 = (0, a, -c), \quad 2PQ = (1, -1, 0), \quad 348 = (1, 0, 1).$$

Auf den Kubiken F_1 und F_2 liegen also die Punkte *2, 3, 4, 5, 8, 9, 0, P, Q* und ausserdem ergeben sich folgende Beziehungen:

$$F_2(1) : F_1(1) = F_2(6) : F_1(6) = F_2(7) : F_1(7) = a-c.$$

Daraus ist ersichtlich, dass mit der Kubik $K_1 \equiv F_2+(c-a).F_1$ alle zwölf Konfigurationspunkte inzidieren. Mit Hilfe der Beziehungen b_1 können wir diese Kubik K_1 folgenderweise ausdrücken:

K_1 $$x_0 . (ax . x_1-cx_2) . (x_0-x_1+x_2)+ab . x_1x_2 . (x_2-x_1) = 0.$$

Analogisch finden wir die Gleichungen der kubischen Kurven für die Konfigurationspunkte der Anführungen s_2, s_3, s_4:

K_2 $$a . x_2^2 . (x_0-x_1)+b . (a-1) . x_0x_1 . (x_1-x_2)+x_0x_2 . (x_1-x_0) = 0,$$

K_3 $$x_1(x_0x_1+x_1x_2-x_0x_2-x_2^2-x_0^2)+t^2 . x_0x_2 . (x_0-x_1+x_2) = 0,$$

K_4 $$x_1(x_0x_1+x_1x_2-x_0x_2-x_2^2-x_0^2)+qr . x_0x_2 . (x_0-x_1+x_2) = 0.$$

Bemerkung. Dazu bemerke ich, dass man das Schema S_4 (zum Unterschiede von den übrigen Schemen) auch noch mit den Punkten (und dazugehörigen Geraden) als s'_4 folgendermassen ausdrücken kann:

s'_4 $1 = (1, 0, 0)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 0)$, $4 = (0, 0, 1)$, $5 = (t-tx, x-1, t+1)$, $6 = (1-x, 1, -t)$, $7 = (0, t, 1)$, $8 = (x, x-1, t+1)$, $9 = (1, 1, -t)$, $0 = (1, x, 1)$, $P = (1, 0, 1)$, $Q = (x-1, x+tx-1-t, t-1-tx)$.

b'_4 $t^2+t+1 = 0$; $x . (x-1) . (x-t-1) . (x-t) \neq 0$.

Die Punkte dieser letzten Konfiguration inzidieren nicht mit einer irreduziblen Kubik (wie wir uns übrigens leicht überzeugen können).

Die Teilergebnisse dieser Arbeit kann man also in folgende zwei Hauptsätze zusammenfassen:

Satz 1. *Es sei $i > 0$. Es existieren nur drei ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$ *von den Typen* $E_i^2C_{12-i}$ *und keine Konfigurationen der Typen* $E_i^1E_j^2C_k$ *und* C_{12}^1.

Satz 2. *Nur acht ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$ *inzidieren mit der irreduziblen Kurve dritter Ordnung. Die ersten zwei von diesen Konfigurationen* (AI, AII) *hat de Vries, die dritte* (BI) *Bydžovský und die vierte* (BII) *J. Metelka gefunden. Die übrigen vier Konfigurationen* (S_1, S_2, S_3, S_4) *von den Typen* $B_8C_3E_1$, B_{12}, $E_3^2C_6^1C_3^2$, $E_3^2C_9^2$ *in dieser Arbeit gefunden sind.*

Literatur

[1] *B. Byžovský:* Über eine ebene Konfiguration (12_4, 16_3), Věstník Král. české spol. nauk 1939, č. II.

[2] *J. De Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen. Acta matematica, 12, 1889, 67.

[3] *O. Hesse:* Über Curven dritter Ordnung ..., J. f. reine u. angew. Math. 36, 1848, 156—176 — Sebrané spisy, str. 155 a násl.

[4] *O. Hesse:* Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem, J. f. reine u. angew. Math. *41*, 1851, 270 — Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[5] *G. Salmon* (něm. překlad W. Fiedler): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[6] *Th. Reye:* Konstruktion der Konfigurationen, Acta Mathematica, *1*, 1882, str. 97— a násl.

[7] *Th. Reye:* Geometrie der Lage, 3. B., 1910, str. 234 a n.

[8] *H. Schrötter:* Über ebene Konfigurationen, J. f. reine u. angew. Meth. *108*, 1891, str. 297.

[9] *M. Zacharias:* Untersuchungen über ebene Konfigurationen (12_4, 16_3), Deutsche Mathematik, *6*, čís. 2 a 3.

[10] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích (12_4, 16_3) v rovině. Věstník Král. české spol. nauk 1944, XXI, str. 1—8

[11] *B. Byžovský:* O dvou nových konfiguracích (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky *79*, 1954, 219—228.

[12] *B. Bydžovský:* Poznámky k teorii konfigurace (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky, *74*, 1950, 249—251. (Zprávy ze spol. sjezdu matematiků čsl. a polských.)

[13] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 133— a násl.

[14] *F. Levi:* Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929.

[15] *V. Metelka:* O jistých rovinných konfiguracích (12_4, 16_3), které obsahují aspoň jeden bod typu D. Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 146— a násl.

[16] *V. Metelka:* Rovinné konfigurace (12_4, 16_3) s D-body. Časopis pro pěstování matematiky *82*, 1957, str. 385— a násl.

Anschrift des Verfassers: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Výtah

ROVINNÉ KONFIGURACE $(12_4, 16_3)$, KTERÉ INCIDUJÍ S NEROZLOŽITELNOU KŘIVKOU TŘETÍHO STUPNĚ

VÁCLAV METELKA, Liberec

Velmi významnou podmnožinu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$ tvoří ty zajímavé případy, ve kterých konfigurační body leží na nerozložitelných kubikách. Doposud byly v literatuře popsány čtyři konfigurace těchto vlastností. Objevili je postupně J. Hesse, De Vries, B. Bydžovský a J. Metelka. Autoru se podařilo vypočítat další čtyři konfigurace na nerozložitelné kubice a zároveň dokázat, že více konfigurací těchto vlastností již existovat nemůže. Použil k tomu hlavně metody klasifikace rovinných konfigurací podle typů jejich bodů. Na zajímavé vlastnosti těchto konfigurací hodlá poukázat v pokračování tohoto článku.

Резюме

ПЛОСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ $(12_4, 16_3)$, КОТОРЫЕ ИНЦИДЕНТНЫ С НЕПРИВОДИМОЙ КРИВОЙ ТРЕТБЕГО ПОРЯДКА

ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец

Значительное подмножество плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$ составляют те интересные случаи, когда конфигурационные точки лежат на неприводимых кубических кривых. До сих пор были описаны четыре конфигурации с этими свойствами. Обнаружили их постепенно И. Гесе (Hesse), Де Врие (De Vries), Б. Быджовский и И. Метелка. Автору удалось найти остальные четыре конфигурации на неприводимой кубической кривой и одновременно доказать, чро больше конфигураций с этими свойствами существовать уже не может. Для этой цели был применен главным образом метод классификации плоских конфигураций в зависимости от типов их точек. Интересные свойства этих конфигураций собирается автор описать в продолжении настоящей статьи.