Alexander Rosa

O cyklických rozkladoch kompletného grafu na nepárnouholníky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 53--63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117555

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O CYKLICKÝCH ROZKLADOCH KOMPLETNÉHO GRAFU NA NEPÁRNOUHOLNÍKY

ALEXANDER ROSA, Bratislava

(Došlo dňa 29. septembra 1964)

I

A. Nech je dané k prirodzené, $p > 3$ a nepárne. Označme $n = 2kp + 1$.

Definícia 1. Maticu $A = \|a_{ij}\|$ typu $k \times p$ nazveme maticou typu (1), ak platí:

$$\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kp}\} = \{1, 2, \ldots, kp\}\,. \tag{1}$$

Veta 1. *Pre ľubovoľné k prirodzené, $p > 3$ a nepárne existuje matica $A = \|a_{ij}\|$ typu (1) a k nej konštanty $\varepsilon_{ij} = 1$ alebo -1 tak, že platí*

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_{ij} \equiv 0 \pmod{n}$$

Dôkaz vykonáme tak, že skonštruujeme maticu A (a určíme k nej konštanty ε_{ij}) s uvedenými vlastnosťami.

1. Nech je najprv $p = 4m + 1$, $m \geqq 1$. Potom bude $A = \|a_{ij}\|$ definovaná takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} (i-1)\,p + j & 1 \leqq j \leqq p - 2 \\ {[k - (i-1)/2]}\,p - 1 & j = p - 1 \\ {[k - (i-1)/2]}\,p & j = p \end{array}\right\} & i \text{ nepárne} \\ \left.\begin{array}{ll} ip/2 - 1 & j = 1 \\ ip/2 & j = 2 \\ (i-1)\,p + j - 2 & 3 \leqq j \leqq p \end{array}\right\} & i \text{ párne} \end{cases}$$

pričom:

pri $m = 1$ $\varepsilon_{2q,4}, \varepsilon_{2q,5}; \varepsilon_{2q+1,2}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$

pri $m \geqq 2$ $\varepsilon_{2q,m+3}, \ldots, \varepsilon_{2q,3m+2}; \varepsilon_{2q+1,m+1}, \ldots, \varepsilon_{2q+1,3m-2}; \varepsilon_{2q+1,4m-2}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$.

Ukážme, že takto zostrojená matica A splňuje s konštantami ε_{ij} podmienku vety. Že sa každé z čísel $1, 2, \ldots, kp$ vyskytuje v matici A práve raz, je zrejmé. Ďalej, $2q$-tý riadok matice A má tvar: $qp - 1, qp, (2q - 1)p + 1, (2q - 1)p + 2, \ldots$, $\ldots, 2qp - 3, 2qp - 2$.

Dostaneme (definujeme $\sum_{j=x}^{y} a_{ij} = 0$ pre $y < x$):

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q,j}\varepsilon_{2q,j} = qp - 1 + qp +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} [(2q-1)p+r] - \sum_{r=m+1}^{3m} [(2q-1)p+r] + \sum_{r=3m+1}^{4m-1} [(2q-1)p+r] =$$

$$= 2qp - 1 + [(2q-1)2p + m + 1]m/2 -$$

$$- [(2q-1)2p + 4m + 1]m + (4qp - m - 2)(m-1)/2 = 0.$$

Ďalej, $(2q + 1)$-ý riadok matice A má tvar:

$$2qp + 1, 2qp + 2, \ldots, (2q+1)p - 2, (k-q)p - 1, (k-q)p.$$

Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q+1,j}\varepsilon_{2q+1,j} = \sum_{r=1}^{m} (2qp + r) - \sum_{r=m+1}^{3m-2} (2qp + r) +$$

$$+ \sum_{r=3m-1}^{4m-3} (2qp + r) - [(2q+1)p - 3] + (2q+1)p - 2 +$$

$$+ (k-q)p - 1 + (k-q)p = (4qp + m + 1)m/2 -$$

$$- (4qp + 4m - 1)(m - 1) + [(2q+1)2p - m - 6](m-1)/2 +$$

$$+ 1 + (k-q)2p - 1 = 2kp + 1 = n.$$

2. Nech je teraz $p = 4m + 3$, $m \geqq 1$. Potom bude matica $A = \|a_{ij}\|$ definovaná takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i-1)p + j & 1 \leqq j \leqq p - 3 \\ (i+1)p/2 - 2 & j = p - 2, i \text{ nepárne} \\ (k - i/2 + 1)p - 2 & j = p - 2, i \text{ párne} \\ (i+1)p/2 - 1 & j = p - 1, i \text{ nepárne} \\ (k - i/2 + 1)p - 1 & j = p - 1, i \text{ párne} \\ ip & j = p \end{cases}$$

pričom:

pri $m = 1$ $\varepsilon_{2q,3}, \varepsilon_{2q,7}; \varepsilon_{2q+1,3}, \varepsilon_{2q+1,4}, \varepsilon_{2q+1,7}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$

pri $m \geqq 2$ $\varepsilon_{2q,3}, \ldots, \varepsilon_{2q,m+1}$; $\varepsilon_{2q,p-m-3}, \ldots, \varepsilon_{2q,p-4}$; $\varepsilon_{2q,p}$; $\varepsilon_{2q+1,1}, \ldots, \varepsilon_{2q+1,m-1}$; $\varepsilon_{2q+1,3m}, \ldots, \varepsilon_{2q+1,p-3}$; $\varepsilon_{2q+1,p}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$.

Ukážme, že takto zostrojená matica A vyhovuje s konštantami ε_{ij} podmienke vety. Že sa každé z čísel $1, 2, \ldots, kp$ vyskytuje v A práve raz, je zrejmé. Ďalej, $2q$-tý riadok matice A má tvar:

$$(2q - 1) p + 1, (2q - 1) p + 2, \ldots, 2qp - 3, (k - q + 1) p - 2,$$
$$(k - q + 1) p - 1, 2qp .$$

Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q,j}\varepsilon_{2q,j} = (2q - 1) p + 1 + (2q - 1) p + 2 - \sum_{r=3}^{m+1}[(2q - 1) p + r] +$$
$$+ \sum_{r=m+2}^{3m-1} [(2q - 1) p + r] - \sum_{r=3m}^{4m-1} [(2q - 1) p + r] + 2qp - 3 +$$
$$+ (k - q + 1) p - 2 + (k - q + 1) p - 1 - 2qp = 2p(2q - 1) + 3 -$$
$$- [2p(2q - 1) + m + 4] (m - 1)/2 + [2p(2q - 1) + 4m + 1] (m - 1) -$$
$$- [2p(2q - 1) + 7m - 1] m/2 - 2qp - 3 + 2p(k - q + 1) - 3 - 2qp =$$
$$= 2kp + 1 = n.$$

Ďalej, $(2q + 1)$-ý riadok matice A bude mať tvar:

$$2qp + 1, 2qp + 2, \ldots, (2q + 1) p - 3, (q + 1) p - 2, (q + 1) p - 1, (2q + 1) p.$$

Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q+1,j}\varepsilon_{2q+1,j} = - \sum_{r=1}^{m-1}(2qp + r) + \sum_{r=m}^{3m-1} (2qp + r) - \sum_{r=3m}^{4m} (2qp + r) +$$
$$+ (q + 1) p - 2 + (q + 1) p - 1 - (2q + 1) p =$$
$$= - (4qp + m) (m - 1)/2 + (4qp + 4m - 1) m - (4qp + 7m) (m + 1)/2 +$$
$$+ 2p(q + 1) - 3 - (2q + 1) p = 0.$$

Tým je dôkaz vety 1 vykonaný.

B. Nech je dané k prirodzené, $p > 3$ a nepárne, a množina M všetkých prirodzených čísel $\leqq kp + (p - 1)/2$, ktoré nie sú násobkami $(2k + 1)$. Týchto čísel je spolu kp. Označme $n = 2kp + p$.

Definícia 2. Maticu $A = \|a_{ij}\|$ typu $k \times p$ nazveme maticou typu (2), ak platí:

$$\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kp}\} = M . \tag{2}$$

Veta 2. *Pre ľubovoľné k prirodzené, $p > 3$ a nepárne existuje matica $A = \|a_{ij}\|$ typu (2) a k nej konštanty $\varepsilon_{ij} = 1$ alebo -1 tak, že platí:*

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_{ij} \equiv 0 \pmod{n}$$

Dôkaz. Skonštruujeme maticu A (a určíme konštanty ε_{ij}) s uvedenými vlastnosťami. Matica $A = \|a_{ij}\|$ bude definovaná takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2k - 2i + 1 & j = 1 \\ i & j = 2,\ i \text{ párne} \\ 2k - i + 1 & j = 2,\ i \text{ nepárne} \\ (2k+1)(j-1)/2 + i & 3 \leqq j \leqq p,\ j \text{ nepárne} \\ (2k+1)j/2 - i & 3 < j < p,\ j \text{ párne} \end{cases}$$

pričom

a) v prípade, keď $p = 4m + 1$

pri $m = 1$ $\varepsilon_{2q,3}, \varepsilon_{2q,4}; \varepsilon_{2q+1,2}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$

pri $m \geqq 2$ $\varepsilon_{2q,3}, \varepsilon_{2q,4}, \varepsilon_{2q,7}, \varepsilon_{2q,8}, \varepsilon_{2q,11}, \varepsilon_{2q,12}, \ldots, \varepsilon_{2q,p-6}, \varepsilon_{2q,p-5}, \varepsilon_{2q,p-2}, \varepsilon_{2q,p-1}; \varepsilon_{2q+1,2}; \varepsilon_{2q+1,5}, \varepsilon_{2q+1,6}, \ldots, \varepsilon_{2q+1,p-8}, \varepsilon_{2q+1,p-7}, \varepsilon_{2q+1,p-4}, \varepsilon_{2q+1,p-3}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$

b) v prípade, keď $p = 4m + 3$

pri $m = 1$ $\varepsilon_{2q,1}, \varepsilon_{2q,5}, \varepsilon_{2q,7}, \varepsilon_{2q+1,6}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$

pri $m \geqq 2$ $\varepsilon_{2q,1}; \varepsilon_{2q,4}, \varepsilon_{2q,6}, \ldots, \varepsilon_{2q,2m}; \varepsilon_{2q,2m+3}, \varepsilon_{2q,2m+5}, \ldots, \varepsilon_{2q,p-2}, \varepsilon_{2q,p}; \varepsilon_{2q+1,4}, \varepsilon_{2q+1,6}, \varepsilon_{2q+1,2m}; \varepsilon_{2q+1,2m+3}, \varepsilon_{2q+1,2m+5}, \ldots, \varepsilon_{2q+1,p-4}; \varepsilon_{2q+1,p-1}$ sa rovnajú -1 a všetky ostatné ε_{ij} sa rovnajú $+1$.

Ukážme, že takto zostrojená matica A splňuje s konštantami ε_{ij} podmienku vety. Že sa každé z čísel množiny M vyskytuje v matici A práve raz, je zrejmé. Ďalej, $2q$-tý riadok matice A má tvar:

$$2k - 4q + 1, 2q, 2k + 1 + 2q, 2(2k + 1) - 2q, 2(2k + 1) + 2q, 3(2k + 1) - 2q,$$
$$3(2k + 1) + 2q, \ldots, (p - 1)/2 \,.\, (2k + 1) - 2q, p - 1)/2 \,.\, (2k + 1) + 2q \,.$$

Dostaneme

a) keď $p = 4m + 1$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q,j}\varepsilon_{2q,j} = (2k - 4q + 1) + 2q - [(2k + 1) + 2q] - [2(2k + 1) - 2q] +$$
$$+ [2(2k + 1) + 2q] + [3(2k + 1) - 2q] - [3(2k + 1) + 2q] -$$
$$- [4(2k+1)-2q] + - \ldots + [(p-3)/2 \,.\, (2k+1)-2q] - [(p-3)/2 \,.\, (2k+1)+2q] -$$
$$- [(p - 1)/2 \,.\, (2k + 1) - 2q] + [(p - 1)/2 \,.\, (2k + 1) + 2q] =$$
$$= 2k - 2q + 1 - 2k - 1 - 2q + (4q - 4q)(m - 1) + 4q = 0$$

b) keď $p = 4m + 3$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q,j}\varepsilon_{2q,j} = -(2k - 4q + 1) + 2i + [(2k + 1) + 2q] - [2(2k + 1) - 2q] +$$
$$+ [2(2k + 1) + 2q] - [3(2k + 1) - 2q] + [3(2k + 1) + 2q] -$$
$$- + \ldots - [m(2k+1) - 2q] + [m(2k + 1) + 2q] + [(m + 1)(2k + 1) - 2q] -$$
$$- [(m + 1)(2k + 1) + 2q] + - \ldots + [(p - 3)/2 . (2k + 1) - 2q] -$$
$$- [(p-3)/2 . (2k+1)+2q]+[(p-1)/2 . (2k+1)-2q]-[(p-1)/2 . (2k+1)+2q] =$$
$$= 4q + 2q + 2q + 4q(m - 1) - 4q(m + 1) = 0$$

Ďalej, $(2q + 1)$-ý riadok matice A má tvar:

$$2k - 4q - 1, 2k - 2q, 2k + 1 + q + 1, 2(2k + 1) - 2q - 1, 2(2k + 1) +$$
$$+ 2q + 1, 3(2k + 1) - 2q - 1. \ldots, (p - 1)/2 . (2k + 1) - 2q - 1,$$
$$(p - 1)/2 . (2k + 1) + 2q + 1.$$

Dostaneme

a) keď $p = 4m + 1$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q+1,j}\varepsilon_{2q+1,j} = (2k - 4q - 1) - (2k - 2q) + [(2k + 1) + 2q + 1] +$$
$$+ [2(2k + 1) - 2q - 1] - [2(2k + 1) + 2q + 1] - [3(2k + 1) - 2q - 1] +$$
$$+ [3(2k + 1) + 2q + 1] + - \ldots - [(p - 3)/2 . (2k + 1) - 2q - 1] +$$
$$+ [(p - 3)/2 . (2k + 1) + 2q + 1] + [(p - 1)/2 . (2k + 1) - 2q - 1] +$$
$$+ [(p - 1)/2 . (2k + 1) + 2q + 1] = -2q - 1 + 2k + 1 + 2q + 1 -$$
$$- [(4q + 2) - (4q + 2)](m - 1) + (p - 1)(2k + 1) = p(2k + 1) = n.$$

b) keď $p = 4m + 3$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{2q+1,j}\varepsilon_{2q+1,j} = (2k - 4q - 1) + (2k - 2q) + [(2k + 1) + 2q + 1] -$$
$$- [2(2k + 1) - 2q - 1] + [2(2k + 1) + 2q + 1] - [3(2k + 1) - 2q - 1] +$$
$$+ [3(2k + 1) + 2q + 1] - + \ldots - [m(2k + 1) - 2q - 1] +$$
$$+ [m(2k + 1) + 2q + 1] + [(m + 1)(2k + 1) - 2q - 1] -$$
$$- [(m + 1)(2k + 1) + 2q + 1] + - \ldots - [(p - 5)/2 . (2k + 1) + 2q + 1] +$$
$$+ [(p - 3)/2 . (2k + 1) - 2q - 1] + [(p - 3)/2 . (2k + 1) + 2q + 1] -$$
$$- [(p - 1)/2 . (2k + 1) - 2q - 1] + [(p - 1)/2 . (2k + 1) + 2q + 1] =$$
$$= 2k - 4q - 1 + 2(2k + 1) + [(4q + 2) - (4q + 2)](m - 1) +$$
$$+ (p - 3)(2k + 1) + 4q + 2 = p(2k + 1) = n.$$

Tým je dôkaz vety 2 vykonaný.

II

Nech je daný kompletný graf s n vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (označujeme ho $\langle n \rangle$).

Nech je daná hrana $v_i v_j$. Nazvime súčasné zväčšenie oboch indexov o jednotku, ktorým z hrany $v_i v_j$ dostaneme hranu $v_{i+1} v_{j+1}$, otočením (pritom $v_{i+jn} = v_i$ pre $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Dĺžku hrany $v_i v_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ v grafe $\langle n \rangle$ označme d_{ij} a definujme ako $d_{ij} = \min(|i - j|, n - |i - j|)$. Je zrejmé, že pri takejto definícii dĺžky hrany sa v grafe $\langle 2n + 1 \rangle$ vyskytujú len hrany dĺžky $1, 2, \ldots, n$, pričom sa v tomto grafe vyskytuje práve $(2n + 1)$ hrán dĺžky i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ktoré dostaneme napríklad tak, že vezmeme niektorú z hrán dĺžky i a postupne ju otočíme $(2n + 1)$-krát. Je zrejmé, že pri otočení (i viacnásobnom) sa dĺžka hrany nemení.

Nech je daná kružnica K v grafe $\langle 2n + 1 \rangle$. Nazvime otočením kružnice K súčasné otočenie každej z jej hrán. Ľahko sa overí nasledujúce tvrdenie: Ak nemajú žiadne dve hrany kružnice K rovnakú dĺžku v grafe $\langle 2n + 1 \rangle$, potom kružnica K', ktorú dostaneme z kružnice K j otočeniami $(1 \leqq j \leqq 2n)$, nebude mať s kružnicou K ani jednu spoločnú hranu.

Rozklad $\mathbf{R} = \{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ grafu $\langle 2n + 1 \rangle$ na r kružníc $K_1, K_2, \ldots, K_r$ nazvime cyklický, ak je splnená podmienka:

Ak $\mathbf{R}$ obsahuje kružnicu K, potom $\mathbf{R}$ obsahuje aj kružnicu K', ktorá vznikne z kružnice K otočením.

A. Uvažujme teraz graf $\langle 2kp + 1 \rangle$, kde k je prirodzené, $p > 3$ a nepárne, a v ňom k kružníc, každú s p hranami:

$$K_j = \{v_{i_{j1}} v_{i_{j2}}, v_{i_{j2}} v_{i_{j3}}, \ldots, v_{i_{jp}} v_{i_{j1}}\}; \ \{i_{j1}, \ldots, i_{jp}\} \subset \{1, 2, \ldots, 2kp + 1\}; \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ak má každú z možných dĺžok $1, 2, \ldots, kp$ v grafe $\langle 2kp + 1 \rangle$ práve jedna z kp hrán kružníc $K_1, K_2, \ldots, K_k$, nazveme systém týchto kružníc $\mathbf{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_k\}$ základným systémom kružníc v grafe $\langle 2kp + 1 \rangle$. Cyklický rozklad grafu $\langle 2kp + 1 \rangle$ na kružnice s p hranami potom zrejme dostaneme tak, že každú z kružníc základného systému otočíme postupne $2kp$-krát.

Problém spočíva teda v určení nejakého základného systému kružníc v grafe $\langle 2kp + 1 \rangle$. Tento systém kružníc môžeme určiť pomocou matice A typu (1), vyhovujúcej podmienke vety 1. Nech $A = \|a_{ij}\|$ je takáto matica. Zvoľme ľubovoľný vrchol v_x $(x \in \{1, 2, \ldots, 2kp + 1\})$. Kružnicu K_i určíme takto:

$$K_i = \{v_x v_{x+b_{i1}}, v_{x+b_{i1}} v_{x+b_{i2}}, \ldots, v_{x+b_{i,p-1}} v_x\}$$

kde

$$b_{ij} = \sum_{\nu=1}^{j} \varepsilon_{is_\nu} a_{is_\nu}; \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, p - 1$$

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_p\} = \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Ťažkosť však spočíva v tom, ako zabezpečiť, aby bola K_i skutočne kružnicou, tj. aby sa žiadny vrchol v postupnosti hrán K_i nevyskytoval viac ako dvakrát. Ľahko sa zistí, že splnenie tejto podmienky možno vo všeobecnom prípade dosiahnuť, ak platí veta, ktorú formuloval KOTZIG [1] ako domnienku (jeho formulácia je širšia, než tá, ktorú tu uvádzame a ktorá je pre naše ciele postačujúca):

Hypotéza. *Nech množina* $A = \{a_1 \ldots, a_p\} \subset \{1, 2, \ldots, 2kp\}$, *kde* k, p *sú prirodzené čísla, splňuje podmienky*

(A) $\sum_{i=1}^{p} a_i \equiv 0 \pmod m$,

(B) $a_i + a_j \not\equiv 0 \pmod m$ pre všetky $i, j = 1, \ldots, p$,

kde $m = 2kp + 1$.¹)

Potom možno nájsť takú permutáciu $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$ *prvkov množiny* A, *že súčet ľubovoľných menej než* p *po sebe nasledujúcich prvkov tejto permutácie nebude násobkom* m, *tj.*

$$\sum_{j=k}^{r} a_{i_j} \not\equiv 0 \pmod m \quad \text{pre všetky} \quad k, r = 1, \ldots, p, \; r > k, \; r - k < p - 1\,.$$

Ľahko možno dokázať platnosť tejto domnienky pre $p \leqq 7$, čo rieši problém cyklického rozkladu grafu $\langle 10k + 1 \rangle$ na 5-uholníky, resp. grafu $\langle 14k + 1 \rangle$ na 7-uholníky; pre ľubovoľné p však nebola dosiaľ dokázaná. Dôkazom tejto hypotézy by bol problém cyklického rozkladu kompletného grafu $\langle 2kp + 1 \rangle$ na kružnice s nepárnym počtom p hrán definitívne vyriešený.

B. Uvažujme teraz graf $\langle 2kp + p \rangle$, kde k je prirodzené, $p > 3$ a nepárne, a v ňom k kružníc, každú s p hranami:

$$K_s = \{v_{i_{s1}} v_{i_{s2}}, v_{i_{s2}} v_{i_{s3}}, \ldots, v_{i_{sp}} v_{i_{s1}}\}; \; \{i_{s1}, \ldots, i_{sp}\} \subset \{1, 2, \ldots, 2kp + p\}$$
$$s = 1, 2, \ldots, k\,.$$

V grafe $\langle 2kp + p \rangle$ sa vyskytujú hrany s dĺžkami $1, 2, \ldots, kp + (p-1)/2$. Ak má každú z dĺžok $1, 2, \ldots, 2k, 2k + 2, \ldots, 2(2k + 1) - 1, 2(2k + 1) + 1, \ldots, 3(2k + 1) - 1, 3(2k + 1) + 1, \ldots, (p-1)/2 \,.\, (2k + 1) - 1, (p - 1)/2 \,.\, (2k + 1) + 1, \ldots, kp + (p - 1)/2$ (týchto dĺžok je práve kp) v grafe $\langle 2kp + p \rangle$ práve jedna z kp hrán kružníc $K_1, K_2, \ldots, K_k$, nazveme systém týchto kružníc $\mathbf{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_k\}$ prvým základným systémom kružníc v grafe $\langle 2kp + p \rangle$.

Majme v grafe $\langle 2kp + p \rangle$ ďalej $(p - 1)/2$ kružníc, každú s p hranami:

$$K'_s = \{v_{j_{s1}} v_{j_{s2}}, v_{j_{s2}} v_{j_{s3}}, \ldots, v_{j_{sp}} v_{j_{s1}}\}; \; \{j_{s1}, \ldots, j_{sp}\} \subset \{1, 2, \ldots, 2kp + p\}$$
$$s = 1, 2, \ldots, (p - 1)/2$$

¹) Množiny tohto typu sa skúmajú v [2].

takých, že každá z hrán kružnice K_i' $(i = 1, \dots, (p-1)/2)$ má dĺžku $i(2k+1)$. Systém kružníc $\mathbf{K}' = \{K_1', K_2', \dots, K_{(p-1)/2}'\}$ nazveme druhým základným systémom kružníc v grafe $\langle 2kp + p \rangle$.

Cyklický rozklad grafu $\langle 2kp + p \rangle$ na kružnice s p hranami potom zrejme dostaneme tak, že každú z kružníc prvého základného systému otočíme postupne $(2kp + p - 1)$-krát a každú z kružníc druhého základného systému otočíme postupne $2k$-krát. Skutočne, počet kružníc, ktoré vzniknú otočením prvého základného systému je $k(2kp + p)$, počet kružníc, ktoré vzniknú otočením druhého základného systému, je $(p-1)/2 \,.\, (2k+1)$, čiže každá hrana grafu $\langle 2kp + p \rangle$ sa nachádza práve v jednej kružnici popísaného cyklického rozkladu.

Druhý základný systém kružníc v grafe $\langle 2kp + p \rangle$ sa ľahko skonštruuje takto: Zvoľme ľubovoľný vrchol v_x $(x \in \{1, 2, \dots, 2kp + p\})$. Kružnicu K_i' určíme takto:

$$K_i' = \{v_x v_{x+c_{i1}}, v_{x+c_{i1}} v_{x+c_{i2}}, \dots, v_{x+c_{1,p-1}} v_x\},$$

kde $c_{ij} = ij(2k+1)$; $i = 1, \dots, (p-1)/2$; $j = 1, \dots, p-1$.

Problém spočíva teda v určení nejakého prvého základného systému kružníc v grafe $\langle 2kp + p \rangle$. Tento systém kružníc môžeme určiť pomocou matice A typu (2), vyhovujúcej podmienke vety 2. Nech $A = \|a_{ij}\|$ je takáto matica. Zvoľme ľubovoľný vrchol v_x $(x \in \{1, 2, \dots, 2kp + p\})$. Kružnicu K_i určíme takto:

$$K_i = \{v_x v_{x+b_{i1}}, v_{x+b_{i1}} v_{x+b_{i2}}, \dots, v_{x+b_{i,p-1}} v_x\},$$

kde

$$b_{ij} = \sum_{v=1}^{j} \varepsilon_{is_v} a_{is_v}, \quad i = 1, \dots, k; \; j = 1, \dots, p-1;$$
$$\{s_1, s_2, \dots, s_p\} = \{1, 2, \dots, p\}.$$

Aj tu však treba zabezpečiť, aby K_i bola skutočne kružnicou, tj. aby sa žiadny vrchol v postupnosti hrán K_i nevyskytoval viac ako dvakrát. Ľahko sa zistí, že splnenie tejto podmienky možno vo všeobecnom prípade dosiahnuť, ak platí veta, analogická hypotéze Kotziga:

Hypotéza. *Nech množina* $A = \{a_1, \dots, a_p\} \subset N = \{1, 2, \dots, p(2k+1) - 1\} - \{2k+1, 2(2k+1), \dots, (p-1)(2k+1)\}$, *kde* k, p *sú prirodzené čísla, splňuje podmienky*

(A) $\sum_{i=1}^{p} a_i \equiv 0 \pmod{m}$,

(B) $a_i + a_j \not\equiv 0 \pmod{m}$ *pre všetky* $i, j = 1, \dots, p$,

kde $m = 2kp + p$.

Potom možno nájsť takú permutáciu $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$ *prvkov množiny* A, *že súčet ľubovoľných menej než* p *po sebe nasledujúcich prvkov tejto permutácie nebude násobkom* m, *tj.*

$$\sum_{j=k}^{r} a_{i_j} \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \textit{pre všetky} \quad k, r = 1, \dots, p, \; r > k, \; r - k < p - 1 \,.$$

Aj v tomto prípade možno ľahko dokázať platnosť tejto domnienky pre $p \leqq 7$, čo rieši problém cyklického rozkladu grafu $\langle 10k + 5 \rangle$ na 5-uholníky, resp. grafu $\langle 14k + 7 \rangle$ na 7-uholníky; pre ľubovoľné p však nebola dosiaľ dokázaná. Dôkazom tejto hypotézy by bol problém cyklického rozkladu kompletného grafu $\langle 2kp + p \rangle$ na nepárnouholníky s p hranami definitívne vyriešený.

Poznámka 1. Nezaoberáme sa tu rozkladom kompletných grafov na trojuholníky. Riešenie tohto problému však dáva tzv. systém Steinerových trojíc (pozri napr. [3, 4]). Systém Steinerových trojíc pre dané n, a teda aj rozklad grafu $\langle n \rangle$ na trojuholníky existuje práve vtedy, keď $n \equiv 1 \pmod 6$ alebo $n \equiv 3 \pmod 6$ (ak je naviac $n \neq 9$, potom existuje dokonca cyklický rozklad grafu $\langle n \rangle$ na trojuholníky).

Poznámka 2. Pri cyklických rozkladoch kompletných grafov na nepárnouholníky s p hranami sa nevyčerpávajú všetky možnosti uvedenými dvomi triedami kompletných grafov, $\langle 2kp + 1 \rangle$ a $\langle 2kp + p \rangle$ (vyčerpávajú sa nimi iba vtedy, ak je p prvočíslo alebo mocnina prvočísla). Svedčí o tom príklad cyklického rozkladu grafu $\langle 51 \rangle$ s vrcholmi $v_1, \ldots, v_{51}$ na 15-uholníky, ktorý popisuje tabuľka 1. Kvôli prehľadnosti píšeme v nej namiesto v_i len i; x označuje ľubovoľný vrchol v_x grafu $\langle 51 \rangle$. Cyklický rozklad grafu $\langle 51 \rangle$ dostaneme, ak kružnicu K_1 otočíme postupne 50-krát a každú z kružníc K_2, K_3 postupne 16-krát, čím dostaneme spolu 85 kružníc s 15 hranami.

TABUĽKA 1

Hrany kružnice		
K_1	K_2	K_3
$x, x + 8$	$x, x + 3$	$x, x + 15$
$x + 8, x + 17$	$x + 3, x + 8$	$x + 15, x + 29$
$x + 17, x + 27$	$x + 8, x + 15$	$x + 29, x + 16$
$x + 27, x + 38$	$x + 15, x + 11$	$x + 16, x + 18$
$x + 38, x + 50$	$x + 11, x + 17$	$x + 18, x + 17$
$x + 50, x + 15$	$x + 17, x + 20$	$x + 17, x + 32$
$x + 15, x + 32$	$x + 20, x + 25$	$x + 32, x + 46$
$x + 32, x + 1$	$x + 25, x + 32$	$x + 46, x + 33$
$x + 1, x + 19$	$x + 32, x + 28$	$x + 33, x + 35$
$x + 19, x + 40$	$x + 28, x + 34$	$x + 35, x + 34$
$x + 40, x + 11$	$x + 34, x + 37$	$x + 34, x + 49$
$x + 11, x + 30$	$x + 37, x + 42$	$x + 49, x + 12$
$x + 30, x + 2$	$x + 42, x + 49$	$x + 12, x + 50$
$x + 2, x + 26$	$x + 49, x + 45$	$x + 50, x + 1$
$x + 26, x$	$x + 45, x$	$x + 1, x$

Poznámka 3. Otázkou cyklického rozkladu kompletného grafu na $4k$-uholníky sa zaoberá práca [5].

Literatúra

[1] *Kotzig A.:* Úlohy a problémy, Čas. pěst. matem. *89* (1964), 363.
[2] *Роса А., Зна́м Ш.:* Об одной комбинаторной задаче из теории сравнений, Mat.-fyz. časopis SAV *15* (1965), 49—59.
[3] *Skolem Th.:* Some remarks on the triple systems of Steiner, Math. Scand. *6* (1958), 273—280.
[4] *O'Keefe Edward S.:* Verification of a conjecture of Th. Skolem, Math. Scand. *9* (1961), 80—82.
[5] *Коциг А.:* О разложениях полного графа на $4k$-угольники, Mat.-fyz. časopis SAV *15* (1965) 229—233

Adresa autora: Bratislava, Obrancov mieru 41 (Kabinet matematiky SAV).

Резюме

О ЦИКЛИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ПОЛНОГО ГРАФА НА МНОГОУГОЛЬНИКИ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

АЛЕКСАНДЕР РОСА (Alexander Rosa), Братислава

В первой части статьи доказываются две теоремы:

Теорема 1 [*соотв.* 2]. *Для произвольного натурального k, и нечетного $p > 3$ существует $(k \times p)$-матрица $A = \|a_{ij}\|$, удовлетворяющая* (1) [*соотв.*, (2)] *такая, что выполняется соотношение*

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_{ij} \equiv 0 \pmod{n}\,, \quad i = 1, .\,., k\,,$$

где $\varepsilon_{ij} = +1$ или -1, $n = 2kp + 1$ [соотв., $n = 2kp + p$].

Во второй части исследуются возможности использования матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 1 и теоремы 2, для получения циклического разложения полного графа $\langle 2kp + 1\rangle$ и $\langle 2kp + p\rangle$ соответственно на p-угольники, где $p > 3$ и нечетно.

Если p – простое число или степень простого числа, то возможности циклического разложения полного графа на p-угольники исчерпываются указанными двумя классами полных графов, $\langle 2kp + 1\rangle$ и $\langle 2kp + p\rangle$. Приводится пример, показывающий, что это утверждение неверно в случае, когда p не является ни простым, ни степенью простого числа (циклическое разложение графа $\langle 51\rangle$ на 15-угольники).

Summary

ON THE CYCLIC DECOMPOSITIONS OF THE COMPLETE GRAPH INTO POLYGONS WITH ODD NUMBER OF EDGES

ALEXANDER ROSA, Bratislava

In the first part of the article the following two theorems are proved:

Theorems 1 and 2. *For arbitrary integral $k > 0$ and odd $p > 3$ there exists a $(k \times p)$-matrix $A = \|a_{ij}\|$ satisfying* (1) (*respectively,* (2)) *such that*

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_{ij} \equiv 0 \pmod{n}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

holds, where $\varepsilon_{ij} = +1$ or -1, $n = 2kp + 1$ ($n = 2kp + p$, respectively).

In the second part it is shown how matrices satisfying the conditions of theorems 1 and 2 may be used to obtain the cyclic decomposition of the complete graphs $\langle 2kp + 1 \rangle$ and $\langle 2kp + p \rangle$ into p-gons for odd $p > 3$.

If p is a prime or power of a prime, then the possibilities for the cyclic decompositions of the complete graph into p-gons are exhausted by the two classes of complete graphs, $\langle 2kp + 1 \rangle$ and $\langle 2kp + p \rangle$, mentioned above. An example is given showing that this statement is false if p is neither prime nor power of a prime (the cyclic decomposition of the graph $\langle 51 \rangle$ into 15-gons).