Časopis pro pěstování matematiky

Ivo Marek

O existenci a přibližném sestrojování charakteristických hodnot cyklických soustav operátorových rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 4, 449--465

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117521`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O EXISTENCI A PŘIBLIŽNÉM SESTROJOVÁNÍ CHARAKTERISTICKÝCH HODNOT CYKLICKÝCH SOUSTAV OPERÁTOROVÝCH ROVNIC

IVO MAREK, Praha

(Došlo dne 30. listopadu 1963)

Věnováno profesoru dr. JANU POTOČKOVI *k jeho šedesátým narozeninám*

Vyšetřuji se soustavy cyklických operátorových rovnic v Banachově prostoru. Jsou uvedeny některé postačující podmínky pro existenci charakteristických hodnot a vlastních vektorů zmíněných systémů rovnic. K přibližnému sestrojování vlastních prvků cyklických soustav je navržena iterační metoda a dokázána její konvergence. Zvláštní pozornost je věnována $\mathscr{K}$-kladným cyklickým soustavám.

1. Cyklické operátory a operátory Radona-Nikolského. V této práci ukážeme, že pro některé cyklické soustavy operátorových rovnic lze k sestrojování vlastních hodnot a vlastních vektorů upraviti známou Kelloggovu metodu tak, že vyšetřování vlastností zaručujících konvergenci se redukuje na vyšetřování spektrálních vlastností operátoru operujícího v jedné komponentě kartézského součinu $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_m$ kde $\mathscr{X}_j$ je nějaký komplexní Banachův prostor.

Normu v prostoru $\mathscr{X}$ budeme označovati symbolem $\|.\|$, zatím co normy ve složkách $\mathscr{X}_j$, $j = 1, \ldots, m$ budeme značiti symboly $\|.\|_j$:

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|_j\,, \quad x \in \mathscr{X}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m)\,, \quad x_j \in \mathscr{X}_j\,. \tag{1.1}$$

Symbolem C_{jk} označujeme lineární, obecně neohraničený, operátor zobrazující definiční obor $\mathscr{D}(C_{jk}) \subset \mathscr{X}_k$ do $\mathscr{X}_j$. Oblast hodnot operátoru C_{jk} označujeme symbolem $\mathscr{R}(C_{jk})$.

Definice. Lineární uzavřený operátor C zobrazující $\mathscr{D}(C) \subset X$ do $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_m$ se nazývá cyklickým, jestliže se při vhodném uspořádání komponent $\mathscr{X}_j$ dá vyjádřiti ve tvaru

$$C = \begin{pmatrix} 0, & \ldots, & 0, & \tilde{C}_{1m} \\ \tilde{C}_{21}, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \ldots, & \tilde{C}_{mm}, & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

kde $\tilde{C}_{jk} = C_{st}$, $s = p_j$, $t = q_k$, $1 \leqq s, t \leqq m$.

Pro naše účely je vhodné předpokládati, že komponenty $\mathcal{X}_j$, $j = 1, \ldots, m$, prostoru $\mathcal{X}$ jsou již uspořádány tak, aby operátor C sám už měl tvar (1.2).

Buď $[\mathcal{X}_j]$ resp. $[\mathcal{X}]$ Banachův prostor lineárních ohraničených zobrazení prostoru $\mathcal{X}_j$ resp. $\mathcal{X}$ do sebe s normou

$$\|T_j\|_j = \sup_{\|x_j\|_j = 1} \|T_j x_j\|_j , \tag{1.3}$$

resp.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\| . \tag{1.4}$$

Předpokládejme, že lineární operátor L_j zobrazující definiční obor $\mathcal{D}(L_j) \subset \mathcal{X}_j$ do $\mathcal{X}_j$ je takový, že existuje operátor $(L_j - C_{jj})^{-1}$ a $(L_j - C_{jj})^{-1} \in [\mathcal{X}_j]$, při čemž C_{jj}, $j = 1, \ldots, m$, jsou lineární uzavřené operátory zobrazující $\mathcal{D}(C_{jj}) \subset X_j$ do $\mathcal{X}_j$.

Budeme se zabývati sestrojováním řešení soustav rovnic

$$L_j u_j = C_{jj} u_j + \lambda \sum_{k=1}^{m} C_{jk} u_k + v_j , \tag{1.5a}$$

$$L_j u_j = C_{jj} u_j + \lambda \sum_{k=1}^{m} C_{jk} u_k , \quad j = 1, \ldots, m , \tag{1.5b}$$

kde $v = (v_1, \ldots, v_m)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ a λ je komplexní parametr.

Uvedeme některé postačující podmínky pro to, aby homogenní soustava (1.5b) měla charakteristické číslo a nutné a postačující podmínky pro existenci řešení nehomogenní soustavy (1.5a). Pro přibližné sestrojování některých ze zmíněných řešení uvedeme iterační metody a dokážeme jejich konvergenci.

Jak jsme se již zmínili, budeme podmínky řešitelnosti formulovati pro určité operátory operující v jednotlivých komponentách $\mathcal{X}_j$ kartézského součinu $\mathcal{X}$. Obvykle se tyto podmínky formulují pro operátory operující v celém prostoru $\mathcal{X}$ (srovnej [8]–[10]).

Nechť $\mathcal{Z}$ označuje nějaký Banachův prostor, $\mathcal{Z}'$ příslušný prostor spojitých lineárních forem na $\mathcal{Z}$ a $[\mathcal{Z}]$, $[\mathcal{Z}']$ prostory lineárních ohraničených zobrazení prostorů $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ do sebe. Je-li $T \in [\mathcal{Z}]$, pak T' značí adjungovaný k T operátor. Je-li T lineární uzavřený operátor zobrazující $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{Z}$ do $\mathcal{Z}$ a λ_0 je isolovaným bodem spektra $\sigma(T)$, pak resolventu $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ lze rozvinouti v okolí λ_0 v Laurentovu řadu ([13] str. 305)

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k T_k + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-k} B_k , \tag{1.6}$$

kde $T_k \in [\mathcal{Z}]$ pro $k = 0, 1, \ldots$,

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} R(\lambda, T)\, d\lambda , \quad B_{k+1} = (T - \lambda_0 I)\, B_k , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

a C_0 je hranice kruhu K_0 se středem v bodě λ_0, pro nějž $\bar{K}_0 \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$ ($\bar{K}_0$ značí uzávěr K_0).

Je-li A uzavřený lineární operátor zobrazující $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$ do $\mathcal{X}$, pak $\mathcal{N}(A)$ značí množinu všech $x \in \mathcal{D}(A)$ takových, že $Ax = 0$ a $\mathcal{R}(A)$ množinu všech $y \in \mathcal{X}$ takových, že existuje $x \in \mathcal{D}(A)$ takový, že $y = Ax$.

Zřejmě $\mathcal{N}(T_0) \subset \mathcal{R}(B_1)$, kde $T_0 = \lambda_0 I - T$ a B_1 je definován v (1.7). Buď $\mathfrak{A}_\infty(T)$ ([13] str. 292) množina funkcí f analytických na oblastech-komponentách, jež obsahují spektrum $\sigma(T)$ uzavřeného lineárního operátoru T zobrazujícího $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X}$ do $\mathcal{X}$ takových, že doplněk definičního oboru $\Delta(f)$ funkce f je kompaktní, $f(\lambda)$ je ohraničená v okolí bodu ∞ a $f(\lambda)$ má derivaci na $\Delta(f)$.

Definice. Operátor $T \in [\mathcal{X}]$ se nazývá operátorem Radona-Nikolského, dá-li se vyjádřiti ve tvaru $T = U + V$, kde $V \in [\mathcal{X}]$, operátor $U \in [\mathcal{X}]$ je kompaktní a pro spektrální poloměry $r(V)$, $r(T)$ platí $r(V) < r(T)$.

Podmínky řešitelnosti soustav (1.5) obdržíme pomocí následujícího tvrzení.

Věta A. *Nechť lineární uzavřený operátor T zobrazuje $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X}$ do $\mathcal{X}$ a nechť existuje $f \in \mathfrak{A}_\infty(T)$ taková, že $f(T) = U + V$ je operátor Radona-Nikolského. Potom platí:*

(a) *Je-li $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $|f(\lambda_0)| > r(V)$, pak λ_0 je pólem resolventy $\mathcal{P}(\lambda, T)$, takže existuje p, $1 \leqq p < +\infty$ tak, že v rozvoji (1.6) pro $R(\lambda, T)$ je $B_p \neq \Theta$, $B_{p+1} = \Theta$ (Θ – značí nulový operátor v $[\mathcal{X}]$).*

(b) *Podprostor $\mathcal{R}(B_1)$ má konečnou dimensi a platí $\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{N}(T_0^p)$.*

Je-li $T \in [\mathcal{X}]$, pak

(c) *k $f(T)$ adjungovaný operátor $[f(T)]'$ je též operátorem Radona-Nikolského a platí $[f(T)]' = f(T')$,*

(d) *pro $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $|f(\lambda_0)| > r(V)$, platí*

$$\mathcal{R}(T_0^p) = {}^0\{\mathcal{N}(T_0'^p)\}, \tag{1.8}$$

kde ${}^0\{\mathcal{N}(T_0'^p)\}$ označuje množinu těch $v \in \mathcal{X}$, pro něž $u'(v) = 0$ pro každou formu $u' \in \mathcal{N}(T_0'^p) \subset \mathcal{X}'$.

Důkaz. (a), (b). Buď $S = f(T)$, $\mu_0 = f(\lambda_0)$. Podle [13], věta 5.71-A, str. 302, $\mu_0 \in \sigma(S)$. Nechť $\sigma = \sigma_e(T) \cap \{f^{-1}(\mu_0)\}$, kde $\{f^{-1}(\mu_0)\}$ označuje množinu všech komplexních čísel λ, pro něž $f(\lambda) = \mu_0$ a kde $\sigma_e(T)$ označuje rozšířené spektrum operátoru T ([13] str. 298). Protože S je operátorem Radona-Nikolského, je μ_0 isolovaný bod spektra $\sigma(S)$ a $\{\mu_0\}$ je spektrální množina operátoru S. Podle [13], věta 5.71-D, str. 304 je projektor odpovídající spektrální množině σ roven $E_\sigma(T) = (1/2\pi i) \int_C R(\lambda, T) \, d\lambda$, kde C je hranicí Cauchyovy oblasti D ([13], str. 288), obsahující množinu σ a nemající se spektrem $\sigma(T)$ jiné společné body kromě bodů ze σ. Nechť $\mathcal{X}_\sigma = \mathcal{R}(E_\sigma)$ je obor hodnot operátoru $E_\sigma(T)$. Buď S_0 zúžení operátoru S na $\mathcal{X}_\sigma : S_0 = U_0 + V_0$. Podle [13] věta 5.7-B, str. 299 je $\sigma(S_0) = \{\mu_0\}$, takže

$r(S_0) = |\mu_0| > r(V)$. Pro spektrální poloměr zúžení V_0 operátoru V na $\mathscr{X}_\sigma$ platí nerovnost $r(V_0) \leqq r(V)$, takže S_0 je též operátorem Radona-Nikolského. Pro dostatečně velká $|\lambda|$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha isolovaných bodů platí vyjádření

$$R(\lambda, S_0) = (\lambda I - S_0)^{-1} = [I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1}\, R(\lambda, V_0)\,.$$

Nechť C_0 je kružnice se středem v bodě μ_0 s poloměrem takovým, že C_0 leží v oblasti $|\lambda| > r(V)$ a uvnitř C_0 ani na C_0 neleží kromě μ_0 žádné jiné body spektra $\sigma(S)$. Operátor-funkce $[I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1}$ existuje a je analytická v každém bodě $\lambda \in C_0$. Pro λ, pro něž je $|\lambda|$ dostatečně velké, platí vyjádření

$$[I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1} = I + R(\lambda, V_0)\, U_0[I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1}\,.$$

Pomocí analytického pokračování docílíme toho, aby toto vyjádření platilo na C_0. Obdržíme tak

$$R(\lambda, S_0) = R(\lambda, V_0) + R(\lambda, V_0)\, U_0[I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1}\, R(\lambda, V_0)\,.$$

Protože $R(\lambda, V_0)$ je analytická na C_0, a protože $E_\sigma(T) = E[\mu_0, S_0]$ platí dále

$$(1.9) \qquad E[\mu_0, S_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} R(\lambda, S_0)\, \mathrm{d}\lambda = $$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} R(\lambda, V_0)\, U_0[I - R(\lambda, V_0)\, U_0]^{-1}\, R(\lambda, V_0)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Podle předpokladu U_0 je kompaktní operátor, takže integrand v (1.9) je kompaktní pro všechna $\lambda \in C_0$. Jakožto stejnoměrná limita posloupnosti kompaktních operátorů — Riemannových součtů — je $E[\mu_0, S_0]$ kompaktním operátorem. Tedy prostor $\mathscr{X}_\sigma$ musí mít konečnou dimensi, neboť $E[\mu_0, S_0]$ je v $\mathscr{X}_\sigma$ jednotkovým operátorem.

Buď T_1 zúžení operátoru T na $\mathscr{X}_\sigma$. Podle [13] věta 5.7-B, str. 299, $\sigma_e(T_1) = \sigma$. Množina $\sigma_e(T_1)$ nemůže být zřejmě celá komplexní rovina, neboť $\sigma_e(T_1) \subset \sigma_e(T)$ a resolventní množina $\varrho(T)$ není prázdná. Odtud plyne, že $\mathscr{X}_\sigma \subset \mathscr{D}(T)$, neboť jinak by obor hodnot operátoru $\lambda I - T_1$ nemohl být pro žádné λ celý podprostor $\mathscr{X}_\sigma$, ale tomu tak není. Jest proto $T_1 \in [\mathscr{X}_\sigma]$, takže $\sigma(T_1)$ je konečná množina. Protože $\lambda_0 \in \sigma$, musí být λ_0 isolovaným bodem spektra operátoru T. Podle [1] důsledku VII.3.21, str. 615 $E_\sigma(T) = B_1 + P$, $B_1 P = P B_1 = \Theta$, kde Θ značí nulový operátor, P projektor odpovídající spektrální množině $\sigma - \{\lambda_0\}$ a B_1 je definováno Laurentovým rozvojem (1.6) a (1.7). Protože $\mathscr{R}(B_1) \subset \mathscr{X}_\sigma$, $\mathscr{R}(B_1)$ má konečnou dimensi. Zúžení operátoru T na $\mathscr{R}(B_1)$ má tu vlastnost, že λ_0 je pólem resolventy tohoto zúžení a samo toto zúžení je v pevné basi podprostoru $\mathscr{R}(B_1)$ určeno nějakou čtvercovou maticí. Odtud vyplývá, že λ_0 je pólem resolventy $R(\lambda, T)$, neboť bod λ_0 je regulárním bodem resolventy zúžení operátoru T na podprostor $\mathscr{R}(I - B_1)$. Je-li p řád pólu λ_0

resolventy $R(\lambda, T)$, pak podle [13] věta 5.8-A str. 306

$$\mathscr{X} = \mathscr{N}(T_0^p) \oplus \mathscr{R}(T_0^p) \tag{1.10}$$

a $\mathscr{N}(T_0^p) = \mathscr{R}(B_1)$, $\mathscr{R}(T_0^p) = \mathscr{R}(I - B_1)$.

(c) Nechť $T \in [\mathscr{X}]$, takže existuje T' a platí $\sigma(T) = \sigma(T')$. To, že $[f(T)]'$ je též operátor Radona-Nikolského, je-li jím operátor $f(T)$ je důsledkem toho, že pro libovolný operátor $A \in [\mathscr{X}]$ platí $\sigma(A') = \sigma(A)$. Rovnost $[f(T)]' = f(T')$ je dokázána v [1] VII.3.10 str. 608.

(d) Podle (1.10) $\mathscr{R}(T_0^p)$ je uzavřený podprostor v $\mathscr{X}$ a platnost (1.8) plyne z [13] věta 4.6-D str. 226.

2. Charakteristické hodnoty cyklických soustav. V následujícím buďte

$$T_j = (L_j - C_{jj})^{-1} C_{j,j-1} \dots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \dots \dots (L_{j+1} - C_{j+1,j+1}) C_{j+1,j}, \tag{2.1}$$

$j = 1, \dots, m$, operátory zobrazující $\mathscr{D}(C_{j+1,j})$ do $\mathscr{X}_j$, při čemž L_j, C_{jk} jsou lineární uzavřené operátory zobrazující $\mathscr{D}(L_j)$, $\mathscr{D}(C_{jj})$ do $\mathscr{X}_j$ a takové, že $(L_j - C_{jj})^{-1} \in [\mathscr{X}_j]$ pro $j = 1, \dots, m$.

Lemma 1. *Předpokládejme, že existuje index s, $1 \leqq s \leqq m$ tak, že operátor T_s má vlastní hodnotu $\mu_0 \neq 0$ a že x_{0s} je příslušný vlastní vektor. Potom je μ_0 vlastní hodnotou všech operátorů T_j, $j = 1, \dots, m$, existuje charakteristická hodnota λ_0 soustavy* (1.5b) *a platí*

$$\lambda_0^m = \frac{1}{\mu_0}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Pro $m = 1$ je tvrzení věty zřejmé. Nechť tedy $m > 1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládati, že μ_0 je vlastní hodnotou operátoru T_m. Tedy $T_m x_{0m} = \mu_0 x_{0m}$. Položme

$$y_m = x_{0m},\ y_1 = \lambda_0(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} y_m, \dots, \dots, y_{m-1} = \lambda_0(L_{m-1} - C_{m-1,m-1}) C_{m-1,m-2} y_{m-2}, \tag{2.3}$$

takže

$$y_m = \lambda_0(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} y_{m-1}, \tag{2.4}$$

kde λ_0 je některá m-tá odmocnina z μ_0^{-1}. Zřejmě platí $T_j y_j = \mu_0 y_j$, $j = 1, \dots, m$. Současně je z (2.3) a (2.4) patrné, že

$$\begin{aligned}
(L_1 - C_{11}) y_1 &= \lambda_0 C_{1m} y_m, \\
(L_2 - C_{22}) y_2 &= \lambda_0 C_{21} y_1, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
(L_m - C_{mm}) y_m &= \lambda_0 C_{m,m-1} y_{m-1}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $y_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$ (0 značí nulový vektor v libovolném prostoru $\mathscr{X}_j$, $\mathscr{X}$), obdrželi jsme řešení homogenní soustavy (1.5b) příslušné charakteristické hodnotě λ_0 a pro tuto hodnotu platí (2.2). Protože x_{0m} byl libovolný vlastní vektor operátoru T_m příslušný vlastní hodnotě μ_0, dokázali jsme, že pro každý vlastní vektor x operátoru T_m je vektor $y = (y_1, \ldots, y_m)$, kde y_j, $j = 1, \ldots, m$, jsou definovány pomocí (2.3), vlastním vektorem soustavy (1.5b), při čemž každý vektor y_j z (2.3) je vlastním vektorem operátoru T_j, příslušným vlastní hodnotě μ_0.

Je zřejmé jak prováděti indukci a proto její provedení vynecháme. Poznamenejme pouze, že stačí uvažovati na příklad místo m – rozměrné matice (C_{jk}), $1 \leqq j$, $k \leqq m$, $(m - 1)$ – rozměrnou matici (D_{jk}) definovanou vztahy

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} D_{2m} &= C_{21}(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}, \\ D_{jk} &= C_{jk} \quad \text{pro} \quad 2 \leqq k < j \leqq m. \end{aligned}$$

Poznámka. m-tá komponenta $\mathscr{X}_m$ kartézského součinu $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_m$ není nikterak preferována. Důkaz lemmatu 1 je obecně použitelný pro libovolné j, $j = 1, \ldots, m$.

Vzhledem k této poznámce budeme pro jednoduchost formulovati většinu tvrzení právě pro m-tou komponentu $\mathscr{X}_m$ součinu $\mathscr{X}$.

Věta 1. *Předpokládejme, že existuje index s, $1 \leqq s \leqq m$ a funkce $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_s)$ taková, že operátor $f(T_s) = U_s + V_s$ je operátorem Radona-Nikolského. Potom existuje alespoň jedna charakteristická hodnota λ_0 soustavy (1.5b) a jí příslušný vlastní podprostor $\mathfrak{N}$ má konečnou dimensi.*

Věta 1 je bezprostředním důsledkem věty **A** a lemmatu 1 a proto její důkaz nebudeme prováděti.

Věta 2. *Předpokládejme, že definovaný v (2.1) operátor $T_m \in [\mathscr{X}_m]$ a že existuje $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_m)$ taková, že $f(T_m) = U_m + V_m$ je operátor Radona-Nikolského. Buď $\lambda \neq 0$ komplexní číslo takové, že $|f(\lambda^{-m})| > r(V_m)$. Není-li $\mu = \lambda^{-m}$ regulárním bodem resolventy $R(\lambda, T_m) = (\lambda I_m - T_m)^{-1}$ (I_m – identický operátor v $[\mathscr{X}_m]$) pak předpokládejme, že λ^{-m} je jednoduchým pólem resolventy $R(\lambda, T_m)$. Za těchto předpokladů má soustava (1.5a) řešení právě když platí*

$$(2.6) \qquad u'_m(w_m(\lambda)) = 0$$

pro každou lineární formu $u'_m \in \mathscr{N}(T'_m) \subset \mathscr{X}'_m$ kde T'_m je operátor adjungovaný k operátoru T_m a

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} w_m(\lambda) = {} & \lambda^{m-1}(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 + \\ & + \lambda^{m-2}(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_2 - C_{22})^{-1} v_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \lambda(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1}(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} v_{m-1} + \\ & + (L_m - C_{mm})^{-1} v_m. \end{aligned}$$

Důkaz. Soustava (1.5a) je ekvivalentní se soustavou

$$
\begin{aligned}
(2.8) \qquad u_1 &= \lambda(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} u_m + (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 \\
u_2 &= \lambda^2 (L_2 - C_{22})^{-1} C_{21}(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} u_m + \\
&\quad + \lambda(L_2 - C_{22})^{-1} C_{21}(L_1\, b\, C_{11})^{-1} v_1 + (L_2 - C_{22})^{-1} v_2 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m &= \lambda^m (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} u_m + \\
&\quad + \lambda^{m-1}(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 + \\
&\quad + \ldots + (L_m - C_{mm})^{-1} v_m .
\end{aligned}
$$

Poslední rovnici soustavy (2.8) lze zapsati ve tvaru

$$
(2.9) \qquad u_m = \lambda^m T_m u_m + w_m(\lambda) .
$$

Tato rovnice má vzhledem k předpokladům věty podle tvrzení (b) věty **A** řešení právě když platí (2.6) pro každé řešení homogenní rovnice

$$
u'_m = \lambda^m T'_m u'_m .
$$

Tím je dokázána nutnost podmínky ve větě vyslovené.

Abychom dokázali její postačitelnost, předpokládejme, že u_m je řešení rovnice (2.9) a položme $z_m = u_m$, takže $z_m = \lambda^m T_m z_m + w_m(\lambda)$. Dále klademe

$$
\begin{aligned}
(2.10) \qquad z_1 &= \lambda(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} z_m + (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 , \\
z_2 &= \lambda(L_2 - C_{22})^{-1} C_{21} z_1 + (L_2 - C_{22})^{-1} v_2 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_{m-1} &= \lambda(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} z_{m-2} + (L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} v_{m-1} .
\end{aligned}
$$

Stačí potom dokázati, že

$$
(2.11) \qquad z_m = \lambda(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} z_{m-1} + (L_m - C_{mm})^{-1} v_m .
$$

Z (2.10) však snadno vyplývá, že

$$
\begin{aligned}
z_{m-1} &= \lambda^{m-1}(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} z_m + \\
&\quad + \lambda^{m-2}(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 + \\
&\quad + \ldots + (L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} v_{m-1} ,
\end{aligned}
$$

takže

$$
\begin{aligned}
z_m &= \lambda(L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1}[\lambda^{m-1}(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} \ldots \\
&\quad \ldots, (L_1 - C_{11})^{-1} C_m z_m + \\
&\quad + \lambda^{m-2}(L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} v_1 + \\
&\quad + \ldots + (L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} v_{m-1}] + (L_m - C_{mm})^{-1} v_m ,
\end{aligned}
$$

odkud ihned plyne platnost (2.11). Položíme-li posléze

$$u = (u_1, \dots, u_m), \quad u_j = z_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

obdržíme řešení soustavy (1.5a). Tím je věta 2 dokázána.

3. $\mathscr{K}$-kladné operátory. Ve fysikálních aplikacích se často setkáváme s operátory, jež jsou v jistém smyslu kladné. Pro takové operátory můžeme podati podrobnější charakteristiku jejich spekter a tedy též charakteristických hodnot soustav (1.5).

Buď $\mathscr{W}$ nějaký reálný Banachův prostor a $\mathscr{Z}$ jeho komplexní rozšíření, tj. prostor $\mathscr{Z}$ tvoří dvojice $z = (x, y)$, $x \in \mathscr{W}$, $y \in \mathscr{W}$ s normou

$$\|z\|_{\mathscr{Z}} = \sup_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} \|x \cos \vartheta + y \sin \vartheta\|_{\mathscr{W}},$$

kde $\|x\|_{\mathscr{W}}$ značí normu vektoru x v prostoru $\mathscr{W}$. Nadále budeme indexy u znaků norem vypouštěti, pakliže nebude moci dojít k nedorozumění. Symboly $\mathscr{W}'$, $\mathscr{Z}'$ označují prostory spojitých lineárních forem na $\mathscr{W}$, $\mathscr{Z}$ a $[\mathscr{W}]$, $[\mathscr{Z}]$ označují prostory spojitých lineárních zobrazení prostoru $\mathscr{W}$ resp. $\mathscr{Z}$ do sebe. Normy v prostorech $[\mathscr{W}]$, $[\mathscr{Z}]$ jsou definovány jako obvykle formulemi

$$\|A\|_{\mathscr{W}} = \sup_{\|x\|_{\mathscr{W}}=1} \|Ax\|_{\mathscr{W}}, \quad \|Tz\|_{\mathscr{Z}} = \sup_{\|z\|_{\mathscr{Z}}=1} \|Tz\|_{\mathscr{Z}}.$$

Buď $\mathscr{K} \subset \mathscr{W}$ vytvořující kužel nezáporných vektorů ([5]). Pomocí kužele $\mathscr{K}$ lze zavést do prostoru $\mathscr{W}$ částečné uspořádání. Definujeme pro $x \in \mathscr{W}$, $y \in \mathscr{W}$ $x \prec y$ resp. $y \succ x \Leftrightarrow y - x \in \mathscr{K}$. Operátor $T \in [\mathscr{W}]$ se nazývá $\mathscr{K}$-kladným, jestliže $Tx = y \in \mathscr{K}$ pro $x \in \mathscr{K}$. $\mathscr{K}$-kladný operátor T se nazývá u_0-kladným, jestliže existuje vektor $u_0 \in \mathscr{K}$ tak, že pro libovolný vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$, (0 značí nulový vektor), existuje přirozené číslo $p = p(x)$ a kladná čísla $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ tak, že platí

$$\alpha u_0 \prec T^p x \prec \beta u_0. \tag{3.1}$$

u_0-kladný operátor $T \in \mathscr{W}$ se nazývá silně u_0-kladným, jestliže pro libovolný vektor $x \in \mathscr{W}$ existuje přirozené číslo $p = p(x)$ a kladné číslo $\gamma = \gamma(x)$ tak, že platí

$$\gamma T^p x < u_0. \tag{3.2}$$

Buďte $\mathscr{Y}_1, \dots, \mathscr{Y}_m$ reálné Banachovy prostory, $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_1 \times \dots \times \mathscr{Y}_m$ jejich kartézský součin. Dále buďte $\mathscr{X}_1, \dots, \mathscr{X}_m$, $\mathscr{X}$ komplexní rozšíření prostorů $\mathscr{Y}_1, \dots, \mathscr{Y}_m$, $\mathscr{Y}$. Symboly $\mathscr{Y}'_1, \dots, \mathscr{Y}'_m, \mathscr{Y}'$; $\mathscr{X}'_1, \dots, \mathscr{X}'_m, \mathscr{X}'$ značíme příslušné prostory spojitých lineárních forem a symboly $[\mathscr{Y}_1], \dots, [\mathscr{Y}_m]$, $[\mathscr{Y}]$; $[\mathscr{X}_1], \dots, [\mathscr{X}_m]$, $[\mathscr{X}]$ označujeme prostory ohraničených lineárních zobrazení příslušného prostoru do sebe.

Předpokládejme, že v prostoru $\mathscr{Y}_j$, $j = 1, \dots, m$, existuje vytvořující kužel $\mathscr{K}_j$. Zřejmě $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \times \dots \times K_m$ tvoří kužel v prostoru $\mathscr{Y}$.

Věta 3. *Předpokládejme, že existuje index s, $1 \leqq s \leqq m$ a funkce $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_s)$, kde $T_s \in [\mathscr{Y}_s]$ je lineární operátor definovaný formulí (2.1), taková, že $f(T_s) = U_s + V_s$ je operátorem Radona-Nikolského a $|f(\lambda)| > r(V_s)$ pro $|\lambda| = r(T_s)$. Ohraničený operátor $(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}$ nechť zobrazuje kužel $\mathscr{K}_m \subset \mathscr{Y}_m$ do kužele $\mathscr{K}_1 \subset \mathscr{Y}_1$ a ohraničený operátor $(L_j - C_{jj})^{-1} C_{j,j-1}$ nechť zobrazuje kužel $\mathscr{K}_{j-1} \subset \mathscr{X}_{j-1}$ do kužele $\mathscr{K}_j \subset \mathscr{Y}_j$, $j = 2, \ldots, m$. Potom existuje alespoň jedna kladná charakteristická hodnota λ_0 soustavy (1.5b) a jí přísluší vlastní vektor $x_0 \in \mathscr{K}$. Pro každou jinou charakteristickou hodnotu soustavy (1.5b) platí nerovnost*

$$|\lambda| \geqq \lambda_0 . \tag{3.3}$$

Je-li navíc T_s silně u_{0s}-kladným operátorem, pak $\mu_0 = \lambda_0^{-m}$ je dominantním bodem spektra $\sigma(T_s)$, tj. nerovnost $|\mu| < \mu_0$ platí pro každé $\mu \in \sigma(T_s)$, $\mu \neq \mu_0$, neboli

$$|\lambda| > \lambda_0 \tag{3.4}$$

pro každé charakteristické číslo soustavy (1.5b) λ, $\lambda \neq \lambda_0$ a λ_0^{-m} je jednoduchým pólem resolventy $R(\lambda, T_s) = (\lambda I_s - T_s)^{-1}$. Příslušný charakteristické hodnotě λ_0 vlastní vektor x_0 soustavy (1.5b) leží v kuželi $\mathscr{K}$ a kromě vektorů tvaru cx_0, kde c je kladná konstanta, jiné vlastní vektory soustavy (1.5b) v kuželi $\mathscr{K}$ neleží.

Důkaz. Z předpokladů věty vyplývá, že T_s je $\mathscr{K}_s$-kladný operátor. Podle [10] věta 3.2 existuje vlastní vektor operátoru T_s příslušný kladné vlastní hodnotě μ_0 a nerovnost

$$|\mu| \leqq \mu_0 \tag{3.5}$$

platí pro každý bod $\mu \in \sigma(T_s)$.

Položme $\lambda_0 = \sqrt[m]{\mu_0^{-1}}$ a nechť $\lambda_0 > 0$. Buď $x_{0s} \in \mathscr{K}_s$ vlastní vektor operátoru T_s příslušný vlastní hodnotě μ_0 : $\mu_0 x_{0s} = T_s x_{0s}$. Snadno lze ověřiti, že řešení soustavy (1.5b) příslušné charakteristické hodnotě λ_0 lze vyjádřiti ve tvaru $u = (u_1, \ldots, u_m)$, kde

$$u_s = x_{0s} , \tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned} u_{s+1} &= \lambda_0 (L_{s+1} - C_{s+1,s+1})^{-1} C_{s+1,s} u_s , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m &= \lambda_0 (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} u_{m-1} , \\ u_1 &= \lambda_0 (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} u_m , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{s-1} &= \lambda_0 (L_{s-1} - C_{s-1,s-1})^{-1} C_{s-1,s-2} u_{s-2} , \end{aligned} \tag{3.6b}$$

neboť z (3.6a), (3.6b) vyplývá platnost rovnosti

$$u_s = \lambda_0 (L_s - C_{ss})^{-1} C_{s,s-1} u_{s-1} .$$

To, že $u \in \mathscr{K}$ vyplývá jednak z předpokladů věty o operátorech $(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}$, $(L_j - C_{jj})^{-1} C_{j,j-1}$, $j = 2, \ldots, m$ a jednak odtud, že $x_{0s} \in \mathscr{K}_s$. Nerovnost (3.3) je bezprostředním důsledkem nerovnosti (3.5) a toho, že každý bod $\mu \in \lambda^{-m}$, pro nějž $|\lambda| < \lambda_0$, je regulárním bodem resolvent všech operátorů $T_1, \ldots, T_m$.

Druhá část věty 3 plyne z věty 1 práce [6] a z věty 1.

Kompaktní operátor $T \in [\mathscr{W}]$ není obecně operátorem Radona-Nikolského. Platí však následující

Lemma 2. *Kompaktní u_0 – kladný operátor T je operátorem Radona-Nikolského.*

Důkaz. Stačí dokázati, že spektrální poloměr $r(T)$ operátoru T je kladný, tj., že ve spektru $\sigma(T)$ leží alespoň jedna nenulová vlastní hodnota. Existence takové hodnoty je dokázána v monografii [4], str. 262.

Důsledkem toho, že $\mu_0 = \lambda_0^{-m}$ je jednoduchým pólem resolventy $R(\lambda, T_m)$ je podle věty 2 věta o existenci řešení nehomogenní soustavy (1.5a) klademe-li na operátory $T_1, \ldots, T_m$ podobná omezení jako ve větě 3.

Věta 4. *Předpokládejme, že existuje $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_m)$, kde $T_m \in [\mathscr{X}_m]$ je operátor definovaný formulí (2.1), tak, že $f(T_m) = U_m + V_m$ je operátor Radona-Nikolského a $|f(\lambda)| > r(V_m)$ pro $|\lambda| = r(T_m)$. Dále předpokládejme, že T_m je silně u_{0m}-kladným operátorem. Potom soustava (1.5a) má řešení právě když platí (2.6) pro každou formu u'_m, jež je řešením homogenní rovnice $u'_m = \lambda^m T'_m u'_m$.*

4. Iterační procesy. V tomto odstavci ukážeme, že k sestrojení charakteristického čísla s minimálním modulem a příslušného vlastního vektoru je možno používat iteračních metod podobných Gaussově-Seidelově metodě pro řešení nehomogenních soustav lineárních algebraických rovnic.

Buďte x'_n, y'_n, z'_n, $n = 1, 2, \ldots, x', y'$ – spojité lineární formy v prostoru $\mathscr{X}_m$ takové, že platí

$$x'(x) = \lim_{n\to\infty} x'_n(x)\,, \quad y'(x) = \lim_{n\to\infty} y'_n(x) = \lim_{n\to\infty} z'_n(x) \tag{4.1}$$

pro každý vektor $x \in \mathscr{X}_m$.

Buď $x^{(0)} \in \mathscr{X}_m$ takový vektor, pro něž $B_{1m}x^{(0)} \neq 0$ a nechť existuje přirozené q tak, že

$$B_{qm}x^{(0)} \neq 0\,, \quad B_{q+1,m}x^{(0)} = 0\,, \tag{4.2}$$

kde B_{km}, $k = 1, 2, \ldots$ jsou členy Laurentova rozvoje resolventy $R(\lambda, T_m)$ ([13], str. 305), přičemž operátor T_m je definován formulí (2.1), v okolí bodu μ_0

$$R(\lambda, T_m) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^k T_{km} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \mu_0)^{-k} B_{km}\,. \tag{4.3}$$

Nechť

$$x'(B_{qm}x^{(0)}) \neq 0\,, \quad y'(B_{qm}x^{(0)}) \neq 0\,. \tag{4.4}$$

Položme

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &(L_1 - C_{11})\, x_1^{(n)} = C_{1m} x_m^{(n-1)}\,, \quad x_m^{(0)} = x^{(0)}\,,\\ &(L_2 - C_{22})\, x_2^{(n)} = C_{21} x_1^{(n)}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(L_m - C_{mm})\, x_m^{(n)} = C_{m,m-1} x_{m-1}^{(n)}\,, \end{aligned}$$

$$(4.6)\qquad u_{(n)} = \frac{x_m^{(n)}}{x_n'(x_m^{(n)})}\,,$$

$$(4.7)\qquad \lambda_{(n)} = \frac{y_n'(x_m'^{n-1})}{z_n'(x^{(n)})}\,.$$

Postačující podmínky pro konvergenci uvedeného iteračního procesu jsou obsaženy v následující větě.

Věta 5. *Předpokládejme, že operátor* $T_m = (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}$ *má dominantní vlastní číslo* μ_0, *tj. že nerovnost* $|\mu| < |\mu_0|$ *platí pro každý bod* $\mu \in \sigma(T_m)$, $\mu \neq \mu_0$. *Nechť jsou splněny podmínky* (4.1)–(4.4) *a* $x^{(0)} = x_m^{(0)}$ *nechť je vhodný vektor z* $\mathscr{X}_m$. *Potom platí*

$$(4.8)\qquad \lambda_0^m = \frac{1}{\mu_0} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{(n)}$$

a v normě prostoru $\mathscr{X}_m$

$$(4.9)\qquad u_{(n)} \to u_{0m}\,,$$

při čemž vektor

$$(4.10)\qquad u_{0m} = \frac{1}{\mu_0} T_m u_{0m}$$

je vlastním vektorem operátoru příslušným vlastní hodnotě μ_0. *Dále pak vektor* $u_0 = (u_{01}, \ldots, u_{0m})$, *kde*

$$(4.11)\qquad u_{01} = \lambda_0 (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} u_{0m}\,, \quad u_{0j} = \lambda_0 (L_j - C_{jj})^{-1} C_{j,j-1} u_{0j-1}\,,\quad j = 2, \ldots, m\,,$$

je vlastním vektorem soustavy (1.5b) *příslušným charakteristické hodnotě* $\lambda_0 = \sqrt[m]{\mu_0^{-1}}$.

Důkaz. Z (4.5) obdržíme vyjádření

$$\begin{aligned} x_m^{(n)} &= (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} x_{m-1}^{(n)} =\\ &= (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} (L_{m-1} - C_{m-1,m-1})^{-1} C_{m-1,m-2} x_{m-2}^{(n)} =\\ &= \ldots = (L_m - C_{mm})^{-1} C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m} x_m^{(n-1)} = T_m x_m^{(n-1)}\,, \end{aligned}$$

z něhož je patrné, že posloupnost $\{x_m^{(n)}\}$ je Kelloggovou posloupností pro vlastní vektor operátoru T_m příslušný dominantní vlastní hodnotě μ_0 ([7]). Podle [7], věta 2, platí pak (4.8), (4.9) a (4.10). Podle lemmatu 1 je hodnota μ_0 vlastní hodnotou všech operátorů $T_1, \ldots, T_m$ definovaných pomocí (2.1), hodnota $\lambda_0 = \sqrt[m]{\mu_0^{-1}}$ je charakteristickou hodnotou soustavy (1.5b) a jí přísluší vlastní vektor $u_0 = (u_{01}, \ldots, \ldots, u_{0m})$, kde u_{0j} jsou definovány pomocí (4.11).

Poznámka. Je zřejmé, že je-li $\mathcal{X}_m$ komplexním rozšířením reálného prostoru $\mathcal{Y}_m$, pak rovnost (4.9) platí v normě prostoru $\mathcal{Y}_m$ že předpokladu, že příslušné vektory jsou reálné.

Speciálně, jsou-li $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$, $\mathcal{X}$ komplexní rozšíření Banachových prostorů $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_m, \mathcal{Y}$ a $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ jsou vytvořující kužele v prostorech $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_m$, pak obdržíme pomocí věty 3 jakožto přímý důsledek plynoucí z věty 5 následující tvrzení.

Věta 6. *Nechť operátor $T_m = (L_m - C_{mm})^{-1} C_{mm-1} \ldots (L_1 - C_{11}) C_{1m}$ je silně v_{0m}-kladným operátorem, kde $v_{0m} \in \mathcal{K}_m$. Dále nechť existuje $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_m)$ tak, že $f(T_m) = U_m + V_m$ je operátor Radona-Nikolského, při čemž $|f(\lambda)| > r(V_m)$ pro $|\lambda| = r(T_m)$. Ohraničený operátor $(L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}$ nechť zobrazuje kužel $\mathcal{K}_m$ do kužele $\mathcal{K}_1$ a ohraničený operátor $(L_j - C_{jj})^{-1} C_{j,j-1}$ nechť zobrazuje kužel $\mathcal{K}_{j-1}$ do $\mathcal{K}_j$, $j = 2, \ldots, m$. Předpokládejme, že vektor $x_m^{(0)} = x^{(0)} \in \mathcal{K}_m$ a nechť pro formy x_n', y_n', z_n', x', y' platí (4.1) a (4.4). Potom je iterační proces (4.5)–(4.7) konvergetní, tj. platí (4.8)–(4.9), při čemž pro vektor $u_{0m} = \lim u_{(n)}$ platí (4.10) a $(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m}) = u_0 \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \ldots \times \mathcal{K}_m$, kde $u_{0j}, j = 1, \ldots, m$, jsou definovány v (4.11), je vlastní vektor soustavy (1.5b) příslušný charakteristické hodnotě $\lambda_0 > 0$.*

Důkaz. Podle věty 3 operátor T_m má kladné dominantní vlastní číslo μ_0. Podle téže věty je hodnota μ_0 jednoduchým pólem resolventy $R(\lambda, T_m)$, takže ve vyjádření (4.3) je $B_{jm} = \Theta$ (Θ – nulový operátor) pro $j > 1$. Dále pak podle [6], věta 2, B_{1m} je v_{0m}-kladný operátor, tedy $B_{1m} x \succ \alpha v_{0m}$ pro každý vektor $x \in \mathcal{K}_m$, $x \neq 0$, takže požadované v (4.2) $q = 1$.

Poznámka. Jsou-li x', y' nezáporné nenulové lineární formy takové, že $x'(v_{0m}) > 0$, $y'(v_{0m}) > 0$, pak jsou splněny nerovnosti (4.4).

Formy x', y' jsou nezáporné, tedy pro každý vektor $x \in \mathcal{K}_m$, $x \neq 0$ platí

$$0 < \alpha(B_{1m}x)\, x'(v_{0m}) \leqq x'(T_m^p B_{1m} x) \leqq \beta(B_{1m}x)\, x'(v_{0m})$$

a podobně

$$0 < \alpha(B_{1m}x)\, y'(v_{0m}) \leqq y'(T_m^p B_{1m} x) \leqq \beta(B_{1m}x)\, y'(v_{0m})\, y' .$$

5. Existence řešení difusních rovnic a konvergence Starkovy metody iterace zdroje. Již jsme se zmínili o tom, že pro cyklické operátory se vyšetřování soustav (1.5) redukuje na vyšetřování jednoho z operátorů T_s, $1 \leqq s \leqq m$, definovaných v (2.1). Ukážeme na příkladě z reaktorové fyziky, jak lze tohoto faktu využít jednak k důkazu existence charakteristického čísla a vlastního vektoru soustavy difusních rovnic a k jejich přibližnému sestrojování.

Protože chceme ukázati příklad, na němž by byla patrna především metoda vyšetřování cyklických soustav, volíme záměrně příklad jednoduchý. To se týká zejména předpokladu o tvaru oblasti, na níž budeme soustavy difusních rovnic vyšetřovati. Omezujeme se pouze na omezené oblasti, jež mají takovou symetrii, že příslušné difusní soustavy jsou soustavami obyčejných diferenciálních rovnic. Toto omezení není podstatné pro užití námi zvolené metody vyšetřování cyklických soustav.

Buďte m, N přirozená čísla. Buď $G = (R_0, R_N)$, $0 \leqq R_0 < R_1 < \ldots < R_N < +\infty$, interval reálných čísel.

Budeme vyšetřovati soustavu diferenciálních rovnic ([3] str. 278)

$$(5.1) \qquad -\frac{d}{d\xi}\left[d_1(\xi)\frac{d}{d\xi}u_1(\xi)\right] + \sigma_1(\xi)\,u_1(\xi) = \lambda\sigma_m(\xi)\,u_m(\xi)\,,$$
$$-\frac{d}{d\xi}\left[d_j(\xi)\frac{d}{d\xi}u_j(\xi)\right] + \sigma_j(\xi)\,u_j(\xi) = \lambda\sigma_{j-1}(\xi)\,u_{j-1}(\xi)\,, \quad j = 2, \ldots, m\,;$$

$$(5.2) \qquad 0 < d \leqq d_j(\xi) \leqq \delta < +\infty\,, \quad 0 < \sigma \leqq \sigma_j(\xi) \leqq \Sigma < +\infty\,,$$
$$d_j(\xi) = d_{jk}\,, \quad \sigma_j(\xi) = \sigma_{jk} \quad \text{pro} \quad \xi \in (R_{k-1}, R_k)\,,$$

s okrajovými podmínkami

$$(5.3) \qquad \frac{d}{d\xi}u_j(\xi)\bigg|_{\xi=R_0} - \alpha_{j0}u_j(R_0) = 0\,, \quad \frac{d}{d\xi}u_j(\xi)\bigg|_{\xi=R_N} + \alpha_{jN}u_j(R_N) = 0$$

při čemž $\alpha_{j0} \geqq 0$, $\alpha_{jN} > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Na rozhraní jednotlivých pásem $R_1, \ldots, R_{N-1}$ požadujeme splnění podmínek konjugovanosti

$$(5.4) \qquad \{u_j(\xi)\}_{\xi=R_k} = 0\,, \quad \left\{d_j(\xi)\frac{d}{d\xi}u_j(\xi)\right\}_{\xi=R_k} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, N-1\,,$$

kde $\{v(\xi)\}_{\xi=R_k} = \lim_{\varepsilon\to 0+} v(\xi+\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0+} v(\xi-\varepsilon)$.

O fysikálním smyslu veličin vyskytujících se v (5.1)–(5.3) se nebudeme šířit odkazujíce čtenáře na monografii [3], str. 278. Poznamenejme pouze, že σ_j, $j \neq m$, značí účinný průřez pro zpomalování, σ_m značí účinný průřez pro pohlcení. Úlohou jest nalézti hodnotu parametru λ_0 tak, aby existovalo kladné v G řešení $u = (u_1, \ldots, u_m)$ soustavy (5.1) s okrajovými podmínkami (5.3).

Buď $\mathscr{L}_2(G)$ reálný prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných v G se čtvercem. S obvyklým skalárním součinem a normou

$$(5.5) \qquad (u, v) = \int_G u(\xi)\,v(\xi)\,d\xi\,, \quad \|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}\,,$$

je $\mathscr{L}_2(G)$ Hilbertovým prostorem (úplným). Buď $\mathscr{K} \subset \mathscr{L}_2(G)$ množina nezáporných funkcí $u \in \mathscr{L}_2(G)$. Množina $\mathscr{K}$ je vytvořující kužel v $\mathscr{L}_2(G)$ neboť každou funkci $v \in \mathscr{L}_2(G)$ lze vyjádřiti ve tvaru $v = v_1 - v_2$, kde $v_1 \in K$, $v_2 \in K$.

Buď $\mathscr{D}_j \subset \mathscr{L}_2(G)$ lineál funkcí, jež mají v intervalech $\langle R_{k-1}, R_k \rangle$ $k = 1, \ldots, N$, spojité derivace až do řádu 2 včetně a jež splňují podmínky (5.3) a (5.4).

Nechť $\mathscr{Y}_j = \mathscr{L}_2(G)$, $j = 1, \ldots, m$; $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_1 \times \ldots \times \mathscr{Y}$. V prostoru $\mathscr{Y}_j$ je na každém lineálu $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}(L_j)$ definován lineární operátor

$$L_j u_j \equiv - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[d_j(\xi) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} u_j(\xi)\right] + \sigma_j(\xi)\, u_j(\xi)\,. \tag{5.6}$$

Pro $u_j \in \mathscr{D}(L_j)$, $u_j \not\equiv 0$, platí

$$(L_j u_j, u_j) = \int_{R_0}^{R_N} \left\{d_j(\xi)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} u_j(\xi)\right]^2 + \sigma_j(\xi)\,[u_j(\xi)]^2\right\} \mathrm{d}\xi + \tag{5.7}$$
$$+ \alpha_{j0}^2 d_j(R_0)\, u_j^2(R_0) + \alpha_{jN}^2 d_j(R_N)\, u_j^2(R_N) > 0\,.$$

Existuje tedy Greenova funkce $\Gamma_j = \Gamma_j(\xi, \eta)$ příslušná odpovídajícímu operátoru (5.6) ([2], str. 187). Pomocí (5.7) lze snadno dokázati, že $\Gamma_j(\xi, \eta) > 0$ na čtverci $(R_0, R_N) \times (R_0, R_N)$. Pro koncové body $\xi = R_0$, $\xi = R_N$, $\eta = R_0$, $\eta = R_N$ je vzhledem k podmínkám na hranicích (5.3)

$$\Gamma_j(R_0, \eta) > 0\,, \quad \Gamma_j(R_N, \eta) > 0\,, \quad \eta \in \langle R_0, R_N \rangle\,,$$
$$\Gamma_j(\xi, R_0) > 0\,, \quad \Gamma_j(\xi, R_N) > 0\,, \quad \xi \in \langle R_0, R_N \rangle\,,$$

takže na základě spojitosti Γ_j na $J = \langle R_0, R_N \rangle \times \langle R_0, R_N \rangle$ existuje a je kladné

$$\inf_{(\xi,\eta)\in J} \Gamma_j(\xi, \eta) = \tau_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{5.8}$$

Integrální operátor definovaný pomocí jádra Γ_j je, jak známo, inversním operátorem k operátoru L_j, tedy $L_j^{-1} v \equiv \int_G \Gamma_j(\xi, \eta)\, v(\eta)\, \mathrm{d}\eta$.

Je-li $u_j \in \mathscr{K} = \mathscr{K}_j \subset \mathscr{Y}_j$, $u_j \not\equiv 0$, pak funkce $v_j = L_j^{-1} u_j$ je kladná a spojitá v $\bar{G} = \langle R_0, R_N \rangle$. Buď $v_0(\xi) = 1$ pro $\xi \in \bar{G}$. Nechť $u_j \in \mathscr{K}$, $u_j \not\equiv 0$,

$$\alpha_j = \alpha_j(u_j) = \inf_{\xi\in\bar{G}} [L_j^{-1} u_j](\xi)\,, \quad \beta_j = \beta_j(u_j) = \sup_{\xi\in\bar{G}} [L_j^{-1} u_j](\xi)\,,$$

takže $\beta_j \geqq \alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Platí potom nerovnosti

$$\alpha_j v_0(\xi) \leqq [L_j^{-1} u_j](\xi) \leqq \beta_j v_0(\xi)\,, \quad \xi \in G\,,$$

neboli

$$\alpha_j v_0 \prec L_j^{-1} u_j \prec \beta_j v_0\,, \tag{5.9}$$

což značí, že operátor L_j^{-1} je v_0-kladný; $\mathcal{K}_j$ — kladnost operátoru L_j^{-1} je důsledkem kladnosti Greenovy funkce Γ_j.

Je-li $u \in \mathcal{L}_2(G)$, pak

$$\sup_{\xi \in \bar{G}} |[L_j^{-1} u_j](\xi)| = \delta_j(u_j) = \delta_j < +\infty ,$$

takže

$$\gamma_j L_j^{-1} u_j \prec v_0 , \quad \text{kde} \quad \gamma_j = \frac{1}{\delta_j} , \tag{5.10}$$

čímž je dokázáno, že operátor L_j^{-1} je silně v_0-kladný.

Operátory C_{jk} definujeme takto:

$$C_{1m} u \equiv \sigma_m(\xi) u(\xi) , \quad C_{j,j-1} u \equiv \sigma_{j-1}(\xi) u(\xi) , \quad j = 2, \ldots, m , \tag{5.11}$$
$$C_{jj} = \Theta, \quad j = 1, \ldots, m .$$

Operátory C_{jk} jsou vzhledem k předpokladům kladeným na σ_j, $j = 1, \ldots, m$ ohraničené a zobrazují kužel $\mathcal{K}_j = \mathcal{K}$, $j = 1, \ldots, m$, do sebe. Podle (5.2) je $\sigma v_0 \prec C_{jk} u \prec \prec \Sigma v_0$ pro $u \in \mathcal{K}$, $u \not\equiv 0$ a pro ty dvojice j, k, pro něž C_{jk} je nenulový operátor. odtud a z (5.9) vyplývá, že

$$\alpha_1 \ldots \alpha_m \sigma^m v_0 \prec T_m u \prec \beta_1 \ldots \beta_m \Sigma^m v_0 , \quad u \in \mathcal{K} , \quad u \not\equiv 0 : \tag{5.12}$$

a z (5.10) pak, že

$$\gamma_1 \ldots \gamma_m \Sigma^{-m} T_m u < v_0 , \quad u \in \mathcal{L}_2(G) . \tag{5.13}$$

Vztahy (5.12) a (5.13) vyjadřují tu skutečnost, že operátor $T_m = (L_m - C_{mm})^{-1} . C_{m,m-1} \ldots (L_1 - C_{11})^{-1} C_{1m}$ je v_0-kladný či silně v_0-kladný, kde $v_0(\xi) = 1$ pro $\xi \in G$. Protože každý z operátorů L_j^{-1}, $j = 1, \ldots, m$, je kompaktní, je kompaktním též operátor T_m. Na základě lemmatu jsou potom splněny všechny předpoklady věty 3, neboť požadovanou funkci $f \in \mathfrak{A}_\infty(T_m)$ lze snadno sestrojiti, na příklad takto: $f(\lambda) = \lambda$ pro $|\lambda| \leqq 2r(T_m)$ a $f(\lambda) = 0$ pro $|\lambda| > 2r(T_m)$, kde $r(T_m)$ je spektrální poloměr operátoru T_m.

Výsledek. Existuje jednoduchá charakteristická hodnota $\lambda_0 > 0$ a jí přísluší kladný v G vlastní vektor $u_0 = (u_1, \ldots, u_m)$ soustavy (5.1) s okrajovými podmínkami (5.3). Kromě vektorů cu_0, $c > 0$, soustava (5.1), (5.3) jiných nezáporných v G řešení nemá. Iterační proces (4.5)—(4.7), zvaný v tomto případě procesem iterace zdroje, konverguje k uvedeným prvkům λ_0, u_0.

Numerický příklad řešení soustavy (5.1), (5.3) s $N = 1$, $m = 6$ metodou iterace zdroje je uveden v knize [12], str. 271—275.

Poznamenejme, že konvergence metody iterace zdroje ve tvaru modifikovaném pro cyklické operátory je zde dokázána zřejmě po prvé.

Literatura

[1] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators. Part I. Ruský překlad, Moskva 1962.
[2] *B. Friedman:* Principles and techniques of applied mathematics. J. Wiley Appl. Math. Ser. I. S. Sokolnikoff, 1956.
[3] *S. Glasstone, M. C. Eddlund:* The elements of nuclear reactor theory. Ruský překlad, Moskva 1954.
[4] *М. А. Красносельский:* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Физматгиз, Москва 1956.
[5] *М. Г. Крейн, М. А. Рутман:* Линейные операторы оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Усп. матем. наук *III* (1948), № 1, 3—95.
[6] *I. Marek:* A note on $\mathscr{K}$-positive operators. Comment. Math. Univ. Carol. *4*, *3*, 1963, 137—146.
[7] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ *12* (1962), 536—554.
[8] *И. Марек:* Некоторые математические задачи теории ядерных реакторов на быстрых нейтронах. Aplikace matematiky *8* (1963), 442—470.
[9] *I. Marek:* Über einen speziellen Typus der linearen Gleichungen im Hilbertschen Raume. Čas. pěst. mat. *89* (1964),155—172.
[10] *I. Marek:* Some spectral properties of Radon-Nicolski operators and their generalizations. Comment. Math. Univ. Carol. *3,1* (1962), 10—20.
[11] *I. Marek:* Užití maticové metody v mnohoskupinové theorii difuse neutronů. Aplikace matematiky *3* (1958), 141—149.
[12] *R. L. Murray:* Nuclear reactor physics. Ruský překlad, Moskva 1959.
[13] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis. J. Wiley publ. New York 1958.

Резюме

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek), Прага

В статье рассматриваются циклические системы линейных операторных уравнений в декартовом произведении $\mathscr{X}$ банаховых пространств $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_m$. Вводится некоторый класс линейных операторов, для которых рассматриваемые системы имеют по крайней мере одно характеристическое значение. Специально отмечаются $\mathscr{K}_j$ – положительные системы, где $\mathscr{K}_j$ – некоторый конус в пространстве $\mathscr{X}_j$.

Для приближенного построения характеристического значения с минимальным модулем предложена общая итерационная схема и доказана ее сходимость.

В качестве примера показывается циклическая система диффузионных уравнений из теории ядерных реакторов.

Summary

ON THE EXISTENCE AND THE APPROXIMATIVE CONSTRUCTION OF CHARACTERISTIC VALUES OF CYCLIC SYSTEMS OF OPERATOR EQUATIONS

Ivo Marek, Praha

The cyclic systems of linear operator equations in a Cartesian product $\mathscr{X}$ of the Banach spaces $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_m$ are studied. A class of such linear operators is introduced for which the corresponding systems have at least one characteristic value. Particular attention is given to the $\mathscr{K}_j$ – positive systems, where $\mathscr{K}_j$ is a cone in the space $\mathscr{X}_j$. For the approximative construction of the characteristic values and the corresponding eigenvectors a general iterative method is given and the convergence of this process is proved.

An example of cyclic systems of nuclear reactor equations is shown.