Bedřich Pondělíček

O charakterech pologrup, jejichž idempotenty tvoří řetězec

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 4--7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117551

O CHARAKTERECH POLOGRUP, JEJICHŽ IDEMPOTENTY TVOŘÍ ŘETĚZEC

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 6. dubna 1964, přepracované dne 25. února 1965)

Charakterem pologrupy G budeme v celém článku rozumět homomorfní zobrazení φ pologrupy G do pologrupy všech komplexních čísel takové, že pokud pologrupa G obsahuje jednotkový prvek j, potom $\varphi(j) \neq 0$. Pologrupou $G^\wedge$ budeme rozumět pologrupu všech charakterů na G, přičemž součinem $\varphi_1\varphi_2$ charakterů $\varphi_1, \varphi_2 \in G^\wedge$ rozumíme takový charakter $\varphi \in G^\wedge$, že $\varphi(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$ pro všechna $x \in G$. Snadno se dokáže, že pologrupa $G^\wedge$ je *Abelovou inversní pologrupou s jednotkovým prvkem.*

Abelova inversní pologrupa je disjunktním sjednocením maximálních podgrup. Každému idempotentu $e \in G$ odpovídá právě jedna maximální podgrupa $G_e \subset G$ taková, že $e \in G_e$, a naopak. Jestliže $x \in G_e$ a $y \in G_f$, potom $xy \in G_{ef}$. Množinu $\mathbf{E}(G)$ všech idempotentů pologrupy G lze částečně uspořádat následujícím způsobem

$$e \leqq f \Leftrightarrow ef = e\,; \quad e, f \in \mathbf{E}(G)\,.$$

Na závěr článku [1] je položen následující problém: *Kdy jsou pologrupy G a $G^{\wedge\wedge}$ isomorfní?* Na základě předcházejících úvah stačí při řešení tohoto problému omezit se jen na Abelovy inversní pologrupy s jednotkovým prvkem. Připomeňme zde větu z práce [2] (Theorem 3,17):

Věta 1. *Každá konečná inversní Abelova pologrupa G s jednotkovým prvkem je isomorfní s $G^{\wedge\wedge}$.*

Naším cílem bude dokázat obrácené tvrzení pro případ, že množina všech idempotentů pologrupy G tvoří řetězec.

Věta 2. *Je-li G inversní Abelova pologrupa, jejíž idempotenty tvoří řetězec, potom je isomorfní s $G^{\wedge\wedge}$ tehdy a jen tehdy, je-li konečná.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme několik lemmat. Je zřejmé, že pokud G je Abelova grupa, je též $G^\wedge$ Abelova grupa. Hodností r(G) Abelovy grupy G budeme rozumět mohutnost kanonické D-soustavy této grupy. Viz [3].

Lemma 1. *Je-li nekonečná Abelova grupa G periodická s konečnou hodností, potom $G^\wedge$ není periodická grupa a* card $G = \aleph_0$.

Důkaz. Je-li G Prüferova grupa typu p^∞ (tj. aditivní grupa racionálních čísel, jejichž jmenovatel je mocninou prvočísla p, modulo 1), potom položme $\varphi(x) = e^{2\pi xi}$ pro každé $x \in G$. Charakter φ z $G^\wedge$ má nekonečný řád, protože pro každé přirozené číslo n platí $n < p^n$, a tedy $\varphi^n(x_n) \neq 1$ pro $x_n = p^{-n}$ z G.

Je-li G periodická grupa s konečnou hodností, potom podle věty 11 [3] je direktním součinem konečného počtu periodických grup hodnosti 1, tj. primárních cyklických grup a Prüferových grup typu p^∞. Grupa G je nekonečná, tedy card $G = \aleph_0$ a aspoň jeden direktní faktor je Prüferova grupa typu p^∞. Zbytek důkazu plyne z toho, že pro každé dvě Abelovy grupy G_1, G_2 platí $(G_1 \times G_2)^\wedge \cong G_1^\wedge \times G_2^\wedge$, kde symbolem $\cong$ budeme rozumět isomorfismus grup.

Lemma 2. *Pokud nekonečná Abelova grupa G není periodická s konečnou hodností, potom* card $G <$ card $G^\wedge$.

Důkaz. Nechť $G' \subset G$ je podgrupa vytvořená kanonickou D-soustavou grupy G. Zřejmě $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(G')$. Je-li card $G > \aleph_0$, potom podle věty 8 [3] card $G = \mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(G') =$ card G'. Je-li card $G = \aleph_0$, potom card $G' \leqq \aleph_0$. Grupa G' buďto není periodická nebo má nekonečnou hodnost, tedy card $G' = \aleph_0 =$ card G.

Grupa G' je direktním součinem $\mathrm{r}(G')$ cyklických grup. Označme $B \subset (G')^\wedge$ množinu všech omezených charakterů na G', tj. nechť $B = \mathrm{Hom}\,(G', C)$, kde C je multiplikativní grupa všech komplexních jednotek. Je-li $\mathrm{r}(G') \geqq \aleph_0$, potom z věty 54,3 [4] plyne, že card Hom $(G', C) \geqq$ exp card $\mathrm{r}(G') >$ card $\mathrm{r}(G') =$ card $G' =$ card G. Je-li $\mathrm{r}(G') < \aleph_0$, potom aspoň jeden direktní faktor je nekonečná cyklická grupa a podle téže věty 54,3 platí card Hom $(G', C) \geqq$ card $C > \aleph_0 =$ card G.

Podle věty 2,2 [1] je možné každý omezený charakter $\psi' \in (G')^\wedge$ rozšířit do charakteru $\psi \in G^\wedge$. Je tedy card $G^<$ $\geqq$ card $B >$ card G.

Lemma 3. *Jsou-li Abelovy grupy G, $G^{\wedge\wedge}$ isomorfní, potom jsou konečné.*

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy isomorfní grupy G, $G^{\wedge\wedge}$ jsou nekonečné. Je-li G periodická grupa s konečnou hodností, potom podle lemmatu 1 není $G^\wedge$ periodická grupa, tedy card $G = \aleph_0 \leqq$ card $G^\wedge$ a podle lemmatu 2 card $G^\wedge <$ card $G^{\wedge\wedge} =$ card G, což je spor. Není-li G periodická grupa s konečnou hodností, potom podle lemmatu 2 card $G <$ card $G^\wedge$ a podle lemmatu 1 nemůže být $G^\wedge$ periodickou grupou s konečnou hodností, tedy podle lemmatu 2 card $G^\wedge <$ card $G^{\wedge\wedge} =$ card G, což je opět spor. Grupy G, $G^{\wedge\wedge}$ jsou tedy konečné.

Lemma 4. *Je-li G Abelova inversní pologrupa, potom jsou pologrupy $\mathbf{E}(G^\wedge)$, $[\mathbf{E}(G)]^\wedge$ isomorfní.*

Důkaz. Každý idempotentní charakter φ na G je jednoznačně určen hodnotami, kterých nabývá na $\mathbf{E}(G)$, protože $\varphi(x) = \varphi(e)$ pro všechna $x \in G_e$. Naopak každý charakter na $\mathbf{E}(G)$ lze podle věty 2,2 [1] rozšířit do omezeného charakteru ψ na G, a tudíž do idempotentního charakteru $|\psi| \in G^\wedge$.

Důkaz věty 2. Jsou-li pologrupy $G, G^{\wedge\wedge}$ isomorfní, potom jsou též isomorfní pologrupy $\mathbf{E}(G)$, $\mathbf{E}(G^{\wedge\wedge})$, a tudíž podle lemmatu 4 jsou isomorfní pologrupy $\mathbf{E}(G)$, $[\mathbf{E}(G)]^{\wedge\wedge}$. Z věty 2 práce [5] plyne, že pologrupa $\mathbf{E}(G)$ je konečný řetězec. Podle věty 1,10 a důsledku 1,12 [1] existuje

a) antiisomorfní zobrazení χ množiny $\mathbf{E}(G)$ na množinu $\mathbf{E}(G^\wedge)$, přičemž $G^\wedge_{\chi(e)} \cong$ $\cong [G_e]^\wedge$ pro každé $e \in \mathbf{E}(G)$,

b) antiisomorfní zobrazení $\chi^\wedge$ množiny $\mathbf{E}(G^\wedge)$ na množinu $\mathbf{E}(G^{\wedge\wedge})$, přičemž $G^{\wedge\wedge}_{\chi^\wedge(e^\wedge)} \cong [G^\wedge_{e^\wedge}]^\wedge$ pro každé $e^\wedge \in \mathbf{E}(G^\wedge)$.

Jestliže φ je isomorfismus pologrupy G na pologrupu $G^{\wedge\wedge}$, potom pro každé $e \in \mathbf{E}(G)$ je $\varphi(e) \in \mathbf{E}(G^{\wedge\wedge})$ a $G^{\wedge\wedge}_{\varphi(e)} \cong G_e$. Kromě toho je φ isomorfismus množiny $\mathbf{E}(G)$ na množinu $\mathbf{E}(G^{\wedge\wedge})$ a protože $\mathbf{E}(G)$ je konečný řetězec, platí nutně $\varphi = \chi^\wedge \circ \chi$ na $\mathbf{E}(G)$. Odtud plyne, že pro každé $e \in \mathbf{E}(G)$

$$[G_e]^{\wedge\wedge} \cong [G^\wedge_{\chi(e)}]^\wedge \cong G^{\wedge\wedge}_{\chi^\wedge \circ \chi(e)} = G^{\wedge\wedge}_{\varphi(e)} \cong G_e\,.$$

Podle lemmatu 3 jsou všechny grupy G_e konečné. Pologrupa G je sjednocením konečného počtu konečných grup a tedy konečná.

Poznámka. Předpoklad, že množina všech idempotentů tvoří řetězec, je ve větě 2 nutný, jak ukazuje následující příklad. Nechť G je interval $\langle 0, 1 \rangle$, ve kterém je násobení definováno způsobem:

$$x \circ y = 0, \text{ je-li } 1 \neq x \neq y \neq 1;$$

$$x \circ y = \min(x, y) \text{ v ostatních případech.}$$

Snadno se dokáže, že G je Abelova nekonečná inversní pologrupa, která je isomorfní s pologrupami $G^\wedge$ a $G^{\wedge\wedge}$.

Literatura

[1] *R. J. Warne, L. K. Williams:* Characters on inverse semigroups. Czech. Math. J. 11 (86), 1961, 150—155.

[2] *E. Hewitt, H. S. Zuckerman:* Finite dimensional convolution algebras. Acta Math. 93 (1955), 67—119.

[3] *V. Dlab:* D-hodnost Abelovy grupy. Čas. pro pěst. mat. 82 (1957), 314—334.

[4] *L. Fuchs:* Abelian groups, Budapest, 1958.

[5] *O. Kowalski, B. Pondělíček:* O charakterech řetězců. Čas. pro pěst. mat. 91 (1965), 1—3.

Adresa autora: Poděbrady — zámek (Fakulta elektrotechnická ČVUT).

Резюме

О ХАРАКТЕРАХ ПОЛУГРУПП, ИДЕМПОТЕНТЫ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ ЦЕПЬ

БЕДРЖИХ ПОНДЕЛИЧЕК (Bedřich Pondělíček), Подебрады

Пусть G – абелева обратная полугруппа, $G^\wedge$ – полугруппа характеров G. В работе доказана следующая теорема:

Абелева обратная полугруппа G, идемпотенты которой образуют цепь, изоморфна $G^{\wedge\wedge}$ тогда и только тогда, если G конечна.

Summary

ON THE CHARACTERS OF SEMIGROUPS WHOSE IDEMPOTENTS FORM A CHAIN

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

Let G be an abelian inverse semigroup, $G^\wedge$ the semigroup of characters on G. In this paper the following theorem is proved:

An abelian inverse semigroup G whose idempotents form a chain is isomorphic to $G^{\wedge\wedge}$ if and only if G is finite.