Časopis pro pěstování matematiky

Ivan Kolář

Сопряженные сети аксиального и аксиально-радиального типа относительно конгруэнции канонических прямых переменного индекса

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 64--71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117556

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ АКСИАЛЬНОГО И АКСИАЛЬНО-РАДИАЛЬНОГО ТИПА ОТНОСИТЕЛЬНО КОНГРУЭНЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ ПЕРЕМЕННОГО ИНДЕКСА

ИВАН КОЛАРЖ (Ivan Kolář), Брно

(Поступило в редакцию 4/XI 1964 г.)

Э. Бомпиани [1] поставил и решал задачу, когда к поверхности в трехмерном проективном пространстве P_3 можно присоединить такую конгруэнцию прямых, что в ее аксиальной системе существует бесконечное множество сопряженных сетей. Одинаковым вопросом для сетей аксиально-радиального типа занимался Й. Брейха [2]. Для поверхностей с проективной связностью аналогичные вопросы решали Й. Клапка и В. Гавел [3] и для пары поверхностей В. Гавел [4].

Другие обобщения задачи Бомпиани рассматриваются в работах Р. Н. Щербакова [6], стр. 80–82, и В. Гавела [5], в которых характеризуются поверхности, на которых существует сопряженная сеть аксиального, аксиально-радиального или радиального типа относительно конгруэнции канонических прямых постоянного индекса.

В предлагаемой работе рассматриваются аналогичные вопросы для конгруэнций канонических прямых переменного индекса. Хотя эти задачи кажутся нерешенными и для поверхностей в P_3, рассуждения относятся непосредственно к поверхностям с проективной связностью (типа $P^2_{0,3}$ по А. Швецу, [7]) и поверхность в P_3 представляет только частный случай. Мы используем метод „кажущегося погружения в проективное пространство", принадлежащий А. Швецу, [9].

Автор выражает глубокую благодарность проф. Й. Клапке и доц. В. Гавелу, под руководством которых была выполнена эта работа.

1. Специальный репер. Канонический пучок. Пусть к поверхности Π с проективной связностью (типа $P^2_{0,3}$) присоединен специальный репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ А. Швеца, описанный в [8], стр. 386–7

$$\begin{aligned}
(1)\qquad \mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 A_0 + \mathrm{d}u A_1 + \mathrm{d}v A_2 \\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta\,\mathrm{d}u A_2 + (1-h)\,\mathrm{d}v A_3 \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma\,\mathrm{d}v A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\,\mathrm{d}u A_3 \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3\,,
\end{aligned}$$

где u, v — асимптотические параметры, ω_i^j — формы $a_i^j \mathrm{d}u + b_i^j \mathrm{d}v$, β, γ — обобщенные коэффициенты Фубини и h — кручение поверхности.

В дальнейшем мы ограничимся (см. [5]) поверхностями вида

$$\beta \neq 0\,, \quad \gamma \neq 0\,, \quad h = 0\,. \tag{2}$$

Канонической прямой k_t первого рода индекса t называют следующую прямую в локальном пространстве $P_3(u, v)$ точки $A_0(u, v) \in \Pi$

$$\begin{aligned} k_t \equiv [A_0, (b_1^1 - b_2^2 - (\ln \beta)_v + t\beta B)\, A_1 + \\ + (a_2^2 - a_1^1 - (\ln \gamma)_u + t\gamma B)\, A_2 + 2A_3]\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где в согласии с [5] мы полагаем

$$A = \gamma^{-1}(\ln \beta\gamma^2)_u\,, \quad B = \beta^{-1}(\ln \beta^2\gamma)_v\,. \tag{4}$$

Геометрическое значение этих прямых описал Б. Ценкл в [10] стр. 90. Канонической прямой $\bar{k}_t$ второго рода индекса t называют прямую, определенную уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{k}_t \equiv x^3 = [a_2^2 - a_1^1 - (\ln \gamma)_u + t\gamma A]\, x^1 + \\ + [b_1^1 - b_2^2 - (\ln \beta)_v + t\beta B]\, x^2 - 2x^0 = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Канонические прямые одинакового индекса полярно сопряжены относительно пучка т. наз. существенных квадрик Дарбу (см. [10], стр. 87, где также показано их геометрическое значение)

$$x^0x^3 - x^1x^2 = \tfrac{1}{2}c_{33}(x^3)^2\,, \tag{6}$$

c_{33} = конст.

В общем случае прямые (3) и (5) образуют пучок. Только когда

$$A = 0\,, \quad B = 0 \tag{7}$$

оба пучка вырождаются в прямую; соответствующую поверхность Π называют *коинцидентной*.

2. Сопряженные сети аксиального типа относительно конгруэнции канонических прямых. Пусть во всяком локальном пространстве $P_3(u, v)$ определена прямая l_1, проходящая через точку A_0 и нележащая в касательной плоскости поверхности Π. Кривая $C \subset \Pi$ называется *аксиальной кривой* конгруэнции Γ_1, образованной прямыми l_1, когда ее соприкасающаяся плоскость в каждой точке содержит прямую l_1. Совокупность этих кривых называют *аксиальной системой* конгруэнции Γ_1 и сопряженную сеть называют *сетью аксиального типа относительно конгруенции* Γ_1, когда все ее кривые принадлежат аксиальной системе этой конгруэнции.

Будем исследовать конгруэнции канонических прямых индекса $t = t(u, v)$, для которых существует сопряженная сеть аксиального типа. Пусть эта сеть определена дифференциальным уравнением

$$(8) \qquad \mathrm{d}v^2 - N(u, v)\,\mathrm{d}u^2 = 0$$

и состоит из семейств

$$(9) \qquad v' = M(u, v)\,,$$

$$(10) \qquad v' = -M(u, v)\,,$$

так что

$$(11) \qquad M^2 = N\,.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости кривой семейства (9) имеет вид

$$(12) \qquad x^1 2M^2 - x^2 2M + \\ + x^3(\beta + \overline{a_2^2 - a_1^1}M + \overline{b_2^2 - b_1^1}M^2 - \gamma M^3 + M_u + MM_v) = 0\,.$$

Прямая (3) находится в этой плоскости при выполнении соотношения

$$(13) \quad \beta + [(\ln\gamma)_u - t\gamma A]\,M + [t\beta B - (\ln\beta)_v]\,M^2 - \gamma M^3 + M_u + MM_v = 0\,.$$

Условие для того, чтобы (3) лежала также в соприксающейся плоскости кривой семейства (10), получим из (13) после замены M на $-M$

$$(14) \quad \beta - [(\ln\gamma)_u - t\gamma A]\,M + [t\beta B - (\ln\beta)_v]\,M^2 + \gamma M^3 - M_u + MM_v = 0\,.$$

Комбинируя (13) и (14), получим следующее утверждение: Необходимое и достаточное условие для того, чтобы (8) была сетью аксиального типа относительно конгруэнции канонических прямых индекса $t = t(u, v)$, имеет вид

$$(15) \qquad N_u = 2[t\gamma A - (\ln\gamma)_u]\,N + 2\gamma N^2\,, \quad N_v = -2\beta + 2[(\ln\beta)_v - t\beta B]\,N\,.$$

Исключая $t(u, v)$ из (15), получим уравнение

$$(16) \qquad \beta BN_u + \gamma AN_v - 2\beta\gamma BN^2 + \\ + 2[\beta(\ln\gamma)_u B - \gamma(\ln\beta)_v A]\,N + 2\beta\gamma A = 0\,.$$

Если не выполнено (7), то (16) будет уравнение с частными производными для функции $N(u, v)$, которое определяет ее с произволом одной функции одной переменной. Пусть $N(u, v)$ является решением этого уравнения, потом из обоих уравнений (15) определим одну и ту же функцию $t(u, v)$ и в аксиальной системе конгруэнции канонических прямых индекса $t(u, v)$ находится сопряженная сеть (8). Итак, доказана

Теорема 1. *К поверхности Π (1), (2), которая не является коинцидентной, всегда возможно присоединить конгруэнцию канонических прямых такую, что в ее аксиальной системе находится сопряженная сеть. Такие конгруэнции существуют с произволом одной функции одной переменной.*

Рассмотрим еще коинцидентные поверхности. Подставляя (7) в (15), получим

$$N_u = -2(\ln \gamma)_u N + 2\gamma N^2 , \quad N_v = -2\beta + 2(\ln \beta)_v N . \tag{17}$$

Из условий интегрируемости уравнений (17), пользуясь уравнениями (7) и их производными, получаем $N = 0$. Итак, имеем

Добавление 1. *В аксиальной системе конгруэнции канонических прямых коинцидентной поверхности не существует сопряженная сеть.*

3. Сопряженные сети аксиально-радиального типа. Кривую $C \subset \Pi$ называют *радиальной кривой* конгруэнции Γ_2, образованной прямыми l_2, лежащими в касательной плоскости поверхности Π и непроходящими через точку поверхности, когда точка ребра возврата огибающей семейства касательных плоскостей поверхности Π вдоль кривой C лежит на прямой l_2. Сопряженную сеть $\mathscr{S}$ называют *сетью аксиально-радиального типа относительно пары конгруэнций* Γ_1, Γ_2, когда одно семейство ее кривых образуют аксиальные кривые конгруэнции Γ_1, а второе семейство радиальные кривые конгруэнции Γ_2.

Будем исследовать пары конгруэнций Γ_1, Γ_2 образованные каноническими прямыми $k_t, \bar{k}_t$ одинакового индекса $t = t(u, v)$ такие, что на Π существует сопраженная сеть аксиально-радиального типа относительно пары Γ_1, Γ_2. Пусть сеть $\mathscr{S}$ определена уравнением (8) и семейства ее кривых уравнениями (9), (10). Семейство (9) будет образовано аксиальными кривимы конгруэнции Γ_1 при выполнении условия (13). Точка ребра возврата огибающей семейства касательных плоскостей поверхности Π вдоль кривой семейства (10) – как легко получить (удобно пользоваться двойственным репером, см. [8], стр. 392) – будет

$$\begin{aligned} A_0(\beta + \overline{a_2^2 - a_1^1} M + \overline{b_1^1 - b_2^2} M^2 + \gamma M^3 + M_u - M M_v) + \\ + A_1 2M + A_2 2M^2 . \end{aligned} \tag{18}$$

Условие для того, чтобы эта точка принадлежала прямой (5), имеет вид

$$\begin{aligned} \beta + [(\ln \gamma)_u - t\gamma A]\, M + [(\ln \beta)_v - t\beta B]\, M^2 + \\ + \gamma M^3 + M_u - M M_v = 0 . \end{aligned} \tag{19}$$

Исключая t из (13), (19), получим уравнение

$$\beta B M_u + \gamma A M_v - \gamma^2 A M^2 + [\beta(\ln \gamma)_u B - \gamma(\ln \beta)_v A]\, M + \beta^2 B = 0 . \tag{20}$$

Аналогично §2 получим следующие заключения.

Теорема 2. *К поверхности Π* (1), (2), *которая не является коинцидентной, всегда возможно присоединить пару конгруэнций соответствующих канонических прямых такую, что на Π существует сопряженная сеть аксиально-радиального типа относительно этой пары. Такие пары существуют с произволом одной функции одной переменной.*

Добавление 2. *На коинцидентной поверхности не существует сопряженная сеть аксиально-радиального типа относительно пары конгруэнций ее канонических прямых.*

4. Сопряженная сеть, образованная одновременно аксиальными и радиальными кривым конгруэнции канонических прямых. Будем исследовать задачу: При каких условиях возможно присоединить к поверхности Π конгруэнции Γ_1 и Γ_2 канонических прямых (взаимно независимых переменных индексов) такие, что на Π существует сопряженная сеть аксиального типа относительно Γ_1 и одновременно радиального типа относительно Γ_2?

Дадим еще одну равносильную формилировку этой задачи. Линию пересечения соприкасающихся плоскостей кривых сети $\mathscr{S}$ называют *первой осью* этой сети и прямую, соединяющую точки ребра возврата огибающей семейства касательных плоскостей поверхности вдоль кривых сети, называют *второй осью* сети. Теперь нашу задачу можно формулировать более сжато: При каких условиях существует на поверхности Π сопряженная сеть $\mathscr{S}$ с обеими осями, образованными каноническими прямыми?

Пусть сеть $\mathscr{S}$ определена уравнением (8). Первая ось сети (8) является канонической прямой при выполнении соотношения (16). Условие для того, чтобы вторая ось сети (8) была канонической прямой, можно получить аналогично, или более просто — это двойственные рассуждения, см. [4], стр. 3 — тем, что в (16) заменим β, γ на $-\beta$, $-\gamma$ и в следствие (4) также A, B на $-A$, $-B$. Итак, это условие имеет вид

$$\beta BN_u + \gamma AN_v + 2\beta\gamma BN^2 + 2[\beta(\ln\gamma)_u B - \gamma(\ln\beta)_v A]\, N - 2\beta\gamma A = 0\,. \tag{21}$$

Сеть $\mathscr{S}$ с требуемым свойством существует на поверхности Π тогда и только тогда, когда уравнения (16) и (21) имеют общее решение. Комбинируя их, получим равносильную систему

$$\begin{aligned} &\beta BN_u + \gamma AN_v + 2[\beta(\ln\gamma)_u B - \gamma(\ln\beta)_v A]\, N = 0\,, \\ &BN^2 - A = 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Эти уравнения имеют общее решение тогда и только тогда, когда решение уравнения (22_2) удовлетворяет уравнению (22_1). При этом корни уравнения (22_2) отличаются только знаком, и уравнение (22_1) линейно относительно N, N_u, N_v, так что уравнению (22_1) удовлетворяют или оба корня (22_2) или не удовлетворяет ни один. Это свойство системы (22) обозначим как свойство A и дадим позже его геометрическое толкование.

Уравнения (22) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\beta B(\ln N)_u + \tfrac{1}{2}\gamma A(\ln N)_v + \beta(\ln\gamma)_u B - \gamma(\ln\beta)_v A = 0 \\
&\tfrac{1}{2}\ln N = \ln(A/B)\,.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Подставляя производные (23_2) по u и v в (23_1), получим условие интегрируемости системы (16), (21)

$$
\beta B(\ln\gamma AB^{-1})_u - \gamma A(\ln\beta BA^{-1})_v = 0\,.
\tag{24}
$$

Этим доказана

Теорема 3. *Поверхность Π* (1), (2) *обладает одним и только одним из следующих свойств:*

(а) *на Π не существует ни одна сопряженная сеть с обеими осями, образованными каноническими прямыми;*

(б) *на Π находятся точно две такие сети.*

Поверхность с свойством (б) *характеризуется соотношением* (24).

5. Геометрическое толкование свойства A системы (22). Сети $\mathcal{S}: \mathrm{d}v^2 - N\,\mathrm{d}u^2 = 0$ и $\overline{\mathcal{S}}: \mathrm{d}v^2 + N\,\mathrm{d}u^2 = 0$, которые при выполнении соотношения (24) представляют решение задачи § 4, обладают следующим свойством: Сеть $\overline{\mathcal{S}}$ гармонически отделяет сеть $\mathcal{S}$ и асимптотическую сеть поверхности Π. Такую сеть называет Э. Лэйн [11], стр. 95 *присоединенной сопряженной сетью* относительно сети $\mathcal{S}$. Это свойство, очевидно, инволютивно.

Теорема 4. *Первая ось сети $\mathcal{S}$ и вторая ось присоединенной сети $\overline{\mathcal{S}}$ полярно сопряжены относительно пучка существенных квадрик Дарбу.*

Доказательство. Для поверхности в P_3 теорема доказана в [11], стр. 97. Для поверхности с проективной связностью аналогическое доказательство вкратце выполним.

Соприкасающаяся плоскость кривой семейства (9) определена уравнением (12). Соприкасающуюся плоскость кривой семейства (10) получим из (12) после замены M на $-M$. Первая ось сети $\mathcal{S}$ является линией пересечения следующих плоскостей:

$$
[A_0, (2\beta - 2\overline{b_1^1 - b_2^2}N + N_v)\,A_1 - (2\overline{a_2^2 - a_1^1}N - 2\gamma N^2 + N_u)\,A_2 - 4NA_3]\,.
\tag{25}
$$

Точка ребра возврата огибающей семейства касательных плоскостей поверхности вдоль кривой семейства (10) определена выражением (18), для кривой семейства (9) получим ее после замены M на $-M$. Вторая ось сети $\mathcal{S}$ имеет поэтому уравнение

$$(26)\qquad x^3 = -4Nx^0 + x^1(\overline{2a_2^2 - a_1^1N} + 2\gamma N^2 + N_u) + \\ + x^2(2\beta + \overline{2b_1^1 - b_2^2N} - N_v) = 0\,.$$

Вторую ось сети $\overline{\mathcal{S}}$ получим после замены N на $-N$ в (26)

$$(27)\qquad x^3 = 4Nx^0 - x^1(\overline{2a_2^2 - a_1^1N} - 2\gamma N^2 + N_u) + \\ + x^2(2\beta - \overline{2b_1^1 - b_2^2\,N} + N_v) = 0\,.$$

Из (25), (27) и (6) следует теорема 4.

Теперь дадим упомянутое об'яснение. Оси сети $\overline{\mathcal{S}}$ полярно сопряжены с осями сети $\mathcal{S}$ относительно пучка существенных квадрик Дарбу. Когда сеть $\mathcal{S}$ представляет решение задачи § 4, то ее оси являются каноническими прямыми. По теореме 4 и § 1 также оси сети $\overline{\mathcal{S}}$ являются каноническими прямыми, и поэтому сеть $\overline{\mathcal{S}}$ тоже представляет решение рассматриваемой задачи.

Литература

[1] *E. Bompiani:* Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario, Boll. Un. Mat. Ital. *3* (1924), N. 1, 10—16.

[2] *J. Brejcha:* O axiálních a duálně axiálních systémech čar na ploše v S_3, obsahujících konjugované sítě, Čas. pěst. mat. *79* (1954), 252—260.

[3] *В. Гавел-Й. Клапка:* Сопряженные сети и аксиальные системы кривых на поверхности с проективной связностью, Геом. сборник Томского унив., вып. *5*, (1965), в печати.

[4] *V. Havel:* Konjugierte Netze und Axialsysteme einen Flächenpaares, Com. Math. Univ. Carolinae *5* (1964), 1—11.

[5] *V. Havel:* Konjugierte Netze axialer und axial-radialer Art bezüglich der Kongruenz der kanonischen Geraden festen Indexes, Mat.-fyz. čas. *15* (1965), в печати.

[6] *P. H. Щербаков:* Репер линии на поверхности в проективно-дифференциальной геометрии, Уч. записки Бурят-монгольского гос. пед. института, вып. *3*, 1953, 41—91.

[7] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle, Czech. Mat. J. *10* (1960), 523—550.

[8] *A. Švec:* Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective, Czech. Mat. J. *11* (1961), 386—397.

[9] *A. Švec:* K výkladu teorie prostorů s konexí, Čas. pěst. mat. *86* (1961), 425—432.

[10] *B. Cenkl:* L'équation de structure d'un espace à connexion projective, Czech. Mat. J. *14* (1964), 79—94.

[11] *E. P. Lane:* Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces, Chicago 1932.

Адрес автора: **Brno, Leninova 75 (Katedra matematiky VAAZ).**

Výtah

KONJUGOVANÉ SÍTĚ AXIÁLNÍHO A AXIÁLNĚ-RADIÁLNÍHO TYPU VZHLEDEM KE KONGRUENCI KANONICKÝCH PŘÍMEK PROMĚNNÉHO INDEXU

IVAN KOLÁŘ, Brno

V práci se studují kongruence kanonických přímek, v jejichž axiálním systému existuje konjugovaná síť, a analogické problémy pro sítě axiálně-radiálního typu. Dále se studují konjugované sítě, jejichž první i druhé osy jsou kanonické přímky. Takové sítě existují pouze na plochách (24) a jsou dvě, vzájemně asociované. V celém článku je uvažována varieta $P^2_{0,3}$ s projektivní konexí, ačkoliv výsledky se zdají nové i pro plochu v projektivním prostoru.

Résumé

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS DU TYPE AXIAL ET AXIAL-RADIAL PAR RAPPORT AUX CONGRUENCES DE DROITE CANONIQUES D'INDICE VARIABLE

IVAN KOLÁŘ, Brno

Dans ce travail, on étudie les congruences de droites canoniques, dont le système axial contient un réseau conjugué, et les problèmes analogues sur les réseaux du type axial-radial. On étudie aussi les réseaux conjugués, dont les premiers et deuxièmes axes sont formés par des droites canoniques. Ces réseaux existent seulement sur les surfaces (24); ils sont deux et associés réciproquement. Dans tout l'article, on considère une variété $P^2_{0,3}$ à connexion projective, mais les résultats paraîssent nouveaux aussi pour la surface plongée dans l'espace projectif.