Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Гамильтоновы окружности в решетчатом графе

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 1--11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117525

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 90 * PRAHA 21. II. 1965 * ČÍSLO 1

ГАМИЛЬТОНОВЫ ОКРУЖНОСТИ В РЕШЕТЧАТОМ ГРАФЕ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 18/XII 1962 г.)

Пусть $n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – целые числа > 1. Понятия: решетчатый граф $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, оси $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ребра, параллельные оси X_i, близкие ребра с поперечниками, слои решетчатого графа в направлении оси X_i будут иметь тот же смысл, что и в работе [1]. В настоящей работе мы дадим вывод необходимых и достаточных условий для существования гамильтоновой окружности в решетчатом графе, а также в некоторых его подграфах.

Лемма 1. *Произвольный решетчатый граф $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является четным, т. е. множество его вершин V можно разбить на два класса V_0, V_1 так, что произвольное ребро графа соединяет вершину из V_0 с вершиной из V_1.*

Доказательство. Построим классы V_0, V_1 вершин графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ так: вершина $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит к V_0 или к V_1 в зависимости от того, имеет ли место $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv 0 \pmod 2$ или $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv \equiv 1 \pmod 2$. Так как координаты произвольной вершины решетчатого графа являются целыми (положительными) числами и ребро графа соединяет две вершины, расстояние которых равно 1, то должно иметь место утверждение: две соединенные ребром вершины в $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ отличаются только одной из координат, и их разность равна 1 или -1. Из этого сразу же вытекает, что произвольное ребро из $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ соединяет некоторую вершину из V_0 с некоторой вершиной из V_1. Значит, $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ есть четный граф.

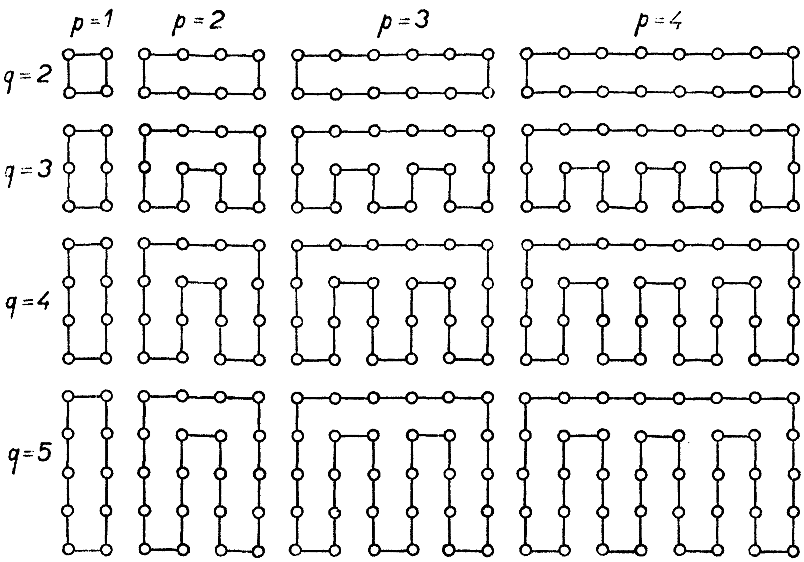
Лемма 2. *Пусть Q_0 – произвольный квадратичный фактор решетчатого графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и пусть $g, \dot{g}$ – два его близких ребра, принадлежащих к различным окружностям K_0, K'_0 фактора Q_0. Пусть Q_1 – квадратичный фактор графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, который получится из Q_0 заменой в последнем близких ребер $g, \dot{g}$ их поперечниками. Тогда справедливо:* (1) *произвольная окружность из Q_0, отличная от K_0 и отличная от K'_0, является также окружностью фактора Q_1, и* (2) *ребра из окружностей K_0, K'_0, принадлежащие к Q_1, вместе с добавленными поперечниками принадлежат к одной и той же окружности K_1 квадратичного фактора Q_1.*

Доказательство очевидно.

Теорема 1. *В решетчатом графе* $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *существует гамильтонова окружность тогда и только тогда, когда*

$$(*) \qquad \prod_{\nu=1}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Доказательство. Необходимость условия (*) вытекает из того, что в четном графе с нечетным числом вершин не может существовать гамильтонова окружность. Докажем, что условие (*) достаточное.



$\xi_1 = 2p$; $\xi_2 = q$

Рис. 1.

Пусть хотя бы одно из чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ четно. Так как изменением порядка обозначения отдельных осей координат граф не изменится, то можно, не ограничивая общности, предполагать, что ξ_1 — четное число.

Из рис. 1 ясно, что условие (*) является достаточным условием для $n = 2$. (Случай $n = 2$ приведен уже Аренсом в [9], стр. 364; он занимался ладьей, которой следует пройти через все поля прямоугольной шахматной доски и вернуться обратно в исходное поле.) Теперь докажем, что если (*) является достаточным условием для всех $n \geqq 2$; $n \leqq k$ (где k — некоторое натуральное число > 1), то (*) является достаточным условием также для $n = k + 1$.

Пусть $k \geqq 2$ и пусть $Q = G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+}\ )$ $k + 1$-мерный решетчатый граф, в котором $\xi_1 = 2p$ — четное число. Обозначим через Q_i i-тый слой графа Q в направлении оси X_{k+1} $(i = 1, 2, \ldots, r;\ r = \xi_{k+1})$. Ясно, что всякий из этих слоев изоморфен k-мерному решетчатому графу $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$.

Предположим, что в первом слое Q_1 существует гамильтонова окружность K_1. Эта окружность содержит четное число вершин, поэтому ее можно разбить на два линейных фактора L_1, L_2 графа Q_1. Обозначим через L_r линейный фактор графа Q_r, определенный таким образом: ребро из Q_r, соединяющее вершину $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, r)$ с вершиной $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k, r)$, принадлежит L_r тогда и только тогда, когда ребро из Q_1, соединяющее вершину $x = (x_1, \ldots, x_k, 1)$ с вершиной $y = (y_1, \ldots, y_k, 1)$, принадлежит к L_2. Очевидно, справедливо следующее: граф K, содержащий кроме всех вершин из Q, также все параллельные оси X_{k+1} ребра из Q, далее, все ребра из L_1 и L_r, является гамильтоновой окружностью графа Q. Значит, если условие (*) является достаточным для существования гамильтоновой окружности для $n = k$, то оно является достаточным также для $n = k + 1$. Из справедливости теоремы для $n = 2$ вытекает ее справедливость также для всех $n \geqq 2$. Доказательство закончено.

Теорема 2. *Пусть $n > 2$ и пусть $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Необходимым и достаточным условием для существования в графе $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ гамильтоновой окружности, которая содержала бы все его ребра, параллельные оси X_k, являестя условие:*

$$(**) \qquad \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Доказательство. Достаточность условия (**) очевидна непосредственно из доказательства теоремы 1. Теперь докажем, что это условие является также необходимым. Пусть ξ_k – единственное четное число из чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Предположим, наоборот, что существует гамильтонова окружность K_* графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, содержащая все его ребра, параллельные оси X_k. Произвольная вершина x первого слоя в направлении оси X_k инцидентна одному и только одному ребру, параллельному оси X_k. Это ребро принадлежит K_*. Второе ребро из K_*, с которым инцидентна вершина x, должно принадлежать первому слою графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в направлении оси X_k. Это означает, что множество ребер из K_*, принадлежащих к этому слою, образует множество ребер некоторого линейного фактора этого слоя. А это противоречие, так как число вершин рассматриваемого слоя равно

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \xi_i$$

что, согласно предположению, является нечетным числом, а в графе с нечетным числом вершин не может существовать линейный фактор. Из приведенного очевидна справедливость теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – все целые нечетные числа > 1, и пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная вершина решетчатого графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.*

Обозначим символом $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ граф, который получится из графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ после удаления из него вершины x и всех инцидентных с ней ребер. В графе $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ существует гамильтонова окружность тогда и только тогда, когда выполнено следующее:

$$(***) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv n \pmod 2 . \quad ^{1})$$

Доказательство. Сначала докажем, что условие (***) необходимо. Согласно лемме 1, граф $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – четный. Множество вершин этого графа разобьем на классы V^*, V^0 так: вершина $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежит классу V^* тогда и только тогда, когда:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \equiv n \pmod 2$$

Произвольное ребро графа соединяет тогда некоторую вершину из V^* с вершиной, не принадлежащей к V^* (а, значит, принадлежащей к V^0). Очевидно, подграф $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ четного графа $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ также является четным. Пусть p^* (соотв. p^0) – число вершин множества V^* (соотв. V^0). Очевидно, $p^* = p^0 + 1$. Значит, если вершина x не принадлежит к V^*, то в графе $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ число вершин, принадлежащих к V^*, на два больше, чем число вершин из V^0. Из этого сразу же вытекает, что если $x \in V^0$, то гамильтонова окружность графа $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ не существует (ибо вершины указанных классов при прохождении по окружности чередуются, значит, их число должно быть равным). Поэтому условие (***) необходимо.

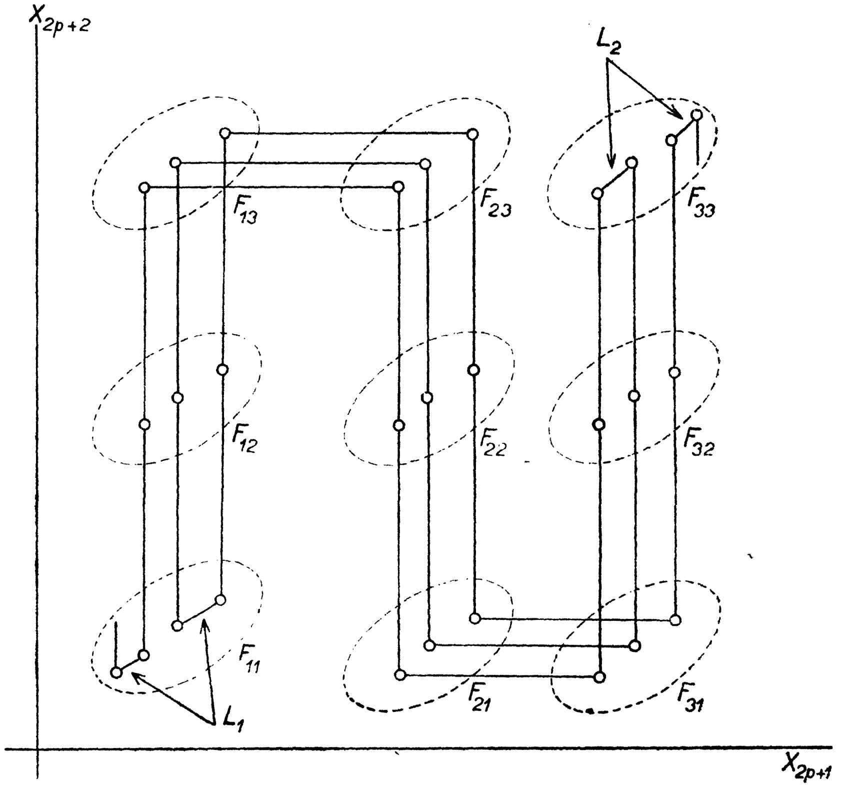
Теперь докажем, что условие (***) является достаточным. Доказательство разделим на четыре части.

A. Докажем, что теорема имеет место для всякого графа $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, в котором n – четное число, $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$, и для координат вершины x справедливо $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$. Очевидно, имеет место: граф $G_x(3, 3)$, где $x_1 = x_2 = 2$, есть одна окружность.

Предположим, что теорема справедлива для всех графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$ и где n – произвольное четное число $\leqq 2p$; $n \geqq 2$ (p – некоторое натуральное число), если для координат вершины x справедливо: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$. Докажем, что в таком случае теорема имеет место также для графа $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = F$, в котором $n = 2p + 2$; $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$; $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$.

[1]) Аренс в [9], стр. 364, исследует (на шахматной доске) случай $n = 2$; $\xi_1 \xi_2 \equiv 1 \pmod 2$. Он показывает, что при определенном выборе вершины x существует гамильтонова окружность в графе $G_x(\xi_1, \xi_2)$. Однако, он оставляет и для частного случая $n = 2$ открытым ворпос о необходимом и достаточном условии для существования гамильтоновой окружности в $G_x(\xi_1, \xi_2)$.

Обозначим через F_{ij} (где $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) подграф графа F, который содержит все вершины (и только вершины), принадлежащие i-тому слою в направлении оси X_{2p+1} и в то же время j-тому слою в направлении оси X_{2p+2}, кроме вершины $(2, 2, \ldots, 2, i, j)$, и который содержит все ребра из F, соединяющее эти вершины. Подграф F_{ij} изоморфен графу $G_\Delta = G_y(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_{2p})$, где $y = (2, 2, \ldots, 2)$; $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{2p} = 3$. Согласно предположению,



Рыс. 2.

в графе G_Δ существует гамильтонова окружность; обозначим ее через K_Δ. Окружность K_Δ имеет четное число вершин, значит, ее можно разбить на два линейных фактора L'_Δ, L''_Δ. Найдем линейный фактор L_1 графа F_{11} и линейный фактор L_2 графа F_{33} следующим образом:

(α) ребро из F_{11}, соединяющее вершину $u = (u_1, \ldots, u_{2p}, 1, 1)$ с вершиной $v = (v_1, \ldots, v_{2p}, 1, 1)$, принадлежит к L_1 тогда и только тогда, когда ребро из G_Δ, соединяющее вершины $(u_1, \ldots, u_{2p})$, $(v_1, \ldots, v_{2p})$, принадлежит к L'_Δ;

(β) ребро из F_{33}, соединяющее вершины $(w_1, \ldots, w_{2p}, 3, 3)$, $(t_1, \ldots, t_{2p}, 3, 3)$, принадлежит к L_2 тогда и только тогда, когда ребро из G_Δ, соединяющее вершины $(w_1, \ldots, w_{2p})$, $(t_1, \ldots, t_{2p})$, принадлежит к L''_Δ.

Образуем подграф E графа F таким образом: E содержит:

(1) все вершины из подграфа F_{ij}, где $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$ и только эти вершины;

(2) все ребра из L_1 и L_2;

(3) все ребра из F, которые инцидентны вершинам из E и параллельны оси X_{2p+2};

(4) все ребра из F, соединяющие вершину из F_{21} с вершиной из F_{31}, а также все ребра, соединяющие вершину из F_{13} с вершиной из F_{23}.

Граф E является, очевидно, такой окружностью графа F (см. рис. 2), которая содержит все вершины из F, за исключением следующих:

$$(2, \ldots, 2, 1, 1), (2, \ldots, 2, 1, 2), (2, \ldots, 2, 1, 3), (2, \ldots, 2, 2, 1), (2, \ldots, 2, 2, 3),$$
$$(2, \ldots, 2, 3, 1), (2, \ldots, 2, 3, 2), (2, \ldots, 2, 3, 3).$$

Однако, в графе F существует одна и только одна окружность – обозначим ее через Q, содержащая все указанные вершины и только эти вершины (см. рис. 3).

Граф E содержит, очевидно, ребро с концами $(2, 2, \ldots, 2, 1, 1, 1)$, $(2, 2, \ldots, \ldots, 2, 1, 1, 2)$, близкое ребру с концами $(2, 2, \ldots, 2, 2, 1, 1)$, $(2, 2, \ldots, 2, 2, 1, 2)$, принадлежащему к Q. Поскольку $E \cup Q$ – квадратичный фактор графа $F = G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p+2})$, то мы можем построить гамильтонову окружность согласно лемме 2. Тем самым доказательство нашего утверждения, а также всей части А (так как для $n = 2$ теорема справедлива) проведено.

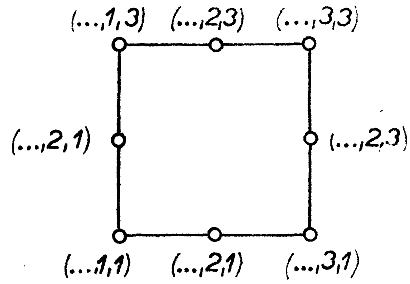


Рис. 3.

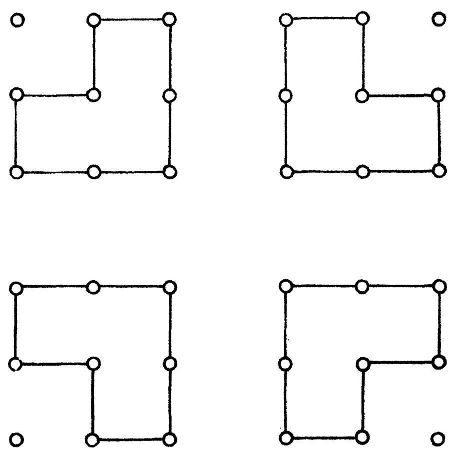


Рис. 4.

Б. Докажем, что теорема справедлива для всех таких графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$ и где n – произвольное натуральное число > 1.

Из рис. 4 ясно, что теорема справедлива и для такого $G_x(3, 3)$, где x_1, x_2 – нечетные числа (случай $x_1 = x_2 = 2$ мы рассмотрели в части А). В силу условия $x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod 2$ мы уже рассмотрели все случаи графов $G_x(3, 3)$.

Теперь предположим, что теорема справедлива для всех графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_n)$, в которых $n \leqq q$ (q – некоторое целое число) $n > 1$ и в которых $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$. Пусть $D = G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{q+1})$ – произвольный граф, в котором $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{q+1} = 3$ и в котором выполняется условие (***), т. е. имеет место:

$$\sum_{i=1}^{q+1} x_i \equiv q + 1 \pmod 2 .$$

Случай, когда все x_i – четные числа, включен в часть А. Поэтому достаточно ограничиться в дальнейшем случаями, когда по крайней мере одно из чисел x_i нечетное. В силу названного уже изоморфизма можно, не ограничивая общности, предполагать, что число x_{q+1} – нечетное. Обозначим символом D_1 и D_3 подграф соответственно первого и третьего слоя графа D в направлении оси X_{q+1}, который получится удалением из слоя, соответственно, вершин $(x_1, \ldots, x_q, 1)$ и $(x_1, \ldots, x_q, 3)$ и ребер, инцидентных с этими вершинами.

Граф D_1 (а также граф D_3) изоморфен графу $G_y(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$, где $y = (x_1, \ldots, x_q)$; $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_q = 3$, причем:

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \equiv q \pmod 2 ,$$

поскольку x_{q+1} – нечетное число. Согласно предположению, в графе $G_y(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_q)$ а, значит, также в графе D_1, существует гамильтонова окружность; обозначим ее через K_1. В силу того, что число вершин в D_1, а, следовательно, и в K_1 равно $3^q - 1$ (т. е. число четное), окружность K_1 можно разбить на два линейных фактора; обозначим их через L_0, L_1. Дальше, обозначим через L_3 линейный фактор графа D_3, который построен следующим образом: ребро из D_3, соединяющее вершины $(a_1, \ldots, a_q, 3)$, $(b_1, \ldots, b_q, 3)$, принадлежит к L_3 тогда и только тогда, когда ребро из D_1, соединяющее вершины $(a_1, \ldots, a_q, 1)$, $(b_1, \ldots, b_q, 1)$, принадлежит к L_0.

Образуем подграф C графа D так: C содержит: (1) все вершины графа D; (2) все ребра из D, которые параллельны оси X_{q+1}; (3) все ребра из графов L_1, L_3. Непосредственно из построения графа ясно, что в C имеются две компоненты. Одной из них является окружность, содержащая все вершины из $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_{q+1})$, кроме вершин $(x_1, \ldots, x_q, 1)$, $(x_1, \ldots, x_q, 2)$, $(x_1, \ldots, x_q, 3)$. Вторая компонента содержит единственное ребро (параллельное оси X_{q+1}), соединяющее вершину $(x_1, \ldots, x_q, 2)$ с вершиной $(x_1, \ldots, x_q, i)$, где $i \in \{1, 3\}$. Обозначим это ребро через g. Так как C содержит также все остальные, параллельные оси X_{q+1} ребра, необходимо существует ребро h, близкое ребру g. Образуем из графа C граф K таким образом: удалим из C ребро h и добавим оба поперечника близких ребер g, h. Граф K является, очевидно, гамильтоновой окружностью графа D (см. рис. 5).

Следовательно, если теорема справедлива для всех таких графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_n)$, где $n \leqq q$ и где $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_q = 3$, то она справедлива и для $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{q+1})$, где снова $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{q+1} = 3$. Из справедливости теоремы для $n = 2$ вытекает затем ее справедливость для всех $n \geqq 2$.

B. Докажем: если наша теорема имеет место для всякого графа $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_n)$, где $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – n фиксированных нечетных чисел, бо́льших единицы, то она справедлива и для всякого графа $G_x(\xi_1 + 2, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Пусть $G_0 = G_x(\xi_1 + 2, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – произвольный граф, в котором выполняется условие (***).

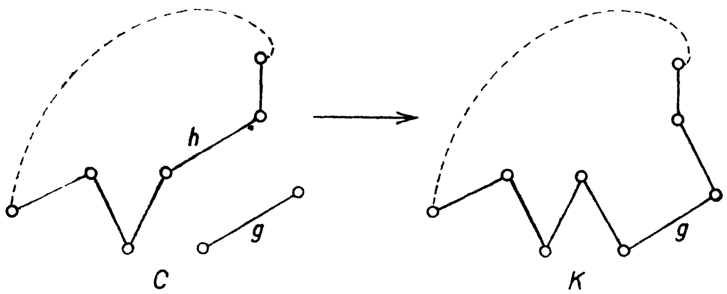


Рис. 5.

Учитывая существование изоморфизмов, мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что $x_1 \leqq \xi_1$. Если удалить из графа G_0 все те ребра, и только те ребра, которые соединяют некоторую вершину из ξ_1-ого слоя с вершиной из $(\xi_1 + 1)$-ого слоя в направлении оси X_1 (все эти ребра параллельны оси X_1), то граф G_0 распадется на две компоненты G_1, G_2, причем граф G_1 совпадает с графом $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а граф G_2 изоморфен графу $G(2, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Согласно предположению, в G_1 существует гамильтонова окружность (обозначим ее через K_1) и, согласно теореме 2, в графе G_2 существует гамильтонова окружность, содержащая все ребра из G_2, параллельные оси X_i, для всякого $i = 2, 3, \ldots, n$. Утверждается: две вершины, принадлежащие ξ_1-ому слою графа G_1 в направлении оси X_1 соединены хотя бы одним ребром из K_1. Докажем это. Пусть $a = (\xi_1, a_2, \ldots, a_n)$ – произвольная вершина рассматриваемого слоя. Вершина a инцидентна двум и только двум ребрам окружности K_1. По крайней мере одно из этих ребер параллельно оси, отличной от оси X_1. Это ребро (обозначим его через e) соединяет вершину a с некоторой вершиной $b = (\xi_1, b_2, \ldots, b_n)$, также принадлежащей ξ_1-ому слою графа в направлении оси X_1. Это и доказывает наше утверждение.

Пусть ребро e паралелльно оси $X_i (i \neq 1)$. В графе G_2 существует гамильтонова окружность K_i содержащая все ребра из G_2, параллельные оси X_i. Из этого следует, что ребро e', соединяющее вершину $a' = (\xi_1 + 1, a_2, \ldots, a_n)$ с вершиной $b' = (\xi_1 + 1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит к K_i, и что оно является близким ребру e из гамильтоновой окружности K_1. Если, в соответствии с леммой 2, в графе $K_1 \cup K_i$ близкие ребра e, e' заменим их поперечниками, то получится гамильтонова окружность графа G_0. Часть В доказательства закончена.

Г. Теперь уже легко закончим доказательство теоремы: пусть n — произвольное целое число > 1. Согласно части В, наша теорема имеет место для всех графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 3$. Отсюда, согласно части В, вытекает, что теорема справедлива для $\xi_1 = 3, 5, 7, \ldots$, если $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 3$. Ввиду того, что форма графа не зависит от порядка нумерации отдельных осей координат, то из указанного в части В вытекает, что теорема справедлива для всех графов $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1 = 3, 5, 7, \ldots$; $\xi_2 = 3, 5, 7, \ldots$; $\ldots$; $\xi_n = 3, 5, 7, \ldots$, а, значит, и для всех совокупностей n нечетных чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, бóльших единицы. Это и доказывает теорему.

В заключение я приведу некоторые смежные результаты.

А. Гамильтоновым окружностям для случая $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 2$ посвящено много работ, в частности, в связи с теорией кодирования и решением релейных цепей, напр., [1], [2], [3]. Возможно, что нами обсуждаемые более общие случаи могут иметь для теории кодирования некоторое значение.

Б. Случай $n = 2$ изучался в работе [4]. Однако, вместо гамильтоновых окружностей в этой работе изучались так называемые максимальные пути.

В. В работе [5] разбирался бесконечный n-мерный решетчатый граф L^n (вершинами которого являются обобщенные точки решетки в пространстве E_n; две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда их расстояние равно единице). Здесь доказано, что L^n можно разбить на n (бесконечных) гамильтоновых линий (термин гамильтонова окружность в бесконечном случае является менее удобным).

Г. Не мало внимания уделяли математики и шахматисты задаче о шахматном коне, который обязан пройти через все поля шахматной доцки, на каждом поле остановится один и только один раз, и вернуться в исходное поле. Не трудно установить, что наши теоремы 1 и 2 дают решение аналогичной задачи для ладьи, и не только для плоской ($n = 2$), но и для n-мерной доски (определение движения ладьи на n-мерной доске дано в [6]). Теорема 3 может при этом интерпретироваться как решение данной задачи для n-мерной шахматной доски, у которой вырезано одно поле. Заметим, что решению другой задачи, о движении ладьи по доске при помощи теории графов, посвящена работа [7].

Литература

[1] *Gilbert E. N.:* Gray Codes and Paths on the n-Cube, The Bell System Technical Journal *37* (1958), 3, 815—826.

[2] *Klír J.:* Obousměrné reléové řetězy, Slaboproudý obzor *20* (1959), 6, 367—371.

3] *Клир И.: Сейдл Л.*, Коды для релейных цепей совпадения, Stroje na zpracování informací, Sborník VII, 1959, 21—35.
[4] *Miller R. E.: Selfridge J. L.*, Maximal paths on rectangular boards, IBM J. Res. Develop. *4* (1960), 479—586.
[5] *Nash-Williams C. St. I. A.:* Decomposition of the n-dimensional lattice graph into Hamiltonian lines, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), *12* (1960/61), 123—131.
[6] *Formánek B.:* Šach a priestor, Šachový bulletin, *4—5* (1960), 58—66.
[7] *Koman M.:* Úloha o šachovnici a její zobecnění v teorii grafů, Časopis pro pěst. mat. *86* (1961), 344—351.
[8] *Kotzig A.:* Linear factors in lattice graphs, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 104—133.
[9] *Ahrens W.:* Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig, 1918.

Výťah

HAMILTONOVSKÉ KRUŽNICE V MREŽOVÝCH GRAFOCH

ANTON KOTZIG, Bratislava

Nech $n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sú čísla celé > 1. Pod mrežovým grafom $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ rozumie sa graf takto definovaný: množinu jeho vrcholov tvoria všetky tie body n-rozmerného euklidovho priestoru E_n, ktorých súradnice sú čísla prirodzené a i-tá súradnica $\leqq \xi_i$ (kde $i = 1, 2, \ldots, n$); dva body (= vrcholy) sú v grafe $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ spojené hranou práve vtedy, keď ich vzdialenosť je 1. V práci sa dokazujú tieto tri vety:

Veta 1. *V mrežovom grafe $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ existuje hamiltonovská kružnica práve vtedy, keď platí:*

$$(*)\qquad \prod_{i=1}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Veta 2. *Nech $n > 2$ a nech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre existenciu takej hamiltonovskej kružnice v mrežovom grafe $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_n)$, ktorá obsahuje všetky jeho hrany rovnobežné s osou X_k je táto podmienka:*

$$(**)\qquad \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Veta 3. *Nech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sú všetko celé nepárne čísla > 1 a nech $x = (x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ je ľubovoľný vrchol mrežového grafu $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Označme symbolom $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ graf, ktorý dostaneme z grafu $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, ak z neho odstránime vrchol x a hrany s ním incidentné. V grafe $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ existuje hamiltonovská kružnica práve vtedy, keď platí:*

$$(***)\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv n \pmod 2 .$$

Summary

HAMILTONIAN CIRCUITS IN LATTICE GRAPHS

ANTON KOTZIG, Bratislava

Let $n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be integers > 1. By a lattice graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ we mean the graph defined thus: the set of its vertices is formed by all the points of the n-dimensional Euclidean space E_n whose all coordinates are natural numbers and the i-th coordinate $\leqq \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; two points (= vertices) are in the graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ joined by an edge if and only if their distance is 1. In the paper the following theorems are proved:

Theorem 1. *In the lattice graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ there exist a Hamiltonian circuit if and only if*

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Theorem 2. *Let $n > 2$ and $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. The following condition is necessary and sufficient for the existence of the Hamiltonian circuit that contains all edges of the lattice graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ parallel with the coordinate axis X_k:*

$$(**) \qquad \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \xi_i \equiv 0 \pmod 2 .$$

Theorem 3. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be odd integers > 1 and let $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be an arbitrary vertex of the lattice graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Denote by the symbol $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ the graph which arises from the graph $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ if we delete from it the vertex x and the edges incident at x. In the graph $G_x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ there exists a Hamiltonian circuit if and only if*

$$(***) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv n \pmod 2 .$$