Časopis pro pěstování matematiky

Oldřich Kowalski; Bedřich Pondělíček

O charakterech řetězců

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 1--3

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117543`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 91 * PRAHA 20. 2. 1966 * ČÍSLO 1

O CHARAKTERECH ŘETĚZCŮ

OLDŘICH KOWALSKI, Brno a BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Došlo dne 6. dubna 1964)

Nechť $\mathbf{M}$ je libovolný řetězec a $\mathbf{U}$ je řetězec $\{0, 1; 0 < 1\}$. *Charakterem* řetězce $\mathbf{M}$ nazveme každé isotonní zobrazení φ řetězce $\mathbf{M}$ do řetězce $\mathbf{U}$ takové, že pokud $\mathbf{M}$ má největší prvek u, pak $\varphi(u) = 1$. Množina $\mathbf{M}^\wedge$ všech charakterů na $\mathbf{M}$, kterou vždy považujeme za část kardinální mocniny $\mathbf{U}^{\mathbf{M}}$, je uspořádanou množinou. Snadno se vidí, že $\mathbf{M}^\wedge$ je úplný řetězec. Viz [1]. Naším cílem je zjistit, za jakých podmínek

(*) $\mathbf{M}$ je antiisomorfní s $\mathbf{M}^\wedge$,

(**) $\mathbf{M}$ je isomorfní s $\mathbf{M}^{\wedge\wedge} = (\mathbf{M}^\wedge)^\wedge$.

Ideálem řetězce $\mathbf{M}$ nazýváme, jak známo, každý podřetězec I takový, že z $a \leqq b$ ($a \in \mathbf{M}$, $b \in I$) plyne $a \in I$. Mezi ideály počítáme i prázdnou množinu $\varnothing$. Uvedeme zde speciální tvar věty Gleason - Dilworthovy o ideálech. Viz [2].

Věta. *Množina $\mathbf{G}(\mathbf{M})$ všech ideálů řetězce $\mathbf{M}$ (uspořádaná vůči množinové inklusi) není isomorfní s žádnou podmnožinou řetězce $\mathbf{M}$.*

Nechť $a \prec b$ ($a, b \in \mathbf{M}$) značí, že prvek b je následovníkem prvku a. Prvek a nazveme *shora izolovaný*, když je buď největším prvkem v $\mathbf{M}$ nebo k němu existuje prvek $b \succ a$. Prvek $a \in \mathbf{M}$ nazveme *zdola izolovaný*, když je buď nejmenším prvkem v $\mathbf{M}$ nebo k němu existuje prvek $c \prec a$.

Nechť nyní $\mathbf{M}$ splňuje některou z podmínek (*), (**), pak je $\mathbf{M}$ zřejmě úplný řetězec. Buď u jeho největší prvek. Množina $\mathbf{M}^\wedge$ je zřejmě antiisomorfní s řetězcem $\mathbf{E}$ všech ideálů množiny $\mathbf{M} - \{u\}$; stačí totiž každému charakteru $\varphi \in \mathbf{M}^\wedge$ přiřadit ideál těch prvků $x \in \mathbf{M} - \{u\}$, pro které $\varphi(x) = 0$. Množina $\mathbf{M}^{\wedge\wedge}$ je isomorfní s množinou těch isotonních zobrazení ψ množiny $\mathbf{E}$ do řetězce $\mathbf{U}^* = \{1, 0; 1 < 0\}$, pro které $\psi(\varnothing) = 1$. Tedy $\mathbf{M}^{\wedge\wedge}$ je isomorfní s řetězcem všech neprázdných ideálů na $\mathbf{E}$. Označme tento řetězec $\mathbf{E}'$.

Je-li $x \in \mathbf{M}$, pak označme $\bar{x} = \mathscr{E}\{y \in \mathbf{M}; y \leqq x\}$ a $(x) = \mathscr{E}\{y \in \mathbf{M}; y < x\}$. Je-li $I \in \mathbf{E}$, pak obdobně označme $\bar{I} = \mathscr{E}\{J \in \mathbf{E}; J \leqq I\}$ a $(I) = \mathscr{E}\{J \in \mathbf{E}; J < I\}$.

Snadno se nahlédne, že platí:

a) Je-li $x \prec y$ $(x, y \in \boldsymbol{M})$, pak $\bar{x} \prec \bar{y}$, $\bar{\bar{x}} \prec \bar{\bar{y}}$.

b) $(x) \prec \bar{x}$, $((x)) \prec \overline{(x)} = (\bar{x}) \prec \bar{\bar{x}}$ pro každé $x \in \boldsymbol{M}$.

Dále vzhledem k úplnosti řetězců $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}$ platí:

c) Každý ideál $I \in \boldsymbol{E}$ je tvaru $I = (x)$ pro některé $x \in \boldsymbol{M}$ nebo je tvaru $I = \bar{x}$ pro některé $x \in \boldsymbol{M} - \{u\}$.

d) Každé $I' \in \boldsymbol{E}'$ je tvaru $I' = (\bar{x})$ nebo $I' = ((x))$ pro některé $x \in \boldsymbol{M}$ nebo je tvaru $I = \bar{\bar{x}}$ pro některé $x \in \boldsymbol{M} - \{u\}$.

Konečně platí:

e) Je-li φ isomorfní zobrazení $\boldsymbol{E}$ do $\boldsymbol{M}$ resp. φ' isomorfní zobrazení $\boldsymbol{E}'$ do $\boldsymbol{M}$, pak $\varphi(\bar{d}) > d$ resp. $\varphi'(\bar{\bar{d}}) > d$ pro každé $d \in \boldsymbol{M} - \{u\}$.

Skutečně, kdyby platilo $\varphi(\bar{d}) \leqq d$, dostali bychom isomorfní zobrazení řetězce $\boldsymbol{G}(\bar{d})$ všech ideálů na $\bar{d}$ do řetězce $\bar{d}$, což je spor s větou Gleason - Dilworthovou. Kdyby platilo $\varphi'(\bar{\bar{d}}) \leqq d$, pak $\varphi(I) = \varphi'(\bar{I})$ by bylo isomorfní zobrazení $\boldsymbol{E}$ do $\boldsymbol{M}$, přičemž $\varphi(\bar{d}) \leqq d$, což je opět spor.

Lemma. *Platí-li jedna z podmínek (*), (**), pak každý prvek řetězce $\boldsymbol{M}$ je shora izolovaný.*

D ů k a z. Platnost některé z podmínek (*), (**) znamená, že buď $\boldsymbol{M}$ je isomorfní s $\boldsymbol{E}$ nebo s $\boldsymbol{E}'$. Předpokládejme, že v $\boldsymbol{M}$ existuje prvek d_0, který není shora izolovaný a budiž d infimum všech takových prvků v úplném řetězci $\boldsymbol{M}$. Potom d není shora izolovaný prvek.

Nechť φ je isomorfismus $\boldsymbol{E}$ na $\boldsymbol{M}$ a $\varphi(I) = d$. Podle e) je $I < \bar{d}$ a podle c) platí buď $I = (d)$ nebo $I = (x)$ nebo $I = \bar{x}$ pro některé $x < d$. Ale ke každému $x < d$ existuje následovník $y \succ x$. Podle a) a b) má I následovníka, tedy také $d = \varphi(I)$ má následovníka, což je spor.

Nechť φ' je isomorfismus $\boldsymbol{E}'$ na $\boldsymbol{M}$ a $\varphi'(I') = d$. Užitím e), d), a) a b) odvodíme zcela obdobný spor.

Snadno se zjistí, že každá dobře uspořádaná množina $\boldsymbol{M}$ s největším prvkem je isomorfní s $\boldsymbol{E}$ a že každá konečná množina $\boldsymbol{M}$ je isomorfní s $\boldsymbol{E}'$.

Z lemmatu tedy především plyne:

Věta 1. *Řetězec $\boldsymbol{M}$ je antiisomorfní s $\boldsymbol{M}^\wedge$ tehdy a jen tehdy, je-li $\boldsymbol{M}$ dobře uspořádaná množina s největším prvkem.*

Nechť nyní $\boldsymbol{M}$ je isomorfní s $\boldsymbol{M}^{\wedge\wedge}$, pak všechny prvky z $\boldsymbol{M}$ jsou shora izolované, podle a) a b) plyne, že všechny prvky z $\boldsymbol{E}$ jsou shora izolované, a tedy všechny prvky z $\boldsymbol{M}^\wedge$ jsou zdola izolované. Vzhledem k isomorfismu řetězců $(\boldsymbol{M}^\wedge)^{\wedge\wedge}$, $\boldsymbol{M}^\wedge$ jsou všechny prvky z $\boldsymbol{M}^\wedge$ také shora izolované, a tedy úplný řetězec $\boldsymbol{M}^\wedge$ je konečný. Řetězec $\boldsymbol{M}$ isomorfní s $\boldsymbol{M}^{\wedge\wedge}$ je pak rovněž konečný.

Věta 2. *Řetězec $\boldsymbol{M}$ je isomorfní s $\boldsymbol{M}^{\wedge\wedge}$ tehdy a jen tehdy, je-li $\boldsymbol{M}$ konečná množina.*

Literatura

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York, rev. ed. 1948.
[2] *A. M. Gleason, R. P. Dilworth:* A generalized Cantor theorem, Proc. Amer. Math. Soc. *13* (1962), pp. 704–705.

Adresa autorů: Oldřich Kowalski, Brno, Havlíčkova 51, Bedřich Pondělíček, Poděbrady — zámek (Fakulta elektrotechnická ČVUT).

Резюме

О ХАРАКТЕРАХ ЦЕПЕЙ

ОЛДРЖИХ КОВАЛСКИ (Oldřich Kowalski), Брно
и БЕДРЖИХ ПОНДЕЛИЧЕК (Bedřich Pondělíček), Подебрады

Характером цепи мы назовем каждое изотонное отображение φ цепи $\boldsymbol{M}$ в цепь $\boldsymbol{U} = \{0, 1; 0 < 1\}$, так что если $\boldsymbol{M}$ имеет наибольший элемент u, то $\varphi(u) = 1$. Символом $\boldsymbol{M}^\wedge$ мы обозначим упорядоченное множество всех характеров на $\boldsymbol{M}$, которое мы рассмотрим как часть кардинальной степени $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{M}}$.

В этой работе доказаны следующие две теоремы:

Теорема 1. *Цепь $\boldsymbol{M}$ антиизоморфна $\boldsymbol{M}^\wedge$ тогда и только тогда, если $\boldsymbol{M}$ — вполне упорядоченное множество с наибольшим элементом.*

Теорема 2. *Цепь $\boldsymbol{M}$ изоморфна $\boldsymbol{M}^{\wedge\wedge}$ тогда и только тогда, если $\boldsymbol{M}$ — конечное множество.*

Summary

ON THE CHARACTERS OF CHAINS

OLDŘICH KOWALSKI, Brno, BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

By a character we mean each isotone mapping φ from the chain $\boldsymbol{M}$ into the chain $\boldsymbol{U} = \{0, 1; 0 < 1\}$ such that if $\boldsymbol{M}$ has the largest element u, then $\varphi(u) = 1$. By the symbol $\boldsymbol{M}^\wedge$ we denote an ordered set of all characters on $\boldsymbol{M}$ which we comprehend as a part of the cardinal power $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{M}}$.

In this paper two following theorems are proved:

Theorem 1, *The chain $\boldsymbol{M}$ is antiisomorphic to $\boldsymbol{M}^\wedge$ if and only if $\boldsymbol{M}$ is a well-ordered set with the largest element.*

Theorem 2, *The chain $\boldsymbol{M}$ is isomorphic to $\boldsymbol{M}^{\wedge\wedge}$ if and only if $\boldsymbol{M}$ is a finite set.*