Časopis pro pěstování matematiky

Jozef Moravčík

O zobecnení Floquetovej teórie pre lineárne diferenciálne rovnice obyčajné n-tého rádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 8--17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117552`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O ZOBECNENÍ FLOQUETOVEJ TEÓRIE PRE LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE OBYČAJNÉ n-TÉHO RÁDU

JOZEF MORAVČÍK, Žilina

(Došlo dňa 16. júla 1964)

Klasická Floquetova teória (viď [4] a [9]) sa používa na určenie charakteru riešení diferenciálnej rovnice (v ďalšom: d. rovnice)

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0$$

s periodickými koeficientami: $p_i(x + \omega) = p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; kde $\omega > 0$ je reálna konštanta. V práci [5] zobecnil M. LAITOCH túto teóriu pre d. rovnicu druhého rádu $y'' = Q(x)\, y$ s použitím výsledkov práce [2]. Zobecnenie Floquetovej teórie je tam v podstate založené na teórii transformácií riešení lineárnych d. rovníc 2. rádu, rozpracovanej O. BORŮVKOM v práci [3]. Vďaka tomu, že V. ŠEDA v práci [11] zobecnil teóriu transformácií pre lineárne d. rovnice n-tého rádu, možno zobecniť tiež Floquetovu teóriu pre lineárne d. rovnice n-tého rádu s neperiodickými koeficientami, o čom pojednáva táto práca.

Uvažujme o lineárnej d. rovnici n-tého ($n \geqq 3$) rádu

$$y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)\, y^{(n-k)} = 0\,, \tag{1}$$

$y^{(s)} = d^s y/dx^s$, $s = 1, 2, \ldots, n$; $y^{(0)} = y$; kde $p_k(x)$, $k = 2, 3, \ldots, n$; je funkcia spojitá so svojimi $n - k$ deriváciami v intervale I_1. Ako je dobre známe, možno na tento tvar previesť vhodnou zámenou závisle premennej za istých predpokladov o koeficientoch každú lineárnu d. rovnicu n-tého rádu.

V ďalšom budeme predpokladať, že d. rovnica (1) je na intervale $I \subset I_1$ sama so sebou ekvivalentná (Pojem ekvivalencie d. rovníc budeme chápať tak, ako je zavedený v práci [11].), pričom nositeľom tejto ekvivalencie je dvojica funkcií $\xi(x)$, $t(x)$, takých, že platí:

$\xi(x) \neq x$ má spojitú deriváciu $(n + 1)$-ho rádu a $\xi'(x) \neq 0$ na intervale I;

$\xi(x)$ na intervale I vyhovuje nelineárnemu systému d. rovníc

$$\{\xi, x\} + \frac{3}{n+1} p_2(\xi)\, \xi'^2 = \frac{3}{n+1} p_2(x)\,, \tag{2}$$

$$\vartheta_k(\xi)\, \xi'^k = \vartheta_k(x)\,, \quad k = 3, 4, \ldots, n\,;$$

kde

$$\{\xi, x\} = \frac{1}{2}\frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{4}\frac{\xi''^2}{\xi'^2}\,, \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,;$$

je schwarzovská derivácia funkcie $\xi(x)$ a $\vartheta_k(x)$, $k = 3, 4, \ldots, n$; sú fundamentálne invarianty d. rovnice (1) (viď [10]); pričom platí: $\xi(I) = I$;

$$t(x) = c|\xi'(x)|^{(1-n)/2}\,, \quad \text{kde} \quad c \neq 0 \quad \text{je konštanta}\,.$$

V práci [3] dokázal O. Borůvka existenciu riešenia prvej rovnice systému (2) určeného cauchyovskými začiatočnými podmienkami i to, že jeho definičný obor siaha vždy v istom zmysle až po hranicu intervalu I_1. Dá sa dokázať, že existuje aspoň jedno riešenie tejto d. rovnice, ktoré v nejakom podintervale I intervalu I_1 vyhovuje ostatným d. rovniciam systému (2).

Celkom prirodzene vzniká otázka, či existujú lineárne d. rovnice n-tého rádu, ktoré sú vo vyššie uvedenom zmysle so sebou ekvivalentné na nejakom intervale I. Z práce [12] je zrejmé, že také sú všetky lineárne d. rovnice n-tého rádu, ktorých fundamentálne invarianty sú všetky rovné nule. Existujú však aj také lineárne d. rovnice ekvivalentné so sebou na nejakom intervale, ktorých fundamentálne invarianty na tomto intervale sú nenulové. Ako príklad može slúžiť lineárna d. rovnica tretieho rádu

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \vartheta_3(x)]\, y = 0\,,$$

kde funkcie $A'(x)$, $\vartheta_3(x)$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$, funkcia $A(x)$ je párna a funkcia $\vartheta_3(x)$ nepárna. Táto d. rovnica je na intervale $(-\infty, \infty)$ sama so sebou ekvivalentná s nositeľom ekvivalencie $\xi(x) = -x$, $t(x) = c$, kde $c \neq 0$ je konštanta.

1. Z výsledkov práce [11] vyplýva, že ak funkcia $v(x)$ je na intervale I riešením d. rovnice (1), potom na tomto intervale je riešením d. rovnice (1) aj funkcia $y(x)$ definovaná vzťahom

$$y(x) = \frac{v[\xi(x)]}{\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}}\,, \tag{3}$$

kde $\xi(x)$ je nejaké riešenie d. systému (2), pre ktoré platí: $\xi(I) = I$.

Množina všetkých riešení d. rovnice (1) tvorí lineárny priestor $\mathfrak{L}$ nad telesom reálnych čísel. Vzťahom (3) je definované lineárne zobrazenie priestoru $\mathfrak{L}$ na seba.

Označme ho symbolom $\mathbf{A}$ a obraz riešenia $y(x)$ d. rovnice (1) pri tomto zobrazení označme $y(x)\,\mathbf{A}$. Teda

$$y(x)\,\mathbf{A} = \frac{y[\xi(x)]}{\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}},$$

kde $\xi(x)$ je nejaké riešenie d. systému (2), definované na intervale I.

Nech $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; je báza lineárneho priestoru $\mathfrak{L}$, tj. fundamentálna sústava riešení d. rovnice (1). Podobným spôsobom ako v [5] sa ľahko dokáže, že $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; je taktiež báza priestoru $\mathfrak{L}$. Keďže

$$y_i(x)\,\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k(x)\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{4}$$

kde a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ sú reálne konštanty, je matica

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

lineárneho zobrazenia $\mathbf{A}$ priestoru $\mathfrak{L}$ na seba regulárna.

Budeme hľadať riešenie $y(x)$ d. rovnice (1) také, pre ktoré by platilo

$$y(x)\,\mathbf{A} = s\,y(x)\,, \quad x \in I\,; \tag{6}$$

kde s je reálna konštanta. Inak povedané: Budeme hľadať reálne konštanty c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; tak, aby platilo

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\,, \tag{7}$$

$$y(x)\,\mathbf{A} = s \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\,. \tag{8}$$

Keďže $y(x)\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\,\mathbf{A}$, dostaneme zo vzťahu (7) vzhľadom na (4) pre určenie čísel c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; túto sústavu rovníc

$$a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + (a_{kk} - s)\,c_k + \ldots + a_{nk}c_n = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{9}$$

ktorá má netriviálne riešenie vtedy a len vtedy, keď platí:

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s, a_{21}, & \ldots, a_{n1} \\ a_{12}, \quad a_{22} - s, & \ldots, a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n}, \quad a_{2n}, & \ldots, a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Rovnicu (10) nazveme charakteristickou rovnicou zobrazenia **A**. Môžeme ju písať zrejme tiež v tvare

$$|\mathscr{A} - s\mathscr{E}| = 0\,,$$

kde $\mathscr{E}$ je jednotková matica a znak $|\mathscr{A} - s\mathscr{E}|$ znamená determinant matice

$$\mathscr{D}(s) = \mathscr{A} - s\mathscr{E}\,, \tag{11}$$

ktorú voláme charakteristickou maticou zobrazenia **A**.

Z teórie lineárnych zobrazení (viď [7]) vieme, že korene charakteristickej rovnice (10) ani elementárne delitele charakteristickej matice (11) nezávisia na voľbe bázy lineárneho priestoru $\mathfrak{L}$. Keďže $D(0) = |\mathscr{A}| \neq 0$, sú všetky korene charakteristickej rovnice (10) rôzne od nuly a ku každému koreňu tejto rovnice a každému riešeniu c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; sústavy (9) lineárnych rovníc existuje riešenie $y(x)$, definované vzťahom (7), ktoré má vlastnosť vyjadrenú vzťahom (6), tj. je vlastným vektorom zobrazeniea **A** priestoru $\mathfrak{L}$ na seba.

Dá sa dokázať tvrdenie (viď [9]): Exponenty elementárnych deliteľov charakteristickej matice (11) sú rovné jednej vtedy a len vtedy, ak pre každý koreň s_i násobnosti v_i charakteristickej rovnice (10) je hodnosť matice $\mathscr{A} - s_i\mathscr{E}$ rovná $n - v_i$.

Podobným spôsobom ako v [9], str. 275–276 sa dokáže:

Veta 1. *Ak sú exponenty všetkých elementárnych deliteľov charakteristickej matice* (11) *rovné jednej, potom každému koreňu s_i násobnosti v_i charakteristickej rovnice* (10) *prislúcha v_i lineárne nezávislých riešení*

$$y_{1i}(x),\ y_{2i}(x), \ldots,\ y_{v_i i}(x) \tag{12}$$

d. rovnice (1) *takých, že*

$$y_{\lambda i}(x)\,\mathbf{A} = s_i\, y_{\lambda i}(x)\,, \tag{13}$$

($\lambda = 1, 2, \ldots, v_i$; $i = 1, 2, \ldots, m$), *pričom množina všetkých riešení prislúchajúcich rôznym koreňom charakteristickej rovnice* (10) *tvorí fundamentálnu sústavu riešení d. rovnice* (1).

Podobne ako v [5], str. 168–169 sa ľahko dokáže:

Lemma. *Nech $\xi(x)$ je riešenie d. systému* (2) *v intervale I. Nech $F(x)$ je funkcia, ktorá má v intervale I spojitú deriváciu $(n+1)$-ho rádu a vyhovuje funkcionálnej rovnici*

$$F[\xi(x)] - F(x) = 1\,, \tag{14}$$

pričom $F'(x) \neq 0$ pre všetky $x \in I$.

Potom funkcia

$$\Phi(x) = \frac{e^{rF(x)}}{\sqrt{(|F'(x)|^{n-1}}}, \tag{15}$$

kde $r = \operatorname{Log} s$; *s je komplexná konštanta a znak* Log *znamená hlavnú hodnotu logaritmu, má vlastnosť*:

$$\Phi(x)\,\mathbf{A} = s\,\Phi(x). \tag{16}$$

Funkciu $\Phi(x)$ definovanú vzťahom (15) budeme volať Floquetovou funkciou patriacou k d. rovnici (1).

Pokiaľ ide o existenciu riešení funkcionálnej rovnice (14), dokázal N. H. ABEL (viď [1]), že táto rovnica má nekonečne mnoho riešení.

Keďže tvrdenie vety 1 zostane zrejme v platnosti i v tom prípade, keď budeme uvažovať aj o komplexných koreňoch charakteristickej rovnice (10), platí:

Veta 2. *Ak pre každý koreň* s_i *násobnosti* v_i *charakteristickej rovnice* (10) *je hodnosť matice* $\mathscr{A} - s_i\mathscr{E}$ *rovná* $n - v_i$, *existuje fundamentálna sústava riešení d. rovnice* (1) *tvaru*

$$\Phi_i(x)\,\omega_{1i}(x),\ \Phi_i(x)\,\omega_{2i}(x),\ldots,\ \Phi_i(x)\,\omega_{v_i i}(x)\,;$$

$$i = 1, 2, \ldots, m;\quad \sum_{i=1}^{m} v_i = n\,;$$

kde

$$\Phi_i(x) = \frac{e^{r_i F(x)}}{\sqrt{(|F'(x)|^{n-1}}},\quad r_i = \operatorname{Log} s_i\,;\quad i = 1, 2, \ldots, m\,;$$

a funkcie $\omega_{\lambda i}(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, v_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$ *majú na intervale I spojitú deriváciu n-tého rádu a spĺňajú identitu*

$$\omega_{\lambda i}[\xi(x)] = \omega_{\lambda i}(x). \tag{17}$$

D ô k a z. Podľa vety 1 prislúcha za daného predpokladu koreňu s_i násobnosti v_i charakteristickej rovnice (10) práve v_i lineárne nezávislých riešení (12) d. rovnice (1) takých, že každé z nich spĺňuje vzťah (13), pričom množina všetkých riešení prislúchajúcich rôznym koreňom charakteristickej rovnice (10) tvorí fundamentálnu sústavu riešení.

Ak položíme $\omega_{\lambda i}(x) = y_{\lambda i}(x) : \Phi_i(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, v_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$, bude mať takto definovaná funkcia zrejme spojitú deriváciu n-tého rádu na intervale I a s použitím lemmy sa ľahko dokáže, že spĺňuje tiež identitu (17).

2. Zostáva nám ešte vyšetriť prípad, keď aspoň jeden z elementárnych deliteľov charakteristickej matice (11) má exponent väčší než jedna. Vo svojich ďalších úvahách budeme množinu $\mathfrak{L}$ všetkých riešení d. rovnice (1) chápať ako lineárny priestor nad telesom komplexných čísel. Z teórie polynomiálnych matíc (viď [7]) je známe, že každá štvorcová matica n-tého rádu je nad algebraicky uzavretým telesom (teda aj nad telesom komplexných čísel) podobná s maticou, ktorá má Jordanov normálny tvar.

Nech teda exponenty elementárnych deliteľov charakteristickej matice (11) nie sú všetky rovné jednej. Koreňu s_0 násobnosti v_0 charakteristickej rovnice (10) nech prislúchajú elementárne delitele

$$(s - s_0)^{e_1}, (s - s_0)^{e_2}, \dots, (s - s_0)^{e_q}\,; \quad (e_1 + e_2 + \dots + e_q = v_0)\,.$$

Zvoľme si takú bázu $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ lineárneho priestoru $\mathfrak{L}$, pri ktorej bude matica (5) v Jordanovom normálnom tvare. Elementárnemu deliteľu $(s - s_0)^{e_k}$ $(k = 1, 2, \dots, q)$ bude v tejto matici odpovedať Jordanov blok tvaru

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & s_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

rádu e_k.

Z uvedeného na základe teórie lineárnych transformácií (viď [7]) vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 3. *Ak s_0 je koreňom charakteristickej rovnice (10) s násobnosťou v_0 a ak tomuto koreňu prislúchajú elementárne delitele $(s - s_0)^{e_1}, (s - s_0)^{e_2}, \dots, (s - s_0)^{e_q}$ charakteristickej matice (11), pričom pre exponenty, z ktorých je aspoň jeden väčší než jedna, platí: $e_1 + e_2 + \dots + e_q = v_0$, potom koreňu s_0 prislúcha v_0 lineárne nezávislých riešení d. rovnice (1), ktoré možno rozdeliť na q podskupín. Pre riešenia $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{e_k k}$, ktoré patria do podskupiny prislúchajúcej elementárnemu deliteľu $(s - s_0)^k$ $(k = 1, 2, \dots, q)$ platí:*

$$\begin{aligned} y_{1k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0\, y_{1k}(x)\,, \\ y_{2k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0\, y_{2k}(x) + y_{1k}(x)\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{e_k k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0\, y_{e_k k}(x) + y_{e_k - 1, k}(x)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Ľahko sa dokáže, že s maticou (18) je podobná matica

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_0 & s_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 & s_0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Preto možno tvrdenie vety 3 formulovať tiež takto:

Veta 3a. *Ak s_0 je koreň charakteristickej rovnice* (10) *s násobnosťou ν_0 a s vlastnosťami ako vo vete 3, prislúcha mu ν_0 lineárne nezávislých riešení d. rovnice* (1), *pričom pre riešenia k-tej podskupiny* ($k = 1, 2, \ldots, q$) *platí:*

$$
\begin{aligned}
y_{1k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0\, y_{1k}(x)\,, \\
y_{2k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0[y_{2k}(x) + y_{1k}(x)]\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{e_k k}(x)\,\mathbf{A} &= s_0[y_{e_k-1,k}(x) + y_{e_k k}(x)]\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Veta 4. *Riešenia d. rovnice* (1) *patriace do podskupiny prislúchajúcej elementárnemu deliteľu* $(s - s_0)^{e_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, q$) *charakteristickej matice* (11) *možno vyjadriť v tvare:*

$$
\begin{aligned}
y_{1k}(x) &= \Phi_0(x)\,\omega_1(x)\,, \\
y_{2k}(x) &= \Phi_0(x)\,[\omega_2(x) + F(x)\,\omega_1(x)]\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{ik}(x) &= \Phi_0(x)\left\{\omega_i(x) + F(x)\,{}_i\omega_{-1}(x) + \frac{F(x)\,[F(x)-1]}{2}\,\omega_{i-2}(x) + \ldots +\right. \\
&\left.+ \frac{F(x)\,[F(x)-1]\ldots[F(x)-i+2]}{(i-1)!}\,\omega_1(x)\right\}, \quad i = 3, 4, \ldots, e_k\,;
\end{aligned}
$$

kde $\Phi_0(x)$ je príslušná Floquetova funkcia a funkcie $\omega_\lambda(x)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, e_k$; majú na intervale I spojitú deriváciu n-tého rádu a spĺňajú identitu $\omega_\lambda[\xi(x)] = \omega_\lambda(x)$.

Dôkaz. Ak položíme vo vzťahoch (21) pre riešenia d. rovnice (1) patriace do k-tej podskupiny ($k = 1, 2, \ldots, q$)

$$y_{ik}(x) = \Phi_0(x)\, z_i(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, e_k\,;$$

dostaneme pre určenie funkcií $z_i(x)$ túto sústavu funkcionálnych rovníc:

$$
\begin{aligned}
z_1[\xi(x)] &= z_1(x)\,, \\
z_2[\xi(x)] &= z_2(x) + z_1(x)\,, \\
z_3[\xi(x)] &= z_3(x) + z_2(x)\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_{e_k}[\xi(x)] &= z_{e_k}(x) + z_{e_k-1}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že partikulárnym riešením sústavy (22) sú funkcie:

$$
\begin{aligned}
&z_1(x) = 1,\; z_2(x) = F(x),\; z_3(x) = F(x)\,[F(x)-1]\,, \ldots\,, \\
&z_{e_k}(x) = F(x)\,[F(x)-1]\ldots[F(x)-e_k+2] : (e_k-1)!\,.
\end{aligned}
$$

Všeobecné riešenie dostaneme preto v tvare:

$$
\begin{aligned}
z_1(x) &= \omega_1(x)\,,\\
z_2(x) &= \omega_2(x) + F(x)\,\omega_1(x)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_i(x) &= \omega_i(x) + F(x)\,\omega_{i-1}(x) + \frac{F(x)\,[F(x)-1]}{2}\,\omega_{i-2}(x) + \dots +\\
&+ \frac{F(x)\,[F(x)-1)\dots[F(x)-i+2]}{(i-1)!}\,\omega_1(x)\,; \quad i = 3, 4, \dots, e_k\,;
\end{aligned}
$$

kde $\omega_1(x)$ je ľubovoľná n-krát spojite diferencovateľná funkcia na intervale I, pre ktorú platí: $\omega_1[\xi(x)] = \omega_1(x)$. O funkciách $\omega_\lambda(x)$ ($\lambda = 2, 3, \dots, e_k$) sa ľahko ukáže, že majú tiež uvedené vlastnosti.

Tvrdenia formulované vo vetách 1, 2, 3a a 4 sú zobecnením výsledkov odvodených v práci [6] pre samoadjungovanú lineárnu d. rovnicu tretieho rádu a v práci [8] pre lineárnu d. rovnicu štvrtého rádu s nulovými fundamentálnymi invariantami.

Klasická Floquetova teória (viď [9]) vyplýva z viet 1–4 na základe toho, že lineárna d. rovnica n-tého rádu, ktorej koeficienty sú spojitými periodickými funkciami s periódou ω, je sama so sebou ekvivalentná na celej číselnej osi s nositeľom ekvivalencie $\xi(x) = x + \omega$, $t(x) = c$, kde $c \neq 0$ je reálna konštanta.

Poznámka: Ak uvažujeme o lineárnej d. rovnici

$$
y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \vartheta_3(x)]\,y = 0\,, \tag{23}
$$

kde funkcie $A'(x)$, $\vartheta_3(x)$ sú spojité v intervale $I = (0, \infty)$ a pre všetky $x \in I$ platí:

$$
A(kx) = \frac{A(x)}{k^2}\,, \quad \vartheta_3(kx) = \frac{\vartheta_3(x)}{k^3}\,,
$$

kde $0 < k \neq 1$ je reálna konštanta; má systém (2) d. rovníc tvar

$$
\{\xi, x\} + \tfrac{1}{2}A(\xi)\,\xi'^2 = \tfrac{1}{2}A(x)\,, \quad \vartheta_3(\xi)\,\xi'^3 = \vartheta_3(x)\,;
$$

a za uvedených predpokladov má na intervale I riešenie $\xi(x) = kx$. Funkcionálnej rovnici

$$
F(kx) - F(x) = 1
$$

vyhovuje funkcia

$$
F(x) = \frac{\log x}{\log k}\,,
$$

ktorá má v intervale I deriváciu

$$
F'(x) = \frac{1}{x \log k} \neq 0\,.
$$

Príslušná Floquetova funkcia $\Phi(x) = \pm K x^{1+r/K}$, kde $r = \operatorname{Log} s$, $K = \log k$ a znamienko $+$ platí pri $k > 1$, znamienko $-$ pri $0 < k < 1$. D. rovnica (23) má preto za uvedených predpokladov taký fundamentálny systém riešení, ktorý možno vyjadriť v niektorom z týchto tvarov:

a) $y_i(x) = K x^{1+r_i/K} \omega_i(x)$, kde $\omega_i(kx) = \omega_i(x)$, $i = 1, 2, 3$;

b) $y_1(x) = K x^{1+r_1/K} \omega_1(x)$, $y_2(x) = K x^{1+r_2/K} \omega_2(x)$,

$$y_3(x) = K x^{1+r_2/K} \left[\omega_3(x) + \frac{1}{K} (\log x)\, \omega_2(x) \right]; \ \omega_i(kx) = \omega_i(x), \ i = 1, 2, 3;$$

c) $y_1(x) = K x^{1+r_1/K} \omega_1(x)$, $y_2(x) = K x^{1+r_1/K} \left[\omega_2(x) + \frac{1}{K} (\log x)\, \omega_1(x) \right]$,

$$y_3(x) = K x^{1+r_1/K} \left[\omega_3(x) + \frac{1}{K} (\log x)\, \omega_2(x) + \frac{1}{2K^2} (\log x) \left(\log \frac{x}{k} \right) \omega_1(x) \right],$$

kde $\omega_i(kx) = \omega_i(x)$, $i = 1, 2, 3$; pričom funkcie ω_i, $i = 1, 2, 3$; majú vo všetkých uvedených prípadoch spojitú deriváciu tretieho rádu v intervale I.

Literatúra

[1] Oevres complètes de N. H. Abel, T. 2, Christiania 1881, str. 36—37.

[2] *O. Borůvka:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений второго порядка, Czechoslovak Math. Journal *3* (78) (1953), str. 199—251.

[3] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du seconde ordre, Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. IV., T. *XLI*, 1956, str. 325—342.

[4] *É. Goursat:* Cours d'analyse mathématique, T. 2, Paris 1925, str. 492 a nasl.

[5] *M. Laitoch:* Расширение метода Флоке для определения вида фундаментальной системы решений дифференциального уравнения второго порядка $y'' = Q(x)\, y$, Czechoslovak Math. Journal, *T. 5 (80)* 1955, str. 164—174.

[6] *M. Laitoch:* О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений, Czechoslovak Math. Journal, *10* (*85*) 1960, str. 258—270.

[7] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры, Москва 1956, str. 72 a nasl., str. 120 a nasl.

[8] *J. Moravčík:* O fundamentálnom systéme normálnych riešení iterovanej diferenciálnej rovnice štvrtého rádu, Acta F.R.N. Univ. Comen. VII-12, Mathematica 1963, str. 675—680.

[9] *G. Sansone:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 1, Москва 1953, str. 266 a nasl.

[10] *L. Schlesinger:* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, II-1, Leipzig, 1897.

[11] *V. Šeda:* Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung I, Čas. pro pěst. mat. 90 (1965), 385—412.

[12] *V. Šeda:* O lineárnych diferenciálnych rovniciach s nulovými invariantami, Čas. pro pěst. mat. (v tlači).

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET VŠD, Žilina, Marxa-Engelsa 25.

Резюме

О РАСШИРЕНИИ МЕТОДА ФЛОКЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ТОГО ПОРЯДКА

ЙОСЕФ МОРАВЧИК (Jozef Moravčík), Жилина

В статье обобщена теория Флоке для линейных дифференциальных уравнений вида (1) с непериодическими коэффициентами. Предпологается только, что $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $k = 2, 3, \ldots, n$; и дифференциальное уравнение (1) эквивалентно само с собой в смысле эквивалентности введенной в статье [11] на каком-то интервале $I \subset I_1$.

Zusammenfassung

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER FLOQUETSTHEORIE FÜR GEWÖHNLICHE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER n-TEN ORDNUNG

Jozef Moravčík, Žilina

In der Arbeit ist die Floquetstheorie für lineare Differentialgleichungen der Form (1) mit nichtperiodischen Koeffizienten erweitert. Man voraussetzt nur, dass der Koeffizient $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $k = 2, 3, \ldots, n$; und die Differentialgleichung (1) auf einem Intervall $I \subset I_1$, im Sinne der in der Arbeit [11] eingeführten Äquivalenz, selbst an sich äquivalent ist.