

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 104

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117547>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Nechť f je spojitá na $(0,1)$. Rozhodněte, zda existuje filtr $\mathcal{F}$ konvergující k nule tak, že $\lim_{\mathcal{F}} [f(t+h) - f(t)]/h$, tj. $\mathcal{F}$ -derivative, je konečná pro skoro všechna $t \in (0, 1)$.

2. Vyšetřete třídu všech konečných reálných funkcí f na $(0, 1)$, které mají následující vlastnost: existují lebesgueovsky měřitelné množiny E_i , $i = 1, 2, \dots$, tak, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = (0, 1)$ a že pro každé $i = 1, 2, \dots$ je $f|_{E_i}$ spojitá funkce na E_i , která se dá spojitě rozšířit na $(0, 1)$; přitom $f|_{E_i}$ značí redukci funkce f na množinu E_i . Rozhodněte, zda dokonce každá měřitelná f nemá tuto vlastnost.

3. Buď f konečná nezáporná funkce na $\langle 0, 1 \rangle$ a necht' $N = \{t; f(t) > 0\}$ má Lebesgueovu míru nula. Rozhodněte, zda ke každému $\varepsilon > 0$ existuje newtonovsky integrovatelná funkce g na $\langle 0, 1 \rangle$ tak, že $g \geq f$ a $\int_0^1 g < \varepsilon$. Zdá se, že problém není triviální ani pro spočetnou N .

4. Buď f funkce definovaná na $(0, 1) \times (0, 1)$, a necht' $f(., x)$ je lebesgueovsky měřitelná na $(0, 1)$ pro každé $x \in (0, 1)$ a $f(t, .)$ je spojitá na $(0, 1)$ pro každé $t \in (0, 1)$. Rozhodněte, zda pro každé $[\tau, \xi] \in (0, 1) \times (0, 1)$ existuje $\delta > 0$ a spojitá funkce φ definovaná na $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ tak, že $\varphi(\tau) = \xi$ a $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ skoro všude na $(\tau - \delta, \tau + \delta)$.

Poznámka. Lze dokázat, že toto „formální řešení“ diferenciální rovnice $x' = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$ existuje např. za předpokladu, že na $(0, 1)$ existují perronovsky integrovatelné funkce m, M tak, že $m(t) \leq f(t, x) \leq M(t)$ pro každé $[t, x] \in (0, 1) \times (0, 1)$. Dále vyplývá z Luzinovy věty (S. Saks: Theory of the integral, Warszawa 1937, str. 217), že taková funkce φ existuje, je-li $f(t, x) = F(t)$, kde F je měřitelná a skoro všude konečná na $(0, 1)$.

Karel Karták, Praha