Zdeněk Hustý

Asymptotische Formeln für die Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung im oszillatorischen Fall

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 79--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117526`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ASYMPTOTISCHE FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG IM OSZILLATORISCHEN FALL

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingegangen am 19. Februar 1964)

Diese Arbeit stellt ein Studium der asymptotischen Eigenschaften der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen der n-ten Ordnung dar. Den Ausgangspunkt bildeten die bekannten Eigenschaften der Lösungen binomischer Gleichung der zweiten Ordnung im oszillatorischen Fall, die auf eine Gleichung der n-ten Ordnung verallgemeinert wurden.

VORBEMERKUNGEN

Es sei eine homogene linerare Differentialgleichung mit der Dimension – kurz Gleichung – in der halbkanonischen Form

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad x \in J \equiv \langle a, \infty) \tag{0.1}$$

gegeben, wo der Koeffizient A_i die Dimension i hat und $A_2 \in C_{n-2}(J)$, $A_i \in C_0(J)$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Die Gleichung (0.1) können wir auf perturbierte Form

$$I_n(y, A_2) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \omega_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0 \tag{0.2}$$

überführen, wo

$$I_n(y, A_2) = y^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} f_i(A_2)\, y^{(n-i)}(x) = 0 \tag{0.3}$$

die iterierte Gleichung n-ter Ordnung, $f_i(A_2)$ das iterierte Polynom der Dimension i und $\omega_i(x) = A_i - f_i(A_2)$ die Hauptsemiinvariante der Dimension i der Gleichung (0.1) ist. Die Gleichung (0.3) ist quasiidentisch mit der Gleichung, die wir durch $(n-1)$-fache Iteration der Gleichung $u^2y' - (n-1)\, uu'y = 0$ erhalten, wo u eine beliebige Lösung der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1} A_2 y = 0 \tag{0.4}$$

ist. Die iterierte Gleichung (0.3) besitzt das Hauptsystem

$$y_i = u^{n-i}v^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{0.5}$$

wo u, v unabhängige Integrale der Gleichung (0.4) sind, siehe [4].

1. HILFSSÄTZE

Hilfssatz 1.1. *Ist $h, H \in C_2(J)$ und gelten ferner folgende Voraussetzungen*

$$h > 0, \quad \lim_{x \to \infty} hh' = 0, \quad H > 0, \quad H' > 0,$$

$$\int_a^\infty \frac{|(h^2H')'|}{h^2H'} \mathrm{d}x < \infty, \quad \int_a^\infty |hh'' - H'^2h^2 + Ah^2| \mathrm{d}x < \infty,$$

dann hat die Gleichung (0.4), *wo*

$$A = \frac{3}{n+1} A_2 \tag{1.1}$$

ist, das Hauptsystem

$$u = h[\sin H + o(1)], \quad v = h[\cos H + o(1)] \tag{1.2}$$

mit den Ableitungen

$$u' = hH'[\cos H + o(1)], \quad v' = -hH'[\sin H + o(1)], \tag{1.3}$$

siehe [3].

Bemerkungen 1.2. a) Ist $h > 0$, $h \in C_2(J)$, $\lim_{x \to \infty} hh' = 0$ und

$$\int_a^\infty |hh'' - h^{-2} + Ah^2| \mathrm{d}x < \infty, \tag{1.4}$$

dann gelten für das Hauptsystem der Gleichung (0.4) die Formeln (1.2), (1.3), wo wir

$$H = \int_a^x \frac{1}{h^2} \mathrm{d}s \tag{1.5}$$

setzen.

b) Es sei $h > 0$, $h \in C_2(J)$ und es gelte (1.4). Dann hat die Gleichung (0.4) das Hauptsystem (1.2) mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{h}\{hh'[\sin H + o(1)] + [\cos H + o(1)]\}, \\ v' &= \frac{1}{h}\{hh'[\cos H + o(1)] - [\sin H + o(1)]\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

wo die Funktion H durch die Formel (1.5) bestimmt wird, siehe [1].

Hilfssatz 1.3. *Es sei $W(x)$ die Wronskische Determinante der Funktionen* (0.5), *welche das Hauptsystem der Gleichung* (0.3) *bilden und es sei $W_m(x)$ das Komplement des Elementes $y_m^{(n-1)}$ in der Wronskischen Determinante $W(x)$. Ist ferner*

$$\int_a^\infty \left|\frac{W_m(x)}{W(x)}\right| \left|\sum_{k=3}^n \omega_k(x) \left(u^{n-i} v^{i-1}\right)^{(n-k)}\right| \mathrm{d}x < \infty , \tag{1.7}$$

$i, m = 1, 2, \ldots, n$, so hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem*

$$u^{n-i} v^{i-1} [c_i + o(1)] , \quad c_i = \text{Konst.} , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{1.8}$$

siehe [2].

Hilfssatz 1.4. *Ist u eine Lösung der Gleichung* (0.4), *so ist*

$$(u^r)^{(j)} = \sum_{\mu=0}^{j} u^{r-j+\mu} (u')^{j-\mu} f_\mu^j(A) , \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

wo $f_\mu^j(A)$ das j-te Polynom des Elementes A der Dimension μ ist, das der Gleichung

$$f_\mu^j(A) = (r - j + \mu + 1) f_\mu^{j-1}(A) - (j - \mu + 1) A f_{\mu-2}^{j-1}(A) + [f_{\mu-1}^{j-1}(A)]' ,$$
$$\mu = 2, 3, \ldots, j , \quad f_0^j(A) = r(r-1) \ldots (r - j + 1) ,$$
$$f_1^{j-1}(A) = f_{-1}^{j-1}(A) = f_j^{j-1}(A) = 0 \quad \textit{entspricht.}$$

Der Hilfssatz 1.4 kann durch Induktion nach j bewiesen werden.

Hilfssatz 1.5. *Sind u, v beliebige Integrale der Gleichung* (0.4), *so ist*

$$(u^r v^\varrho)^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{j-l} \sum_{\nu=0}^{l} \binom{j}{l} u^{r-j+l+\mu} v^{\varrho-l+\nu} (u')^{j-l-\mu} (v')^{l-\nu} f_\mu^{j-l}(A) f_\nu^l(A) , \quad j \leqq n . \tag{1.9}$$

Der Hilfssatz 1.5 kann durch die bekannte Leibnizsche Formel für die Ableitung des Produktes zweier Funktionen und den Hilfssatz 1.4 bewiesen werden.

2. ASYMPTOTISCHE FORMELN

Satz 2.1. *Es existieren derartige positive Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, dass*

$$u = O[\varphi(x)] , \quad u' = O[\psi(x)] , \tag{2.1}$$

wo u eine allgemeine Lösung der Gleichung (0.4) *ist. Wenn ferner*

$$|A_2^{(r)}| \leqq M = \text{Konst.} > 0 \quad \text{im Intervall } J , \quad r = 0, 1, \ldots, n - 5 , \tag{2.2}$$

$$\int_a^\infty \varphi^{n+k+j-2} \psi^{n-k-j} |\omega_k| \, \mathrm{d}x < \infty , \tag{2.3}$$

$k = 3, 4, \ldots, n$, $j = 0, 2, 3, \ldots, n - k$, *ist, dann hat die Gleichung* (0.1) *das Hauptsystem* (1.8).

Beweis. Nach dem Hilfssatze 1.3 genügt es zu zeigen, dass (2.3) ⇒ (1.7), wenn die Voraussetzungen des Satzes 2.1 erfüllt sind. Wenn wir den Hilfssatz 1.5 in (1.7) anwenden, so erhalten wir die Ungleichungen

$$\int_a^\infty \left|\frac{W_m(x)}{W(x)}\right| \left| \sum_{k=3}^{n} \omega_k \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{\mu=0}^{n-k-l} \sum_{\nu=0}^{l} \binom{n-k}{l} u^{-i+k+l+\mu} v^{i-1-l+\nu} (u')^{n-k-l-\mu} (v')^{l-\nu} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f_\mu^{n-k-l}(A) f_\nu^l(A) \right| \mathrm{d}x \leqq \sum_{k=3}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{\mu=0}^{n-k-l} \sum_{\nu=0}^{l} \binom{n-k}{l} \cdot$$

$$\cdot \int_a^\infty \left|\frac{W_m(x)}{W(x)} \omega_k u^{-i+k+l+\mu} v^{i-1-l+\nu} (u')^{n-k-l-\mu} (v')^{l-\nu} f_\mu^{n-k-l}(A) f_\nu^l(A)\right| \mathrm{d}x ,$$

$i, m = 1, 2, \ldots, n$. Da $W(x) = $ Konst., $W_m(x) = O[\varphi^{n-1}(x)]$, $m = 1, 2, \ldots, n$ und die Funktionen $f_s^r(A)$, $s = 0, 2, 3, \ldots, n - 3$, $r = 2, 3, \ldots, n - 3$ beschränkt sind, so gelangen wir mit Berücksichtigung von (2.1) mittels der oben angeführten Ungleichungen zu dem Schluss, dass (2.3) ⇒ (1.7), wo $j = \mu + \nu$ gesetzt wurde.

Bemerkungen 2.2. a) Es gelten die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1.1. Es sei u eine allgemeine Lösung der Gleichung (0.4). Nach (1.2), (1.3) gilt (2.1), wo wir $\varphi(x) = h$, $\psi(x) = hH'$ setzen.

b) Es gelten die in der Bemerkung 1.2 b) angeführten Voraussetzungen und es sei $|hh'| < \eta = $ Konst. > 0. Es sei ferner u eine allgemeine Lösung der Gleichung (0.4). Dann gelten nach (1.2), (1.6) die Formeln (2.1), wo wir $\varphi(x) = h$, $\psi(x) = 1/h$ setzen.

Satz 2.3. *Es gelten folgende Voraussetzungen*:

a) $|A_2^{(r)}| \leqq M = $ Konst. > 0, $r = 0, 1, \ldots, n - 5$,

b) $h \in C_2(J)$ $h > 0$, $\lim_{x\to\infty} hh' = 0$, $H \in C_2(J)$, $H > 0$, $H' > 0$,

c) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{|(h^2H')'|}{h^2H'} \mathrm{d}x < \infty$, $\displaystyle\int_a^\infty |hh'' - H'^2h^2 + Ah^2| \mathrm{d}x < \infty$,

d) $\displaystyle\int_a^\infty h^{2(n-1)}(H')^{n-k-j} |\omega_k| \mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, $j = 0, 2, 3, \ldots, n - k$.

Dann hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem*

$$h^{n-1}[\sin^{n-i} H \cos^{i-1} H + o(1)] , \quad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{2.4}$$

Der Satz 2.3 kann mittels des Satzes 2.1, des Hilfsatzes 1.1 und der Bemerkung 2.2 a) leicht bewiesen werden.

Satz 2.4. *Es gelten folgende Voraussetzungen*:

a) $|A_2^{(r)}| \leqq M = \text{Konst.} > 0, \quad r = 0, 1, \ldots, n-5,$

b) $h \in C_2(J), \quad h > 0, \quad |hh'| < \eta = \text{Konst.} > 0,$

c) $\displaystyle\int_a^\infty |hh'' - h^{-2} + Ah^2| \, \mathrm{d}x < \infty\,,$

d) $\displaystyle\int_a^\infty h^{2(k+j-1)} |\omega_k| \, \mathrm{d}x < \infty, \quad k = 3, 4, \ldots, n, \quad j = 0, 2, \ldots, n-k.$

Dann hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem* (2.4), *wo die Funktion H durch die Formel* (1.5) *bestimmt ist.*

Der Satz 2.4 kann mittels des Satzes 2.1, der Bemerkungen 1.2 b) und 2.2 b) leicht bewiesen werden.

Folgerung 1. *Es gelten die Voraussetzungen a)–c) des Satzes 2.4. Wenn die Funktion h im Intervall J beschränkt ist, dann können wir die Voraussetzung d) durch die Voraussetzung* $\int_a^\infty |\omega_k| \, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad k = 3, 4, \ldots, n$ ersetzen.

Folgerung 2. *Es gelten die Voraussetzungen a)–c) des Satzes 2.4. Wenn die Ungleichung* $h \geqq 1$ *für alle genug grossen x gilt, so ist die Voraussetzung d) erfüllt, wenn*

$\int_a^\infty h^{2(n-1)} |\omega_k| \, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad k = 3, 4, \ldots, n-2, n\,, \quad \int_a^\infty h^{2(n-2)} |\omega_{n-1}| \, \mathrm{d}x < \infty$ *gilt.*

3. ANWENDUNGEN

Im 3. Kapitel führen wir einige Anwendungen der Sätze aus dem 2. Kapitel an. Wir werden immer voraussetzen, dass (2.2) gilt; ferner verwenden wir die in (1.1) eingeführte Bezeichnung.

3.1. *Es gelten folgende Voraussetzungen*:

$$\int_a^\infty x^{-2s} |Ax^{4s} - c^2| \, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad c = \text{Konst.} > 0\,, \quad s = \text{Konst.} < \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\int_a^\infty x^{2s(k+j-1)} |\omega_k| \, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad k = 3, 4, \ldots, n\,, \quad j = 0, 2, 3, \ldots, n-k\,. \tag{3.1}$$

Dann hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem*

$$x^{s(n-1)} \left\{ \left[\sin \frac{cx^{1-2s}}{1-2s} \right]^{n-i} \cdot \left[\cos \frac{cx^{1-2s}}{1-2s} \right]^{i-1} + o(1) \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz 2.3, wo wir $h = x^s$, $H = [c/(1-2s)]\, x^{1-2s}$ setzen.

Bemerkungen 3.1. a) Für $s = 0$ erhalten wir folgende Behauptung: *Wenn* $\int_a^\infty |A - c^2| \,\mathrm{d}x < \infty$, $\int_a^\infty |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, *gilt, dann hat die Gleichung* (0.1) *das Hauptsystem* $[\sin cx]^{n-i} \,.\, [\cos cx]^{i-1} + o(1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

b) *Für* $s > 0$ *können wir* (3.1) *durch die Bedingung* $\int_a^\infty x^{2s(n-1)} |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n - 2, n$, $\int_a^\infty x^{2s(n-2)} |\omega_{n-1}| \,\mathrm{d}x < \infty$ *ersetzen.*

c) *Für* $s < 0$ *können wir* (3.1) *durch die Bedingung* $\int_a^\infty x^{2s(k-1)} |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$ *ersetzen.*

3.2. *Es gelten folgende Voraussetzungen:*

$$\int_a^\infty x \left| A - \frac{\alpha}{x^2} \right| \mathrm{d}x < \infty \,, \quad \alpha = \text{Konst.} > \tfrac{1}{4} \,,$$

$$\int_a^\infty x^{n-1} |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty \,, \quad k = 3, 4, \ldots, n - 2, n \,, \quad \int_a^\infty x^{n-2} |\omega_{n-1}| \,\mathrm{d}x < \infty \,.$$

Dann hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem*

$$x^{(n-1)/2}\{[\sin (\alpha - \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \ln x]^{n-i} \,.\, [\cos (\alpha - \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \ln x]^{i-1} + o(1)\} \,,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Die Behauptung folgt aus dem Satze 2.4 (siehe Folgerung 2), wo wir $h = (\alpha - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ setzen.

3.3. *Es gelten folgende Voraussetzungen:*
$A \geqq c^2$, $c =$ Konst. > 0, $A^{-\frac{1}{4}}$ *ist konvex.*

$$\int_a^\infty |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty \,, \quad k = 3, 4, \ldots, n \,. \tag{3.2}$$

Dann hat die Gleichung (0.1) *das Hauptsystem*

$$A^{-(n-1)/4} \left\{ \left[\sin \int_a^x A^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}s \right]^{n-i} . \left[\cos \int_a^x A^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}s \right]^{i-1} + o(1) \right\} , \tag{3.3}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Wenn wir $h = A^{-\frac{1}{4}}$ wählen, so können wir uns leicht überzeugen, dass die Voraussetzungen a)–c) des Satzes 2.4 erfüllt sind, siehe z.B. [1], Seite 517. Ebenfalls wird die Voraussetzung d) des Satzes 2.4 erfüllt, wenn (3.2) gilt, denn die Funktion $A^{-\frac{1}{4}}$ beschränkt ist. Wenn wir die gewählte Funktion h in (2.4) einsetzen, wo die Funktion H durch die Formel (1.5) bestimmt ist, so erhalten wir (3.3).

Literatur

[1] *M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + A(x)\,y = 0$. Czech. Math. J. *8* (*83*), 1958, 513—519.

[2] *M. Ráb:* Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Czech. Math. J. *8* (*83*), 1958, 222—229.

[3] *J. Mařík, M. Ráb:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\,y = 0$. Czech. Math. J. *14* (*89*), 1964, 203—221.

[4] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, *No 449*, 23—56 (1964).

[5] *J. Dula:* Asymptotické vzorce pro řešení rovnice $y^{(4)} + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0$ v případě oscilatorickém. Diplomarbeit. Přírodovědecká fakulta Univ. J. E. Purkyně, Brno, 1962.

Souhrn

ASYMPTOTICKÉ VZORCE PRO INTEGRÁLY HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU V OSCILATORICKÉM PŘÍPADĚ

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

V práci jsou zobecněny pro integrály homogenní lineární diferenciální rovnice — kratčeji rovnice — n-tého řádu asymptotické vzorce známé u oscilatorických rovnic druhého řádu. Jestliže např. rovnice $y'' + 3/(n+1)\,A_2 y = 0$, $A_2 \in C_{n-2}(I)$, $I \equiv \langle a, \infty)$, má fundamentální systém $u = h[\sin H + o(1)]$, $v = h[\cos H + o(1)]$, $u' = hH'[\cos H + o(1)$, $v' = -hH'[\sin H + o(1)]$, kde $0 < h \in C_2(I)$, $\lim\limits_{x\to\infty} hh' = 0$, $0 < H \in C_2(I)$, $H' > 0$, pak rovnice (A) $y^{(n)} + \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0$, $A_i \in C_0(I)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, má fundamentální systém $h^{n-1}[\sin^{n-i} H \cos^{i-1} H + o(1)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jestliže $|A_2^{(r)}| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $r = 0, 1, \ldots, n-5$, $\int_a^\infty h^{2(n-1)} (H')^{n-k-j} |\omega_k|\,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, $j = 0, 2, 3, \ldots, n-k$. Funkce ω_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ jsou fundamentální semiinvarianty rovnice (A). Zvolíme-li např. $h = 1$, $H = cx$, obdržíme následující tvrzení: Jestliže $|A_2^{(r)}| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int_a^\infty |A - c^2|\,\mathrm{d}x < \infty$, $(A = 3/(n+1)\,A_2)$, $c = \text{konst} > 0$, $\int_a^\infty |\omega_k|\,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, pak rovnice (A) má fundamentální systém $\sin^{n-i} cx \cos^{i-1} cx + o(1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ КОЛЕБЛЕМОСТИ

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

В работе обобщены для решений однородного линейного дифференциального уравнения — короче уравнения — n-ого порядка асимптотические формулы, которые известны для колебательных уравнений второго порядка. Если, например, уравнение $y'' + 3/(n+1)\,A_2 y = 0$, $A_2 \in C_{n-2}(I)$, $I \equiv \langle a, \infty)$, имеет фундаментальную систему $u = h[\sin H + o(1)]$, $v = h[\cos H + o(1)]$, $u' = hH'[\cos H + o(1)]$, $v' = -hH'[\sin H + o(1)]$ где $0 < h \in C_2(I)$, $\lim\limits_{x\to\infty} hh' = 0$, $0 < H \in C_2(I)$, $H' > 0$, то уравнение (A) $y^{(n)} + \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0$, $A_i \in C_0(I)$, $i = 3, 4, \ldots, n$, имеет фундаментальную систему $h^{n-1}[\sin^{n-i} H \cos^{i-1} H + o(1)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, если $|A^2_{(r)}| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $r = 0, 1, \ldots, n-5$, $\int_a^\infty h^{2(n-1)} \,.\, (H')^{n-k-j} |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, $j = 0, 2, 3, \ldots, n-k$. Функции ω_i, $i = 3, 4, \ldots, n$ являются фундаментальными семиинвариантами уравнения (A). Если выберем, например, $h = 1$, $H = cx$, получим следующие утверждения: если $|A_2^{(r)}| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int_a^\infty |A - c^2| \,\mathrm{d}x < \infty$ $(A = 3/(n+1)\,A_2)$, $c = \text{konst.} > 0$, $\int_a^\infty |\omega_k| \,\mathrm{d}x < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$, то уравнение (A) имеет фундаментальную систему $\sin^{n-i} cx \cos^{i-1} cx + o(1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.