Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Petrův

Der Körper der in $\langle 0,\ 1 \rangle$ gleichmässig beschränkter Polynome

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 34--52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117554`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

DER KÖRPER DER IN $\langle 0, 1 \rangle$ GLEICHMÄSSIG BESCHRÄNKTER POLYNOME

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Eingegangen am 19. September 1964)

1. DEFINITION DES KONVEXEN KÖRPERS

1.1. Wir werden zuerst einige Begriffe der Theorie der konvexen Körper in E_n [1]) erwähnen:

Eine abgeschlossene und beschränkte konvexe Menge, die einen inneren Punkt enthält, heisst konvexer Körper.

Die Menge aller Grenzpunkte des konvexen Körpers heisst konvexe Hyperfläche. (Das ist nicht eine konvexe Menge.)

Es sei M eine abgeschlossene Menge. Die Menge aller konvexen Kombinationen der Punkte von M heisst konvexe Hülle der Menge M. Die konvexe Hülle kann man auch als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die die Menge M enthalten, charakterisieren.

Der Punkt des konvexen Körpers, der innerhalb keines Linienabschnitts, der zwei Punkte des Körpers verbindet, liegt, heisst Gipfelpunkt des Körpers.

Es seien $x, y_1, \ldots, y_m$ Punkte aus E_n. Wir werden sagen, dass der Punkt x eine konvexe Kombination der Punkte $y_1, \ldots, y_m$ ist, wenn es solche Zahlen $c_1, \ldots, c_m$ gibt, dass

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \,, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1 \,, \quad c_i \geqq 0 \,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \,.$$

1.2. In dieser Arbeit werden reelle Polynome höchstens n-ten Grades (einschliessend das Null-Polynom), d.h. die Polynome der Form $P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i$, wo x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ reelle Zahlen sind, untersucht. Man kann jedes solches Polynom als einen Punkt im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum E_n betrachten und zwar and so, dass man dem Polynom P den Punkt $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ zuordnet. Diese Abbildung ist eine eineindeutige Abbildung der Menge aller Polynome höchstens n-ter Grades auf E_{n+1}. In der ganzen Arbeit werden für uns die Ausdrücke „Polynom" und „Punkt aus E_{n+1}" immer dasselbe bedeuten.

[1]) siehe [1].

1.3. Wir bezeichnen K_n die Menge aller Polynome P höchstens n-ten Grades (einschliessend das Null-Polynom), die die Bedingung

(1) $$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P(t)| \leqq 1$$

erfüllen.

1.4. Satz. *K_n ist ein symmetrischer konvexer Körper.*

Beweis. Der Satz folgt gleich daraus, dass K_n der Durchschnitt der Einheitskugel des Raumes $C(0, 1)$ mit dem durch die Funktionen $1, t, \ldots, t^n$ definierten Unterraum ist.

2. DIE KONVEXE HYPERFLÄCHE DES KÖRPERS K_n

2.1. Die Funktion

$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P(t)| = \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} \left| \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \right|$$

ist eine stetige Funktion der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Ist also $\max |P(t)| < 1$, dann liegt P innerhalb des Körpers K_n. Die konvexe Hyperfläche, die den Körper K_n begrenzt, ist also durch die Gleichung

(2) $$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P(t)| = 1$$

gegeben.

Wir wollen genauer die Form dieser konvexen Hyperfläche untersuchen. Für die Gleichung (2) ist die Gültigkeit mindestens einer der folgenden Bedingungen notwendig:

1. $P(0) = 1$, d.h. $x_0 = 1$,
2. $P(0) = -1$, d.h. $x_0 = -1$,
3. $P(1) = 1$, d.h. $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$,
4. $P(1) = -1$, d.h. $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = -1$,
5. Es gibt ein $t_0 \in (0, 1)$ so, dass $P(t_0) = 1$ ist; damit $P \in K_n$ gilt, muss selbstverständlich noch $P'(t_0) = 0$ sein, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n} x_i t^i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i x_i t^{i-1} = 0 .$$

6. Es gibt ein $t_0 \in (0, 1)$ so, dass $P(t_0) = -1$, $P'(t_0) = 0$ ist, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n} x_i t^i = -1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i x_i t^{i-1} = 0 .$$

2.2. Jeder Grenzpunkt des Körpers K_n liegt also auf einer der folgenden Hyperflächen:

a) vier Hyperebenen:

$$x_0 = 1\,, \; x_0 = -1\,, \; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\,, \; \sum_{i=0}^{n} x_i = -1\,,$$

b) zwei Hyperflächen:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i t^i = 1\,, \; \sum_{i=0}^{n} i x_i t^{i-1} = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{n} x_i t^i = -1\,, \; \sum_{i=0}^{n} i x_i t^{i-1} = 0\,, \; (t \in (0, 1))\,.$$

Die konvexe Hyperfläche, die den Körper K_n begrenzt, ist also aus Teilen dieser sechs Hyperflächen gebildet, und zwar aus solchen Teilen, die völlig zu K_n gehören.

2.3. Wie sehen die Hyperflächen sub b) aus? Sie liegen symmetrisch um den Koordinatenursprung. Die erste bildet ein einparametrisches System von Hyperebenen der Dimension $n - 2$, die alle den Punkt $[1, 0, \ldots, 0]$ enthalten, d.h. ein gewisser Kegel. Es ist klar, dass dieser „Kegel" die Hülle des einparametrischen Systems der Hyperebenen $\sum_{i=0}^{n} x_i t^i = 1$, $t \in (0, 1)$ bildet. Ähnlich für die zweite Hyperfläche.

2.4. Die abgeschlossene und beschränkte konvexe Menge in E_n ist mit der konvexen Hülle der Menge ihrer Gipfelpunkte identisch; um den Körper K_n und seine konvexe Hyperfläche zu bestimmen, genügt es also die Gipfelpunkte des Körpers K_n bestimmen.

2.5. Wir sehen, dass die Polynome 1 und -1 einen gewissen singulären Charakter haben, wir werden sie also triviale, alle übrigen dann als nichttriviale Polynome bezeichnen (siehe auch den Satz 5.1.)

3. K_n FÜR $n = 0, 1, 2, 3$.

Für kleine Werte n kann man die konvexe Hyperfläche und die Gipfelpunkte des Körpers K_n bestimmen:

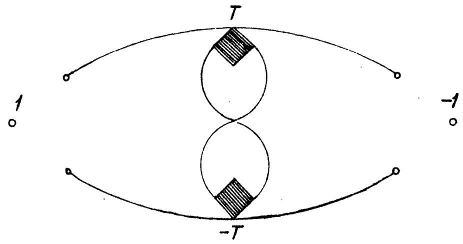
1. $n = 0$. Es handelt sich um Polynome höchstens 0-ten Grades: $P(t) = x_0$. K_0 ist also das Intervall $-1 \leqq x_0 \leqq 1$, seine Gipfelpunkte sind die Polynome 1 und -1.
2. $n = 1$. Es handelt sich um die Polynome $P(t) = x_0 + x_1 t$. K_1 ist das Rhomboid $-1 \leqq x_0 \leqq 1$, $-1 \leqq x_0 + x_1 \leqq 1$; seine Gipfelpunkte sind $1, 2t - 1$ und die symmetrischen Gipfelpunkte -1, $-2t + 1$.
3. $n = 2$. Nach kurzer Berechnung bekommt man für den Körper K_2 diese Gipfelpunkte: das triviale Polynom 1 und zwei Kurven von Gipfeln:

$$1 + x_1 t + \tfrac{1}{8} x_1^2 t^2\,, \quad x_1 \in \langle -8, -4 \rangle\,;$$

$$1 + x_1 + \tfrac{1}{8} x_1^2 - x_1(1 + \tfrac{1}{4} x_1)\, t + \tfrac{1}{8} x_1^2 t^2\,, \quad x_1 \in \langle -8, -4 \rangle$$

(und die Gipfel, die um den Ursprung symmetrisch liegen).

4. $n = 3$. Nach längerer Berechnung bekommt man, dass die Menge der Gipfelpunkte des Körpers K_3 aus den trivialen Gipfeln ± 1, vier Kurven und zwei zweidimensionalen Flächen besteht. Schematisch kann man sich die Menge der Gipfelpunkte etwa so vorstellen:



(Es liegt allerdings im vierdimensionalen Raum, die inneren Kurven haben keinen gemeinsamen Punkt.) T ist das Polynom, dass wir aus dem Tschebyscheffschen Polynom für das Intervall $\langle 0, 1\rangle$ nach Multiplizieren mit einer passenden Konstanten bekommen (die Konstante ist so gewählt, dass das Maximum des Absolutbetrages des Polynoms T im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ gleich eins ist); $-T$ ist das symmetrische Polynom.

4. CHARAKTERISIERUNG DER GIPFELPUNKTE VON K_n.

4.1. *Es sein $P, P_1, P_2 \in K_n$. Weiter sei $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, P = \alpha P_1 + \beta P_2$. Wenn für $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$, $P(t_0) = 1$, ist, dann ist auch $P_1(t_0) = P_2(t_0) = 1$. Wenn noch $P'(t_0) = \ldots = P^{(i)}(t_0) = 0$ $(i \geqq 1)$ ist, dann ist auch $P_1'(t_0) = \ldots = P_1^{(i)}(t_0) = $ $= P_2'(t_0) = \ldots = P_2^{(i)}(t_0) = 0$.*

Beweis: A) Es ist $P = \alpha P_1 + \beta P_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Dann ist $1 =$ $= P(t_0) = \alpha P_1(t_0) + \beta P_2(t_0) \leqq \alpha + \beta = 1$ es muss also überall das Gleichheitszeichen sein und notwendig gilt $P_1(t_0) = P_2(t_0) = 1$.

B) Es sei j die erste der Zahlen $1, 2, \ldots, i$ für welche

$$P_1^{(j)}(t_0) \neq 0 \quad \text{vel} \quad P_2^{(j)}(t_0) \neq 0\,. \tag{3}$$

a) Wenn $t_0 \in (0, 1)$ ist, müssen P_1 und P_2 für t_0 ein lokales Maximum erreichen und deswegen ist

$$P_1^{(j)}(t_0) \leqq 0 \quad \text{et} \quad P_2^{(j)}(t_0) \leqq 0\,, \tag{4}$$

(j muss dabei gerade sein).

b) Wenn $t_0 = 0$ ist, müssen P_1 und P_2 im Punkte 0 von rechts nicht zunehmend sein; deswegen gilt wieder (4).

c) Wenn $t_0 = 1$ ist, müssen P_1 und P_2 im Punkte 1 von links nichtabnehmend sein, also

$$P_1^{(j)}(t_0) \geqq 0 \quad \text{et} \quad P_2^{(j)}(t_0) \geqq 0\,. \tag{5}$$

Es ist dann $P^{(j)}(t_0) = \alpha\, P_1^{(j)}(t_0) + \beta\, P_2^{(j)}(t_0)$ und wegen (3) ist der Ausdruck rechts in den Fällen a) und b) (siehe (4)) negativ, im Falle c) (siehe (5)) positiv, also immer von Null verschieden, was einen Widerspruch bietet.

4.2. Dasselbe gilt selbstverständlich für $P(t_0) = -1$. Weiter kann man leicht durch Induktion die Behauptung auf konvexe Kombination beliebiger (endlicher) Mengen von Punkten aus K_n erweitern.

4.3. Satz. *Die trivialen Polynome* 1 *und* -1 *sind Gipfelpunkte des Körpers* K_n

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 4.1.

4.4. Satz. *Wenn ein nichttriviales Polynom* $P \in K_n$ *einen Gipfel des Körpers* K_n *bildet, dann gibt es im Intervall* $\langle 0, 1\rangle$ *Zahlen* t_1 *und* t_2 *so, dass* $P(t_1) = 1$ *und* $P(t_2) = -1$ *ist.*

Beweis. Ist P ein Gipfel, dann muss es nach 2.4. in $\langle 0, 1\rangle$ einen solchen Punkt t_1 geben, dass $|P(t_1)| = 1$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $P(t_1) = 1$ ist (wegen der Symmetrie des Körpers K_n würde man sonst zum Polynom $-P$ übergehen). Es sei $\min\limits_{t\in\langle 0,1\rangle} P(t) = m > -1$. Weil P nichttrivial ist, ist sicher $m < 1$. Setzen wir

$$Q(t) = \frac{2}{1-m}\left(P(t) - \frac{1+m}{2}\right),$$

dann ist

$$\frac{1+m}{2}\cdot 1 + \frac{1-m}{2}\cdot Q = P\,, \quad \frac{1+m}{2} > 0\,, \quad \frac{1-m}{2} > 0\,, \quad \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} = 1\,;$$

P liegt also innerhalb des Linienabschnittes mit Grenzpunktes 1 und Q. Um einen Widerspruch zu bekommen, muss man noch beweisen, dass $Q \in K_n$ ist. Das folgt aber gleich aus den Gleichungen

$$\max_{\langle t\in 0,1\rangle} Q(t) = \frac{2}{1-m}\left(1 - \frac{1+m}{2}\right) = 1\,, \quad \min_{t\in\langle 0,1\rangle} Q(t) = \frac{2}{1-m}\left(m - \frac{1+m}{2}\right) = -1\,.$$

4.5. Definition I. Als „bedeutsame" Bedingung im Punkte $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$ für das Polynom $P \in K_n$ werden wir jede von den folgenden Bedingungen bezeichnen:

a) $P(t_0) = 1$ oder

b) $P(t_0) = -1$ oder

c) $P^{(i)}(t_0) = 0$ wenn $|P(t_0)| = 1$, $P'(t_0) = \ldots = P^{(i-1)}(t_0) = 0$, $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$ ist.

II. Wir werden sagen, dass das Polynom P j bedeutsame Bedingungen ($j \geqq 1$) im Punkte $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$ erfüllt, wenn $|P(t_0)| = 1$, $P'(t_0) = \ldots = P^{(j-1)}(t_0) = 0$ ist. Wenn ausserdem $P^{(j)}(t_0) \neq 0$ ist, sagen wir, dass P genau j bedeutsame Bedingungen im Punkte t_0 erfüllt.

III. Sind $t_1, \ldots, t_k$ alle (verschiedenen) Punkte des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$, in denen $|P|$ gleich eins ist, und erfüllt P im Punkte t_i genau j_i bedeutsame Bedingungen, dann sagen wir, dass P genau $j_1 + \ldots + j_k$ bedeutsame Bedingungen erfüllt. Wir definieren: ein triviales Polynom erfüllt unendlich viele bedeutsame Bedingungen.

4.6. Satz. *Ein Polynom $P \in K_n$ bildet einen Gipfelpunkt des Körpers K_n dann und nur dann, wenn es mindestens $n + 1$ bedeutsame bedingungen erfüllt.*

Beweis. A) Das Polynom P soll mindestens $n + 1$ bedeutsame Bedingungen erfüllen; in gewissen Punkten t_i sind also die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen bis zu gewissen Ordnungen p_i gegeben. Man sieht leicht, dass durch diese Bedingungen (es sind mindestens $n + 1$ Bedingungen) das Polynom P eindeutig bestimmt ist. Wir setzen

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 \, , \ \alpha > 0 \, , \ \beta > 0 \, , \ \alpha + \beta = 1 \, , \ P_1 \in K_n \, , \ P_2 \in K_n \, .$$

Nach 4.1. und 4.2. wissen wir, dass P_1 und P_2 dieselben bedeutsamen Bedingungen erfüllen müssen, sodass $P_1 = P_2 = P$ ist. P ist also ein Gipfelpunkt.

Das Polynom P erfülle nur $m(m \leqq n)$ bedeutsame Bedingungen, und zwar in den Punkten t_i $(i = 1, 2, \ldots, j)$. Wir werden $n + 1 - m$ beliebige verschiedene Punkte $u_1, \ldots, u_{n-m}, u$ wählen; die auch von allen t_i verschieden sind. Das Polynom P ist dann durch die m bedeutsamen Bedingungen und durch die Werte in den Punkten $u_1, \ldots, u_{n-m}, u$ eindeutig bestimmt.

Wir definieren jetzt Polynome $\Phi(\varepsilon, t)$ (Polynome in t) folgendermassen:

a) $\Phi(\varepsilon, t_i) = P(t_i) \, , \quad (i = 1, 2, \ldots, j) \, ,$

b) $\dfrac{\partial^k \Phi(\varepsilon, t_i)}{\partial t^k} = P^{(k)}(t_i) = 0 \, , \quad (k = 1, 2, \ldots, p_i - 1; \ i = 1, 2, \ldots, j)$

(p_i ist die Anzahl der bedeutsamen Bedingungen des Polynoms P im Punkte t_i.)

c) $\Phi(\varepsilon, u_i) = P(u_i) \, , \quad (i = 1, 2, \ldots, n - m) \, ,$

d) $\Phi(\varepsilon, u) = P(u) + \varepsilon \, ,$

e) Als Funktion von t ist $\Phi(\varepsilon, t)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades.

Um den Beweis unseres Satzes zu beendigen benügt nun das folgende Lemma beweisen:

Lemma. *Das Polynom P liegt innerhalbs des Linienabschnittes mit den Grenzpunkten $\Phi(\varepsilon, t)$ und $\Phi(-\varepsilon, t)$, welche für kleine Werte $\varepsilon > 0$ in K_n liegen.*

Beweis. I. Wir werden das Polynom $Q(t) = (\Phi(\varepsilon, t) + \Phi(-\varepsilon, t))/2$ bilden. Dann gelten für Q die Gleichungen a), b), c) und es ist noch $Q(u) = (P(u) + \varepsilon + P(u) - \varepsilon)/2 = P(u)$. Diese Bedingung und die Bedingungen a), b), c) bestimmen ein Polynom höchstens n-ten Grades eindeutig und deswegen ist $Q = $ P.

II. Es bleibt noch zu beweisen, dass es eine solche Zahl $\eta > 0$ gibt, dass für alle $|\varepsilon| < \eta$ gilt: $\Phi(\varepsilon, t) \in K_n$. Es sei erwähnt, dass $\Phi(0, t) = P(t)$ ist. Die Idee ist klar: in der Umgebung des Punktes t_i liegt der Graph der Funktion $\Phi(\varepsilon, t)$ in der Nähe und unter der Geraden $y = 1$ (resp. $y = -1$), in dem übrigen Teile des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ ist dann $\max |\Phi(\varepsilon, t)| \leqq 1 - \zeta < 1$.

A) Die Koeffizienten des Polynoms (als Polynoms in t) sind stetige Funktionen der Werte des Polynoms und seiner Ableitungen in der Punkten $t_1, \ldots, t_j, u_1, \ldots$ $\ldots, u_{n-m}$.

B) Da das Polynom und seine Ableitungen stetige Funktionen der Veränderlichen t und der Koeffizienten des Polynoms sind, ist nach A) klar, dass $\Phi(\varepsilon, t)$, $\partial\Phi/\partial t$, $\partial^2\Phi/\partial t^2, \ldots$ stetige Funktionen von ε und t sind.

C) Es ist also auch $M(\varepsilon) = \max\limits_{t \in \langle 0,1\rangle} |\Phi(\varepsilon, t)|$ eine stetige Funktion von ε, $M(0) = 1$; es gibt deswegen ein $\eta_0 > 0$ so, dass $M(\varepsilon) < 2$ für $|\varepsilon| < \eta_0$ ist. Dann ist selbstverständlich $\Phi(\varepsilon, t)/2 \in K_n$ d.h. $\Phi(\varepsilon, t) \in 2K_n$. Weil K beschränkt ist, ist auch $2K_n$ beschränkt, und auch alle Ableitungen der Polynome aus $2K_n$ sind gleichmässig beschränkt für alle $t \in \langle 0, 1\rangle$. Es gibt also ein $A > 0$ so, dass für alle $|\varepsilon| < \eta_0$ die Funktion $\Phi(\varepsilon, t)$ und alle ihre Ableitungen nach t im Absolutbetrag kleiner oder gleich A sind.

D) Im Punkte t_i $(i = 1, 2, \ldots, j)$ ist $P^{(p_i)}(t_i) = a_i \neq 0$. Nach B) gibt es also ein $\eta_i > 0$ so, dass

$$\left|\frac{\partial^{p_i} \Phi(\varepsilon, t_i)}{\partial t^{p_i}}\right| \geqq \frac{|a_i|}{2}$$

für $|\varepsilon| < \eta_i$ ist.

E) Es sei $|\varepsilon| < \bar{\eta} = \min(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_j)$. Die Funktion $\Phi(\varepsilon, t)$ entwickeln wir in die Taylorsche Reihe nach den Potenzen $t - t_i$:

$$\Phi(\varepsilon, t) = P(t_i) + \frac{1}{p_i!} \frac{\partial^{p_i}\Phi(\varepsilon, t_i)}{\partial t^{p_i}} (t - t_i)^{p_i} + \frac{1}{(p_i + 1)!} \frac{\partial^{p_i+1}\Phi(\varepsilon, t_{i0})}{\partial t^{p_i+1}} (t - t_i)^{p_i+1},$$

wo t_{i0} zwischen t_i und t liegt. Weil $t_i \in \langle 0, 1\rangle$ und weil uns t auch nur im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ interessiert, ist $t_{i0} \in \langle 0, 1\rangle$ und deswegen gilt nach C)

$$\left|\frac{\partial^{p_i+1}\Phi(\varepsilon, t_{i0})}{\partial t^{p_i+1}}\right| \leqq A .$$

Wir müssen jetzt einige Fälle unterscheiden:

α) $t_i \in (0, 1)$, $P(t_i) = 1$. Dann hat das Polynom P im Punkte t_i ein lokales Maximum, d.h. p_i ist gerade und $P^{(p_i)}(t_i) = a_i < 0$. Der Ausdruck

$$\frac{1}{p_i!} \frac{\partial^{p_i}\Phi(\varepsilon, t_i)}{\partial t^{p_i}} (t - t_i)^{p_i} + \frac{1}{(p_i + 1)!} \frac{\partial^{p_i+1}\Phi(\varepsilon, t_{i0})}{\partial t^{p_i+1}} (t - t_i)^{p_i+1}$$

ist sicher negativ - mindestens in gewisser Umgebung des Punktes t_i — wenn

$$\frac{a_i}{2} + \frac{1}{p_i + 1} A|t - t_i| < 0$$

ist, was für $|t - t_i| < \delta_i = -(p_i + 1)\, a_i/2A$ gilt. Für $|t - t_i| < \delta_i$ ist also $\Phi(\varepsilon, t) \leqq 1$.

β) $t_i \in (0.\ 1)$, $P(t_i) = -1$. Ganz analogisch findet man wieder ein $\delta_i > 0$ so, dass $\Phi(\varepsilon, t) \geqq -1$ für $|t - t_i| < \delta_i$ ist.

γ) $t_i = 0$, $P(0) = 1$. Dann muss das Polynom P im Punkte 0 von rechts nichzunehmend sein und die Zahl $P^{(p_i)}(0)$, die nicht gleich Null ist, muss also kleiner als Null sein. Weiter setzt gleich man in gleicher Weise wie sub α) fort, nur muss man sich diesmal nur auf rechte Umgebung des Punktes 0 begrenzen.

δ) Ähnlich würde man auch die übrigen Fällen $t_i = 0$, $P(0) = -1$, $t_i = 1$, $P(1) = 1$, $t_i = 1$, $P(1) = -1$ untersuchen.

F) Es sei jetzt $\gamma_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ so gewählt, dass $P(t) \neq 0$ für $|t - t_i| < \gamma_i$ ist. Weil dann

$$\min_{t \in \langle 0,1 \rangle\ |t - t_i| < \gamma_i} |\Phi(\varepsilon, t)| = m_i(\varepsilon)$$

stetige Funktionen von ε sind, $m_i(0) > 0$, gibt es Zahlen $\eta'_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ so, dass $\Phi(\varepsilon, t) \neq 0$ für $|\varepsilon| < \eta'_i$, $|t - t_i| < \gamma_i$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ist. Bezeichnen wir

$$\beta_i = \min(\gamma_i, \delta_i)\,, \quad \mathfrak{A}_i = E(t \in \langle 0, 1 \rangle;\ |t - t_i| < \beta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, j)\,,$$

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^{j} \mathfrak{A}_i\,, \quad \eta' = \min(\bar{\eta}, \eta'_1, \ldots, \eta'_j)\,,$$

dann gilt für $|\varepsilon| < \eta'$:

$$|\Phi(\varepsilon, t)| < 1 \quad \text{für} \quad t \in \mathfrak{A}\,. \tag{6}$$

Bezeichnen wir noch $\mathfrak{B} = \langle 0, 1 \rangle - \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{B}$ eine kompakte Menge und es gilt

$$\max_{t \in B} |P(t)| = 1 - \zeta < 1$$

Weil jetzt

$$\max_{t \in B} |\Phi(\varepsilon, t)| = M_0(\varepsilon)$$

eine stetige Funktion von ε ist, $M_0(0) < 1$, gibt es ein $\tilde{\eta} > 0$ so, dass

$$\max_{t \in B} |\Phi(\varepsilon, t)| < 1 \tag{7}$$

für $|\varepsilon| < \tilde{\eta}$ ist. Setzen wir zuletzt $\eta = \min(\eta', \tilde{\eta})$ dann ist nach (6) und (7) für $|\varepsilon| < \eta$

$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |\Phi(\varepsilon, t)| \leqq 1$$

also $\Phi(\varepsilon, t) \in K_n$, was zu beweisen war.

4.7. Ganz analogisch kann man einen allgemeineren Satz beweisen:

Satz. *Ein Polynom $P \in K_n$ liegt innerhalb eines k-dimensionalen $(k = 1, 2, \ldots, \ldots, n + 1)$ Simplexes $S \subset K_n$ dann und nur dann, wenn es genau $n + 1 - k$ bedeutsame Bedingungen erfüllt.*

Beweis. Es sei P ein Polynom, das genau $n + 1 - k$ bedeutsame Bedingungen erfüllt; diese Bedingungen soll es in den Punkten $t_1, \ldots, t_j$ erfüllen. Wir wählen noch weitere k verschiedene Punkte $u_1, \ldots, u_k$, die auch von allen t_i verschieden sind, und definieren jetzt Polynome $\Phi_i(\varepsilon, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ (Polynome in t höchstens n-ten Grades) folgendermassen: Φ_i erfüllt dieselben bedeutsamen Bedingungen wie P und in allen Punkten $u_1, \ldots, u_k$ hat Φ_i denselben Wert wie P mit Ausnahme des Punktes u_i, wo $\Phi_i(\varepsilon, u_i) = P(u_i) + \varepsilon$ ist. $\Phi_i(\varepsilon, t)$ sind dann eindeutig bestimmt für alle $i = 1, 2, \ldots, k$.

Nach dem Lemma 4.6. wissen wir, dass P innerhalb des Linienabschnittes mit den Grenzpunkten $\Phi_i(\varepsilon, t)$, $\Phi_i(-\varepsilon, t)$ liegt und dass diese Grenzpunkte für kleine $\varepsilon > 0$ in K_n liegen. Die Richtungen dieser Linienabschnitte sind linear unabhängig, denn aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\Phi_i(\varepsilon, t) - \Phi_i(-\varepsilon, t)) = 0 \quad \text{für} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

würde speziell folgen, dass

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i(\Phi_i(\varepsilon, u_m) - \Phi_i(-\varepsilon, u_m)) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, k)$$

ist, d.h. $2\alpha_m \varepsilon = 0$, und deswegen $\alpha_m = 0$ für $m = 1, 2, \ldots, k$. P liegt also innerhalb der k-dimensionalen konvexen Hülle dieser Linienanschnitte.

Es bleibt noch zu beweisen, dass P innerhalb keines $k + 1$ dimensionalen Simplexes $S \subset K_n$ liegt. (Wir können uns allerdings auf $1 \leqq k \leqq n$ beschränken, für $k = n + 1$ ist es selbstverständlich.) In diesem Falle wäre nähmlich

$$P = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i P_i\,, \quad \alpha_i > 0\,, \quad \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i = 1$$

mit linear unabhängigen P_i. Nach 4.2. muss P_i dieselben bedeutsamen Bedingungen wie P erfüllen; wir werden $u_1, \ldots, u_k$ voneinander und von allen t_i verschieden wählen und nehmen eine beliebige Kombination

$$\sum_{i=0}^{k+1} \beta_i P_i\,, \quad \sum_{i=0}^{k+1} \beta_i = 0\,.$$

Dieses Polynom erfüllt dann $n + 1 - k$ „Nullbedingungen". Wir werden jetzt $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ noch so wählen, dass ausser der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{k+1} \beta_i = 0 \tag{8}$$

noch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{k+1} \beta_i P_i(u_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, k) \tag{9}$$

gelten. Das System der Gleichungen (8), (9) ist ein System von $k + 1$ homogenen linearen Gleichungen für $k + 2$ Unbekannten, es hat also sicher Lösung $\beta_0, \beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{k+1}$ für die mindestens ein $\beta_i \neq 0$ ist. Dann erfüllt aber das Polynom $\sum_{i=0}^{k+1} \beta_i P_i$, $n + 1$ Nullbedingungen, es ist also identisch gleich Null, was einen Widerspruch mit der linearen Unabhängigkeit der Polynome $P_1, \ldots, P_{k+1}$ liefert.

5. DIE EIGENSCHAFTEN DER MENGE DER GIPFELPUNKTE DES KÖRPERS K_n

5.1 Satz. *Triviale Gipfelpunkte sind isolierte Gipfelpunkte des Körpers K_n.*

Beweis. $\min P(t)$ für $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ist eine stetige Funktion der Koeffizienten des Polynoms P, $\min 1 = 1$; es gibt also eine solche Umgebung des trivialen Gipfels 1, dass für alle Polynome P aus dieser Umgebung die Ungleichung $\min P(t) > -1$ gilt. Nach 4.4. kann also keiner dieser Polynome einen Gipfel bilden (mit Ausnahme des Polynoms 1). Für die Gipfel -1 folgt dann die Behauptung sogleich aus der Symmetrie des Körpers K_n.

5.2. Satz. *Die trivialen Gipfelpunkte sind für $n \neq 1$ die einzigen isolierten Gipfelpunkte des Körpers K_n.*

Beweis. Nach 5.1. genügt es zu zeigen, dass kein nichttrivialer Gipfel isoliert ist. Es gilt dass man jeden Punkt P des konvexen Körpers in E_n als konvexe Kombination $n + 1$ Gipfelpunkte P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ schreiben kann:

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\,, \quad \lambda_i \geqq 0\,, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda = 1\,.$$

Es sei P ein Gipfel $P \neq 1$, $P \neq -1$. Wir setzen $\Phi(a) = R$, wo $R(t) = P(at)$, $a > 0$. Φ ist offensichtlich eine stetige Abbildung der Menge $(0, +\infty)$ in die Menge aller Polynome; dabei ist $\Phi(1) = P$, $\Phi(a) \in K_n$ für alle $a \in (0, 1\rangle$. Es sei $1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ eine monotonfallende Folge positiver Zahlen $\alpha_m \to 0$; wir bezeichnen $\Phi_m = \Phi(1 - \alpha_m)$. Nach dem, was gerade gesagt wurde, gilt $\Phi_m \to P$ und $\Phi_m \in K_n$ für jedes $m = 1, 2, \ldots$ Es ist also

$$\Phi_m = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,m} P_{i,m}\,, \quad \text{wo} \quad \lambda_{i,m} \geqq 0\,, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,m} = 1\,, \tag{10}$$

$P_{i,m}$ sind Gipfelpunkte $(i = 0, 1, \ldots, n,\ m = 1, 2, \ldots)$. Wir können sogar voraussetzen, dass

$$\Phi_m = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,m} P_{i,m}\,, \quad \text{wo} \quad \lambda_{i,m} > 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k)\,, \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,m} = 1\,, \tag{11}$$

wo k dieselbe Zahl für alle m ist. (Man geht zu einer ausgewählten Folge über, denn für k gibt es in (10) nur endlich viele Möglichkeiten.)

Alle $\lambda_{i,m}$ liegen in $\langle 0, 1\rangle$, also in einem kompakten Intervall, alle $P_{i,m}$ in der kompakten Menge K_n, man kann also voraussetzen, dass

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_{i,m} = \lambda_i\,, \quad \lim_{m\to+\infty} P_{i,m} = P_i \quad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

existieren (sonst würde man zu einer Teilfolge übergehen). In der Gleichung (11) werden wir jetzt zu dem Grenzwert für $m \to +\infty$ übergehen und bekommen

$$P = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i\,, \quad \lambda_i \geqq 0\,, \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\,.$$

Weil P selbst ein Gipfel ist, gibt es notwendig ein j so, dass $P = P_j$ (und $\lambda_j \neq 0$) Dann ist also

$$P = \lim_{m\to+\infty} P_{j,m}\,.$$

Wenn wir noch beweisen, dass für unendlich viele Werte von m $P_{j,m} \neq P$ ist, ist der Beweis fertig.

Da P ein nichttrivialer Gipfelpunkt ist, gibt es nur endlich viele Punkte t_i so, dass $|P(t_i)| = 1$ ist. Es können also nur folgende drei Möglichkeiten vorkommen:

A) Es gibt ein $t \in (0, 1)$ so, dass $P(t) = 1$ ist. Wir bezeichnen t_0 den kleinsten von diesen Werten t. Wenn man sich auf $a \in \langle t_0, 1\rangle$ beschränkt, ist das Polynom $\Phi(a)$ gleich 1 im Punkte t_0/a und dieser Punkt t_0/a ist der kleinste positive Punkt mit dieser Eigenschaft. Nach 4.2 hat $P_{i,m}$ den Wert 1 im Punkte $t_0/(1-\alpha_m)$. Wir werden m_1 so wählen, dass

$$s_1 = t_0/(1 - \alpha_{m1}) \leqq 1\,, \quad P(s_1) \neq 1$$

ist, dann ist $P_{j,m_1} \neq P$. Leicht kann man eine solche Folge $m_1, m_2, \ldots$ finden, dass

$$m_i > m_{i-1}\,, \quad s_i = t/(1 - \alpha_{m_i}) \leqq 1\,, \quad P(s_i) \neq 1$$

ist, also $P_{j,m_i} \neq P$ für alle $i = 1, 2, \ldots$

B) Den Fall, dass es ein solches $t \in (0, 1)$ gibt, dass $P(t) = -1$ ist, kann man durch den Übergang zum Polynom $-P$ auf den Fall A zurückführen.

C) Es bleibt noch der Fall übrig, dass $|P(t)| < 1$ für alle $t \in (0, 1)$ ist. Dann muss nach 4.4. entweder $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ oder $P(0) = -1$, $P(1) = 1$ sein. Die zweite Möglichkeit kann man auf die erste wieder mittels des Überganges zum Polynom $-P$ überführen, es genügt also sich nur mit der ersten Möglichkeit zu beschäftigen.

Weil P ein Gipfel ist, muss P nach dem Satz 4.6. $n + 1$ bedeutsame Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} &(12) \qquad & P(0) &= 1\,, & P'(0) &= \ldots = P^{(i-1)}(0) = 0\,, \\ & & P(1) &= -1\,, & P'(1) &= \ldots = P^{(n-i)}(1) = 0\,. \end{aligned}$$

a) Wenn $i - 1 \geqq 2$ ist, bezeichnen wir $\Psi(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ das Polynom Q höchstens n-ten Grades, das folgenderweise definiert ist:

$$\begin{aligned} &Q(0) = 1\,, \quad Q'(0) = \ldots = Q^{(i-3)}(0) = 0\,, \quad Q(\varepsilon) = 1\,, \quad Q'(\varepsilon) = 0\,, \\ &Q(1) = -1\,, \quad Q'(1) = \ldots = Q^{(n-i)}(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Das sind zusammen $1 + i - 3 + 2 + 1 + n - i = n + 1$ bedeutsame Bedingungen Q ist also eindeutig bestimmt und es gilt: wenn Q zu K_n gehört, dann ist Q ein Gipfel. Nach dem Mittelwertsatz liegt noch eine Nullstelle ε_1 der Ableitung Q' zwischen 0 und ε. Q ist aber ein Polynom höchstens n-ten Grades und deswegen sind ε und ε_1 einfache Nullstellen der Ableitung Q' und Q' kann keine anderen (d.h. ausser $0, 1, \varepsilon, \varepsilon_1$) Nullstellen haben. Q ist also abnehmend in $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ und deswegen zunehmend in $\langle \varepsilon_1, \varepsilon \rangle$ und abnehmend in $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$. Daraus folgt vorerst, dass für $\varepsilon' \neq \varepsilon''$ auch $\Psi(\varepsilon') \neq \Psi(\varepsilon'')$ ist. Weiter folgt daraus, dass

$$|Q(t)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad t \in \langle \varepsilon, 1 \rangle \tag{13}$$

ist. Die Koeffizienten der Polynome $\Psi(\varepsilon)$ sind stetige Funktionen von ε, deswegen gibt es eine Konstante A so, dass die Koeffizienten für $\varepsilon \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ im absoluten Betrag kleiner als A sind. Alle Ableitungen der Polynome $\Psi(\varepsilon)$ sind also für $\varepsilon \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ und $t \in \langle 0, 1 \rangle$ (im absoluten Betrag) durch eine Konstante beschränkt:

Das Polynom Q erreicht im Intervall $\langle 0, \varepsilon \rangle$ den Wert 1 i-mal (inklusive Multiplizität). Es gibt also im Intervall $\langle 0, \varepsilon \rangle$ Punkte δ und η so, dass $Q^{(i-2)}(\delta) = 0$ und $Q^{(i-1)}(\eta) = 0$ ist (mehrfacheres Ausnützen des Mittelwertsatzes). Dann ist aber

$$|Q^{(i-2)}(0)| \leqq B\delta \leqq B\varepsilon\,, \quad |Q^{(i-1)}(0)| \leqq B\eta \leqq B\varepsilon\,.$$

Insgesamt erfüllt also das Polynom $\Psi(\varepsilon) = Q$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} &Q(0) = 1\,, \quad Q'(0) = \ldots = Q^{(i-3)}(0) = 0\,, \quad Q^{(i-2)}(0) = \lambda\,, \\ &Q^{(i-1)}(0) = \mu\,, \quad Q(1) = -1\,, \quad Q'(1) = \ldots = Q^{(n-i)}(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

wo $|\lambda| \leqq B\varepsilon$, $|\mu| < B\varepsilon$ ist. Weil die Polynome $\Psi(\varepsilon)$ für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}))$ in einer kompakten Menge liegen, kann man aus der Folge $\Psi(1/n)$ eine konvergente Teilfolge $\{\Psi_m\}_1^\infty$ auswählen. Für $m \to +\infty$ ist $\varepsilon \to 0+$ und die Bedingungen (14) gehen in die Bedingungen (12) über. Es ist also $\Psi_m \to P$.

Weil es sich um Polynome handelt, ist die Konvergenz $\Psi_m \to P$ gleichmässig auf jedem Intervall $\langle 0, a \rangle$. Wählt man a so, dass $P(t) > 0$ im Intervall $\langle 0, a \rangle$ ist, dann ist $\Psi_m(t) > -1$ für $t \in \langle 0, a \rangle$ für alle gemügend grossen Werte m. Beschränkt man sich noch auf die m, für die $1/m < a$ ist, dann folgt aus (13) und aus der im ganzen Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ selbstverständlich erfüllten Ungleichung $\Psi(t) \leqq 1$, dass $\Psi_m \in K_n$ für alle genügend grossen Werte m ist, womit der Beweis beendet ist.

b) Den Fall $n - i \geqq 2$ überführt man leicht auf den Fall a) mit Hilfe der Substitution $s = 1 - t$.

c) $i \leqq 2$ et $n - i \leqq 1$. Dann muss notwendig $n \leqq i + 1 \leqq 3$, sein d.h. $n = 0, 2, 3$ (der Wert $n = 1$ wurde ausgeschlossen). Diese Fälle wurden im § 3 berechnet und der Satz gilt offensichtlich auch.

5.3. Für $n = 1$ gilt der Satz nicht, weil wir 4 isolierte Gipfeln haben (siehe § 3).

5.4. Wir werden jetzt eine gewisse Klassifikation der Gipfelpunkte machen:

Definition. Jede bedeutsame Bedingung des Polynoms ausser den Bedingungen $|P(t)| = 1,\ t \in (0, 1)$ werden wir eine Hauptbedingung nennen. Die Anzahl der Hauptbedingungen wird Rang des Polynoms P genannt. (Diese Begriffe werden für triviale Polynome nicht eingeführt.)

5.5. Es sei T_n das Polynom von Tschebyscheff wir bezeichnen

$$C_n(t) = T_n(2t - 1)/T_n(1)\ ;$$

der Verlauf des Polynoms C_n im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ entspricht genau dem Verlauf des Polynoms T_n im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$. Es ist klar, dass $C_n \in K_n$ ist. Unter dem Ausdruck „Polynom von Tschebyscheff" werden wir weiter immer das Polynom C_n verstehen.

5.6. Wir werden jetzt die Anzahl der bedeutsamen Bedingungen untersuchen. Triviale Polynome erfüllen unendlich viele bedeutsame Bedingungen. Für nichttriviale Polynome gilt dann: Die Ableitung eines Polynoms aus K_n ist ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$, durch seine Nullstellen kann man also höchstens $n - 1$ Bedingungen bekommen. Ein Polynom n-ten Grades kann höchstens $n - 1$ lokale Extremalstellen haben, was mit den Bedingungen in den Grenzpunkten $n + 1$ Bedingungen geben kann. Man sieht also, dass die höchstmögliche Anzahl der bedeutsamen Bedingungen $2n$ ist. Wenn das Polynom P einen Gipfelpunkt bilden soll, ist, wie wir schon gesehen haben (siehe 4.6.) die niedrigstmögliche Anzahl der bedeutsamen Bedingungen gleich $n + 1$.

5.7. Aus diesen Aussagen folgt gleich auch, dass die höchstmögliche Anzahl der Hauptbedingungen gleich $n + 1$ ist. Welche ist die niedrigstmögliche Anzahl der Hauptbedingungen im Falle, wenn P einen Gipfel bildet? In jedem Punkte, in dem P eine bedeutsame Bedingung erfüllt, erfüllt P mindestens eine Bedingung die eine Hauptbedingung ist, und höchstens eine, die nicht eine Hauptbedingung ist. Weil ein Gipfelpunkt mindestens $n + 1$ bedeutsame Bedingungen erfüllt, ist mindestens eine Hälfte, d.h. $[n/2] + 1$ Hauptbedingungen. Ist also P ein Gipfel des Körpers K_n, dann gilt

$$[n/2] + 1 \leqq \operatorname{Rang} P \leqq n + 1\,.$$

5.8. Diese Abschätzungen können für $n \geqq 2$ nicht verbessert werden, denn:

A) Das Polynom von Tschebyscheff erfüllt mindestens $2n$ bedeutsame Bedingungen und hat den Rang $n + 1$.

B) a) $n \geqq 2$ gerade. Wir wollen für $a > 0$ als $\Phi(a)$ das Polynom Q bezeichnen das durch die Gleichung $Q(t) = C_n(at)$ definiert ist. Dann ist $\Phi(1) = C_n$, $\Phi(a) \in K_n$ für $a \in (0, 1\rangle$. C_n' hat in $(0, 1)$ $n - 1$ Nullstellen $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1}$. Wir werden a_0 so wählen, dass

$$\alpha_{n/2} < a_0 < \alpha_{n/2+1}$$

ist (für $n = 2$ setzen wir $\alpha_2 = 1$). Dann ist das Polynom $\Phi(a_0)$ ein Gipfelpunkt des Ranges $[n/2] + 1$, weil es offensichtlich die Bedingungen

$$Q(0) = 1\,, \quad Q(\alpha_i/a_0) = (-1)^i\,, \quad Q'(\alpha_i/a_0) = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n/2)\,,$$

d.i. ingesamt $n + 1$ bedeutsame Bedingungen und davon $n/2 + 1$ Hauptbedingungen erfüllt.

b) $n \geqq 3$, ungerade. Wir wollen wieder vom Polynom C_n ausgehen, wählen aber zu erst ein feste Zehl ε, $0 < \varepsilon < \alpha_1$ und bilden vor allem ein Polynom R, $R(t) = C_n(\varepsilon + (1 - \varepsilon)\, t)$. Nun machen wir dieselbe Dilatation nach rechts wie sub a), diesmal aber die Dilatataion des Polynoms R, sodass im Intervall $(0, 1)$ diesmal $(n + 1)/2$ Nullstellen der Ableitung R' bleiben. Man sieht leicht, dass man so einen Gipfelpunkt Ranges $(n + 1)/2$ bekommt.

Für $n = 0$ sind die trivialen Polynome die einzigen Gipfelpunkte und deswegen kann man nicht sprechen vom Range. Für $n = 1$ hat man neben den trivialen Gipfeln noch zwei nichttriviale, beide aber haben den Rang 2 (siehe § 3) und deswegen ist in diesem einzigen Falle unsere Abschätzung nicht genau.

5.9. Auf dieselbe Weise, wie die Existenz der Gipfelpunkte des Ranges $[n/2] + 1$ bewiesen wurde (für $n \geqq 2$), kann man offensichtlich für $n \geqq 2$ zu jedem m, $[n/2] + 1 \leqq m \leqq n + 1$ einen Gipfel des Ranges m konstruieren.

5.10. Definition. Es sei P ein nichttriviales Polynom, $P \in \mathrm{K}_n$. Es seien $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ die Punkte von $\langle 0, 1\rangle$ in denen $|P(t)| = 1$ ist; weiter sei $P(\alpha_i) = \delta_i$ und P erfülle im Punkte α_i gerade j_i bedeutsame Bedingungen. Wir werden sagen, dass P vom Typus $\{\delta_1, j_i; \delta_2, j_2; \ldots; \delta_k, j_k\}$ bzw. $\{\delta_1, j_1; \ldots; \delta_k, j_k \mid 0\}$ bzw. $\{\delta_1, j_1; \ldots; \delta_k, j_k \mid 1\}$ bzw. $\{\delta_1, j_1; \ldots; \delta_k, j_k \mid 0, 1\}$ ist, je nach dem, ob $\alpha_1 > 0$, $\alpha_k < 1$ oder $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k < 1$ oder $\alpha_1 > 0$, $\alpha_k = 1$ oder $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k = 1$ ist. (Speziell: Wenn $|P(t)| < 1$ für $t \in \langle 0, 1\rangle$ ist, dann ist P vom Typus $\emptyset$).

5.11. Satz A. *Eine konvergente Folge der Gipfelpunkte des Ranges k hat als Grenzwert wieder einen Gipfelpunkt und zwar des Ranges $\geqq k$.*

Satz B. *Es seien P_m Gipfelpunkten des Ranges k, die alle von dem selben Typus* *sind, und es gelte $P_m \to P$. Dann ist P ein Gipfel des Ranges $\geqq k$. Wenn P ein Gipfelpunkt des Ranges k ist, dann gilt:*

a) *P ist von dem selben Typus wie alle P_m.*

b) *Sind $\alpha_{1,m} < \alpha_{2,m} < \ldots < \alpha_{h,m}$ die Punkte aus $\langle 0, 1\rangle$, in denen $|P_m(t)| = 1$ ist, und haben $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_h$ die gleiche Bedeutung für P, dann ist $\alpha_{i,m} \to \alpha_i$ für $i = 1, 2, \ldots, h$.*

Beweis des Satzes A. Weil es nur endlich viele Typen gibt, folgt der Satz A aus dem Satze B durch Übergang zu einer Teilfolge.

Beweis des Satzes B. Alle P_m sind von demselben Typ $\{\delta_1, j_1; \ldots; \delta_k, j_k \mid *\}$, wo auf der Stelle * entweder 0 oder 1 oder das Paar 0, 1 oder nichts steht (für alle m dasselbe). Es seien $\alpha_{1,m} < \alpha_{2,m} < \ldots < \alpha_{h,m}$ die Punkte $t \in \langle 0, 1\rangle$, für die $|P(t)| = 1$ ist. Die Polynome P_m sind aber gleichmässig stetig in $\langle 0, 1\rangle$ (ihre Ableitungen sind durch eine gleiche Konstante beschränkt), es gibt also ein $\Delta > 0$ so, dass

$$(\delta_i = -\delta_{i+1}) \Rightarrow (\alpha_{i+1,m} - \alpha_{i,m} \geqq \Delta \text{ für alle } m)\,. \tag{15}$$

Wir wollen irgend eine folge $P_{p_m}(p_1 < p_2 < \ldots)$ auswählen, für welche die Grenzwerte

$$\lim_{m\to+\infty} \alpha_{i,p_m} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

existieren. Einfachheitshalber bezeichnen wir $P_{p_m} = Q_m$, $\alpha_{i,p_m} = \beta_{i,m}$. Wir schreiben

$$Q_m(t) - 1 = \prod_l (t - \varrho_{l,m})^{u_l}\, U_m(t)\,, \quad Q_m(t) + 1 = \prod_p (t - \sigma_{p,m})^{v_p}\, V_m(t)\,. \tag{16}$$

wo $\varrho_{l,m}$ die der Grösse nach geordneten Punkte $\beta_{i,m}$ sind, für welche $\delta_i = 1$ ist; u_l ist der entsprechende Wert j_i. Ähnliche Bedeutung hat $\sigma_{p,m}$ und v_p. Nach 4.4. gibt es mindestens ein $\varrho_{l,m}$ und ein $\sigma_{p,m}$.

Die Zahlen $\varrho_{l,m}$; $\sigma_{p,m}$ geben zusammen alle Zahlen $\beta_{i,m}$; es existieren weiter die Grenzwerte

$$\lim_{m\to+\infty} \varrho_{l,m} = \varrho_l\,, \quad \lim_{m\to+\infty} \sigma_{p,m} = \sigma_p$$

(das sind gerade die Zahlen β_i). Einige ϱ_l können gleich sein, nach (15) ist aber jedes ϱ_l von jedem σ_p verschieden. U_m und V_m sind Polynome, deren Grad Kleiner als n ist. Wählen wir Zahlen $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ die von allen ϱ_l und σ_p verschieden sind, dann existiert

$$\lim_{m\to+\infty} U_m(t_i) = \frac{P(t_i) - 1}{\prod_l (t_i - \varrho_l)^{u_l}} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{17}$$

Es existiert offensichtlich ein solches Polynom U (dessen Grad Kleiner als n ist) dass sein Wert im Punkte t_i genau die Zahl (17) ist. Dann ist

$$\lim_{m \to +\infty} (U_m(t_i) - U(t_i)) = 0$$

und deswegen konvergieren die Koeffizienten der Polynome $U_m - U$ gegen Null. Es gilt also: $U_m \to U$.

Ganz ähnlich findet man, dass $V_m \to V$, wo V ein Polynom vom Grad $s < n$ ist. Es ist also (mann nimmt in (16) den Grenzwert für $m \to +\infty$):

$$P(t) - 1 = \prod_l (t - \varrho_l)^{u_l} U(t), \quad P(t) + 1 = \prod_p (t - \sigma_p)^{v_p} V(t).$$

Man sieht leicht, dass das Polynom P die Werte 1 und -1 annimmt. Offensichtlich ist $P \in K_n$.

Es sei $q < r$, $\varrho_{q+1} = \varrho_{q+2} = \ldots = \varrho_r$, aber $\varrho_q < \varrho_r$ (soweit ϱ_q existiert), $\varrho_r < \varrho_{r+1}$ (soweit ϱ_{r+1} existiert). Wir werden zwei Fälle unterscheiden:

1. $\varrho_{q+1,m} > 0$, $\varrho_{r,m} < 1$ (für irgendein m und deswegen für jedes m). Dann erfüllt P im Punkte ϱ_r mindestens $S = u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_r$ bedeutsame Bedingungen, von welchen mindestens $S - 1$ Hauptbedingungen sind. Das Polynom ϱ_m erfüllt in den Punkten $\varrho_{q+1,m}, \varrho_{q+2,m}, \ldots, \varrho_{r,m}$ insgesamt genau S bedeutsame Bedingungen, von denen genau $S - (r - q) \leqq S - 1$ Hauptbedingungen sind; für $q + 1 < r$ gilt hier das Zeichen $<$.

2. $\varrho_{q+1,m} = 0$ oder $\varrho_{r,m} = 1$. Das Ergebnis ist wieder dasselbe wie früher, nur ist die Anzahl der Hauptbedingungen bei P mindestens S und bei Q_m gerade $S - (r - q) + 1 \leqq S$, für $q + 1 < r$ gilt hier wieder das Zeichen $<$.

Ganz ähnliche Abschätzungen gelten für σ_p.

Daraus ist klar, dass P ein Gipfelpunkt ist, und zwar des Ranges $\geqq k$. Wir werden nun voraussetzen, dass P den Rang k hat. Aus dem Vorgehenden ist klar, dass alle ϱ_l und alle σ_p von einander verschieden sein müssen und das $U(t) \neq 0$ und $V(t) \neq 0$ für alle $t \in \langle 0, 1 \rangle$ sein muss; die Zahlen ϱ_l und σ_p sind dann genau alle Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_h$ $(0 \leqq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k \leqq 1)$. Das Polynom P ist also von dem selben Typus wie die Polynome Q_m.

Wir werden jetzt voraussetzen, dass einer der Grenzwerte

$$\lim_{m \to +\infty} \alpha_{i,m} \quad (i = 1, 2, \ldots, h) \tag{18}$$

nicht existiert. Dann muss es neben unserer Teilfolge $\{Q_m\}$ mit $\beta_{i,m} \to \beta_i$ noch eine andere Teilfolge $\{\bar{Q}_m\}$ geben, für die die entsprechenden $\bar{\beta}_{i,m}$ gegen $\bar{\beta}_i$ $(0 \leqq \bar{\beta}_1 < \bar{\beta}_2 < \ldots < \bar{\beta}_h \leqq 1)$ konvergieren, wobei mindestens ein $\bar{\beta}_q$ von allen Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_h$ verschieden ist. (Wenn es nämlich kein solches $\bar{\beta}_q$ gäbe, dann: Weil mindestens einer der Grenzwerte (18) nicht existiert, kann man voraussetzen, dass für ein gewisses r $\bar{\beta}_r \neq \beta_r$ ist. Dann wäre aber $\bar{\beta}_r = \beta_j$, wo $j \neq r$ ist. Wäre z.B. $j < r$, dann müssten zwischen den Zahlen $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_r$ mindestens zwei gleiche sein, denn diese r Zahlen müssten mit den j Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ zusammenfallen und deswagen wäre nach 1) und 2) P von höherem Range als k. Ähnlich für $j > r$.)

Dann würde aber aus den Formeln

$$P(t) - 1 = \prod_l (t - \bar{\varrho}_l)^{\mu_l} \bar{U}(t), \quad P(t) + 1 = \prod_p (t - \bar{\sigma}_p)^{\nu_p} \bar{V}(t)$$

folgen, dass P noch eine bedeutsame Bedingung und also auch eine Hauptbedingung im Punkte $\bar{\beta}_q$ erfüllt, der Rang von P würde also höher als k sein, was einen Widerspruch gibt.

5.12. Satz. *Bezeichnen wir V_n die Menge alle Gipfelpunkte des Körpers K_n, dann ist V_n eine kompakte Menge.*

Beweis. A) $V_n \subset K_n$ und deswegen ist V_n beschränkt.

B) V_n ist abgeschlossen. Wenn nämlich P eine konvergente Folge von Gipfelpunkten ist, $P_m \to P$, kann man voraussetzen, dass alle P_m nichttriviale Gipfelpunkte sind; wären nämlich unendlich viele P_m triviale Polynome, wäre P auch ein triviales Polynom, also ein Gipfel, und wir wären fertig. Für den Rang der Gipfel gibt es endlich viele Möglichkeiten, man kann also voraussetzen, dass alle P_m denselben Rang haben (sonst würde man zu einer Teilfolge übergehen). Jetzt aber genügt es schon den Satz 5.11. A zu benützen.

5.13. Aus den Sätzen 5.11. A und 5.11. B folgt eine Reihe von Behauptungen über die Gipfelpunkte. Wir bezeichnen U_n^m die Menge aller Gipfelpunkte deren Rang mindestens m ist. Weiten bezeichnen wir mit V_n^m die Menge aller Gipfelpunkte, deren Rang genau gleich m ist, und mit $V_n^{m,T}$ die Menge aller Gipfelpunkte des Ranges m, die vom Typus T sind. Dann gilt nach 5.11. offensichtlich:

U_n^m ist eine kompakte Menge.

Die Menge V_n^m ist offen in U_n^m.

$V_n^{m,T}$ und $V_n^{m,T'}$ (mit demselben m) sind abgetrennte Mengen, wenn T und T' zwei verschiedene Typen sind.

Aus dem ersten von diesen Sätzen folgt also speziell, dass die Menge aller Gipfelpunkte des Körpers K_n kompakt ist. (Es ist bekannt, dass für $n \geqq 3$ die Menge der Gipfelpunkte eines konvexen Körper nicht kompekt sein muss.)

Literatur

[1] *Bonnesen - Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin, Springer-Verlag, 1934.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

TĚLESO POLYNOMŮ STEJNĚ OMEZENÝCH V INTERVALU $\langle 0, 1 \rangle$

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

Každý polynom

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \tag{1}$$

ztotožníme s bodem $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in E_{n+1}$. Označme K_n množinu všech polynomů (1), pro něž platí:

$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |P(t)| \leqq 1 . \tag{2}$$

Pak K_n je symetrické konvexní těleso.

Je studována množina všech vrcholů tělesa K_n. Pro $n = 0, 1, 2, 3$ je možno vrcholy vypočítat. Polynomy $+1$ a -1 jsou vždy (tj. pro každé n) vrcholy a to vrcholy isolovanými. Pro $n \neq 1$ platí též obráceně, že jedinými isolovanými vrcholy jsou právě polynomy $+1$ a -1.

Podmínku $|P(t_0)| = 1$ a, je-li $|P(t_0)| = 1$, $P'(t_0) = \ldots P^{(i-1)}(t_0) = 0$, pak též podmínku $P^{(i)}(t_0) = 0$ nazveme významnou ($t_0 \in \langle 0, 1 \rangle$). Pak platí věta, že polynom $P \in K_n$ je vrcholem tehdy a jen tehdy, jestliže splňuje alespoň $n + 1$ významných podmínek. Tato věta připouští toto zobecnění: Polynom $P \in K_n$ leží uvnitř k-rozměrného simplexu $S \subset K_n$ $(k = 1, 2, \ldots, n + 1)$ tehdy a jen tehdy, splňuje-li právě $n + 1 - k$ významných podmínek.

Hlavní podmínkou nazveme každou významnou podmínku kromě podmínek tvaru $|P(t_0)| = 1$, $t_0 \in (0, 1)$. Počet hlavních podmínek nazveme řádem polynomu P (pro $P \neq \pm 1$). Je-li P vrcholem tělesa K_n, pak platí $[n/2] + 1 \leqq$ řád $P \leqq n + 1$. Je dokázáno, že konvergentní posloupnost vrcholů řádu k konverguje opět k vrcholu řádu $\geqq k$. Odtud plyne, že množina všech vrcholů řádu $\geqq k$ je kompaktní, tedy speciálně: množina všech vrcholů tělesa K_n je kompaktní.

Резюме

ФИГУРÁ МНОГОЧЛЕНОВ, РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПРОМЕЖУТКЕ $\langle 0,1\rangle$

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův) Прага

Каждый многочлен

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \tag{1}$$

отождествим с точкой $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in E_{n+1}$. Через K_n обозначим множество всех тех многочленов (1), для которых справедливо

$$\max_{t \in \langle 0,1\rangle} |P(t)| \leqq 1\,. \tag{2}$$

Тогда K_n есть симетричная выпуклая фигура.

Далее изучается множество всех вершин фигуры K_n. Для $n = 0, 1, 2{,}3$ можно ее элементы конкретно вычислить. Многочлены $+1$ и -1 являются всегда (для всех n) вершинами а именно изолированными. Для $n \neq 1$ справедливо и обратное утверждение, что единственными изолироваными вершинами являются многочлены $+1$ и -1.

Условие $|P(t_0)| = 1$ и, если $|P(t_0)| = 1$, $P'(t_0) = \ldots = P^{(i-1)}(t_0) = 0$, то также условие $P^{(i)}(t_0) = 0$, назовем „важным" ($t_0 \in \langle 0, 1\rangle$). Справедлива теорема, что многочлен $P \in K_n$ является вершиной тогда и только тогда, если удовлетворяет по крайней мере $n + 1$ важным условиям. Эту теорему можно еще обобщить: Многочлен $P \in K_n$ лежит внутри k-мерного симплекса $S \subset K_n$ ($k = 1, 2, \ldots, n + 1$) тогда и только тогда, если удовлетворяет именно $n + 1 - k$ важным условиям.

Каждое важное условие, кроме условий типа $|P(t_0)| = 1$, $t_0 \in (0,1)$ назовем „главным". Число главных условий будем называть рангом многочлена P (для $P \neq \pm 1$). Если P – вершина фигуры K_n, то справедливо $[n/2] + 1 \leqq$ $\leqq$ ранг $P \leqq n + 1$. Доказано, что сходящаяся последовательность вершин ранга k сходится к вершине ранга $\geqq k$. Отсюда вытекает, что множество всех вершин ранга $\geqq k$ является компактным; в частном случае: множество всех вершин фигуры K_n является компактным.