Josef Král; Jan Mařík

Integrace podle Hausdorffovy míry na hladké ploše

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 4, 433–448

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117520`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

INTEGRACE PODLE HAUSDORFFOVY MÍRY NA HLADKÉ PLOŠE

JOSEF KRÁL a JAN MAŘÍK, Praha

(Došlo dne 9. listopadu 1963)

Hlavním výsledkem práce je věta o výpočtu integrálu podle Hausdorffovy míry na hladké ploše pomocí Lebesgueova integrálu.

Úvodní poznámka. Předkládaný článek má metodický charakter. Jsou v něm vyloženy základní vlastnosti Hausdorffovy míry a je dokázána věta o výpočtu integrálu podle m-rozměrné Hausdorffovy míry na m-rozměrné hladké ploše pomocí Lebesgueova integrálu.[1]) Z této věty plyne zejména věta o substituci pro Lebesgueův integrál (viz např. [2] nebo [5]), jejíž znalost se zde nepředpokládá. Nároky kladené na čtenáře jsou minimální; stačí znát základy diferenciálního počtu, lineární algebry a teorie integrálu.

1

V této části vyložíme základní vlastnosti Hausdorffovy míry a ukážeme, že m-rozměrná Hausdorffova míra v m-rozměrném euklidovském prostoru splývá s Lebesgueovou mírou (viz též [9]).

1·1. Definice a označení. Buď X metrický prostor s metrikou ϱ. Průměr množiny $A \subset X$ označíme symbolem diam A.

Buď Λ funkce, která je definována na systému všech částí prostoru X a která má tyto vlastnosti:

1. $\Lambda(\emptyset) = 0$;
2. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X \Rightarrow \Lambda(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(A_n)$;
3. $B, C \subset X,\ \varrho(B, C) > 0 \Rightarrow \Lambda(B) + \Lambda(C) = \Lambda(B \cup C)$.

Potom řekneme, že Λ je vnější míra (na prostoru X). Když $A \subset X$ a když pro každou množinu $B \subset X$ je $\Lambda(B \cap A) + \Lambda(B - A) = \Lambda(B)$, řekneme, že množina A je Λ-měřitelná.

[1]) Výpočtu Hausdorffovy míry hladké plochy pomocí Lebesgueova integrálu je věnována též práce [11] a článek [7], který se opírá o konstrukci provedenou v knize [4].

Nejmenší σ-algebru, obsahující všechny uzavřené množiny prostoru X, označíme symbolem $\mathfrak{B}(X)$.

1·2. *Buď Λ vnější míra na prostoru X. Buď $\mathfrak{A}$ systém všech Λ-měřitelných množin a buď $\mathfrak{N}$ systém všech množin N, pro něž $\Lambda(N) = 0$. Potom je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{A}$, systém $\mathfrak{A}$ je σ-algebra a funkce Λ je na $\mathfrak{A}$ σ-aditivní (tedy parciální funkce $\Lambda \mid \mathfrak{A}$ je míra).*

Důkaz. Viz např. [8], kap. II, nebo [10], kap. VI, cvič. 17 k § 5.

1·3. Definice. Buď m přirozené číslo. Symbolem γ_m budeme značit objem (= m-rozměrnou Lebesgueovu míru) m-rozměrné koule o průměru 1. Je-li $A \subset X$ a $\varepsilon > 0$, položíme

$$H_m(A, \varepsilon) = \gamma_m \,.\, \inf \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} Q_n)^m \,,$$

kde při tvoření infima bereme všechny posloupnosti $Q_1, Q_2, \ldots$, pro něž $A \subset \bigcup Q_n$ a $\operatorname{diam} Q_n < \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Při pevné množině A je $H_m(A, \varepsilon)$ nerostoucí funkcí proměnné ε. Existuje tedy $\lim_{\varepsilon \to 0+} H_m(A, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} H_m(A, \varepsilon)$. Tuto limitu (které může být nekonečná) nazveme m-rozměrnou Hausdorffovou vnější mírou množiny A a označíme ji symbolem $H_m(A)$.

1·4. *Funkce H_m je vnější míra a pro každou spočetnou množinu $S \subset X$ je $H_m(S) = 0$.*

Důkaz. Nechť $A_n, B, C, R \subset X$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\varrho(B, C) > 0$ a nechť množina R obsahuje nejvýš jeden bod. Čtenář snadno dokáže, že pro každé $\varepsilon > 0$ je $H_m(R, \varepsilon) = 0$, $H_m(A, \varepsilon) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} H_m(A_n, \varepsilon)$ a že pro každé $\varepsilon \in (0, \varrho(B, C))$ je $H_m(B, \varepsilon) + H_m(C, \varepsilon) = H_m(B \cup C, \varepsilon)$. Odtud tvrzení snadno plyne.

1·5. *Ke každé množině $A \subset X$ existuje taková množina B typu G_δ, že $A \subset B$ a že $H_m(A) = H_m(B)$.*

Důkaz. Můžeme se omezit na případ, že $H_m(A) < \infty$. Buď p přirozené číslo. Čtenář snadno zjistí, že existují takové otevřené množiny G_p^n, že $\bigcup_n G_p^n \supset A$, $\operatorname{diam} G_p^n < 1/p$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a že $\gamma_m \sum_n (\operatorname{diam} G_p^n)^m < H_m(A) + 1/p$. Nyní stačí položit $B = \bigcap_p \bigcup_n G_p^n$.

1·6. *Buď φ zobrazení množiny $A \subset X$ do metrického prostoru X' s metrikou ϱ' a buď β takové číslo, že platí implikace $x, y \in A \Rightarrow \varrho'(\varphi(x), \varphi(y)) \leqq \beta\, \varrho(x, y)$. Potom $H_m(\varphi(A)) \leqq \beta^m H_m(A)$. Je-li zobrazení φ isometrické, je $H_m(\varphi(A)) = H_m(A)$.* (Symbol $H_m(\varphi(A))$ se ovšem vztahuje k metrice ϱ'.)

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\beta > 0$. Je-li $A \subset \bigcup Q_n$, je $\varphi(A) \subset \bigcup R_n$, kde $R_n = \varphi(A \cap Q_n)$; zřejmě $\operatorname{diam} R_n \leqq \beta \operatorname{diam} Q_n$. Pro každé $\varepsilon > 0$ je tedy $H_m(\varphi(A), \beta\varepsilon) \leqq \beta^m H_m(A, \varepsilon)$. Odtud tvrzení snadno plyne.

1·7. *Buď φ zobrazení množiny $A \subset X$ do X a buď $0 \leqq \eta < 1$. Předpokládejme, že $H_m(A) < \infty$ a že platí implikace*

$$x, y \in A \Rightarrow |\varrho(x, y) - \varrho(\varphi(x), \varphi(y))| \leqq \eta\, \varrho(x, y).$$

Potom je $|H_m(A) - H_m(\varphi(A))| \leqq ((1 - \eta)^{-m} - 1)\, H_m(\varphi(A))$.

Důkaz. Protože $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqq (1 + \eta)\, \varrho(x, y)$, je podle 1·6 $H_m(\varphi(A)) \leqq \leqq (1 + \eta)^m H_m(A)$ a tedy

$$H_m(\varphi(A)) - H_m(A) \leqq (1 - (1 + \eta)^{-m})\, H_m(\varphi(A)). \tag{1,1}$$

Protože je zároveň $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) \geqq (1 - \eta)\, \varrho(x, y)$, je zobrazení φ prosté a pro příslušné inversní zobrazení ψ platí implikace

$$t, v \in \varphi(A) \Rightarrow \varrho(\psi(t), \psi(v)) \leqq (1 - \eta)^{-1}\, \varrho(t, v);$$

podle 1·6 je tedy $H_m(A) = H_m(\psi(\varphi(A)) \leqq (1 - \eta)^{-m} H_m(\varphi(A))$, takže

$$H_m(A) - H_m(\varphi(A)) \leqq ((1 - \eta)^{-m} - 1)\, H_m(\varphi(A)). \tag{1,2}$$

Snadno se však zjistí, že $(1 - \eta)^{-m} - 1 \geqq 1 - (1 + \eta)^{-m}$. Odtud a z (1,1), (1,2) tvrzení ihned plyne.

1·8. Úmluva. V dalším se budeme zabývat jen Hausdorffovou mírou v euklidovských prostorech. Budeme tedy předpokládat, že X je některý prostor E_r s metrikou, která je obvyklým způsobem odvozena z normy $|x| = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ $(x = [x_1, \ldots, x_r])$. Lebesgueovu vnější míru v E_r budeme značit symbolem L_r nebo prostě L. Číslo m (dimense Hausdorffovy míry) bude pevné; budeme proto psát $H_m = H$. Ze souvislosti bude vždy patrné, ke kterému prostoru E_r se L, H vztahují. Místo „L-měřitelnost" budeme psát prostě „měřitelnost". Naším cílem je nyní dokázat, že pro každé $A \subset E_m$ je $H(A) = L(A)$.

1·9. *Buď G neprázdná otevřená množina v E_m, $L(G) < \infty$, a buď $\varepsilon > 0$. Potom existují disjunktní uzavřené koule $K_1, \ldots, K_p$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $\bigcup K_j \subset G$, $\sum L(K_j) > L(G) \cdot \frac{1}{4}\gamma_m$.*

Důkaz. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď $\mathfrak{K}_n$ systém všech uzavřených krychlí o hraně 2^{-n}, jejichž vrcholy mají souřadnice tvaru $k \cdot 2^{-n}$ (k celé) a jež jsou částí G. Buď S_n sjednocení systému $\mathfrak{K}_n$. Zřejmě $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$, $\bigcup S_n = G$. Existuje tedy takové q, že $2^{-q} < \varepsilon$ a že $L(S_q) > \frac{1}{2} L(G)$. Každou krychli ze systému $\mathfrak{K}_q$ nahraďme nyní uzavřenou koulí o témže středu a průměru $2^{-q-1/m}$. Tak dostaneme konečný disjunktní systém koulí $K_1, \ldots, K_p$. Přitom je $\operatorname{diam} K_j < \varepsilon$, $\bigcup K_j \subset S_q \subset G$ a $\sum L(K_j) = \gamma_m \cdot 2^{-mq-1} p = \frac{1}{2}\gamma_m L(S_q) > \frac{1}{4}\gamma_m L(G)$.

1·10. *Buď G neprázdná otevřená množina v E_m a buď $\varepsilon > 0$. Potom existují disjunktní uzavřené koule $K_1, K_2, \ldots$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $\bigcup K_n \subset G$ a že $L(G - \bigcup K_n) = 0$.*

Důkaz. Zřejmě můžeme předpokládat, že $L(G) < \infty$; položme $\lambda = 1 - \frac{1}{4}\gamma_m$. Podle 1.9 existuje množina $R_1 \subset G$, která je sjednocením konečného počtu disjunktních uzavřených koulí o průměrech $< \varepsilon$ a splňuje vztah $L(G - R_1) < \lambda\, L(G)$. Položíme $G_1 = G - R_1$, sestrojíme množinu $R_2 \subset G_1$, která je sjednocením konečného počtu disjunktních uzavřených koulí o průměrech $< \varepsilon$ a splňuje vztah $L(G_1 - R_2) < < \lambda\, L(G_1)$, položíme $G_2 = G_1 - R_2$ atd. Tak dostaneme množiny $R_1, R_2, \ldots$; buď $T_n = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$, $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Potom $L(G - T_n) < \lambda\, L(G - T_{n-1}) < \ldots < \lambda^n\, L(G)$ a tedy $L(G - T) = 0$. Jistě je zřejmé, jak určíme koule K_n.

1·11. *Buď $A \subset E_m$, $L(A) < \alpha$, $\varepsilon > 0$. Potom existují koule $K_1, K_2, \ldots$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $A \subset \bigcup K_n$, $\sum L(K_n) < \alpha$.*

Důkaz. I. Buď napřed $L(A) = 0$. Existují krychle $C_1, C_2, \ldots$ o průměrech $<\varepsilon$ takové, že $A \subset \bigcup C_n$ a $\sum L(C_n) < \alpha m^{-\frac{1}{2}m}$. Buď K_n uzavřená koule, která má týž střed a stejný průměr jako krychle C_n. Je $C_n \subset K_n$, $L(K_n) = \gamma_m m^{\frac{1}{2}m}\, L(C_n) < m^{\frac{1}{2}m}\, L(C_n)$ a tedy $A \subset \bigcup K_n$, $\sum L(K_n) < \alpha$.

II. Buď nyní $L(A) > 0$. Zvolme otevřenou množinu G tak, aby bylo $A \subset G$, $L(G) < \alpha$. Podle 1·10 existují disjunktní koule $K_1^*, K_2^*, \ldots$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $\bigcup K_n^* \subset G$ a že množina $A' = G - \bigcup K_n^*$ splňuje vztah $L(A') = 0$. Položíme-li ještě $\alpha' = \alpha - L(G)$, pak podle I (kde A, α zaměníme za A', α') existují koule $K_1', K_2', \ldots$ o průměrech $<\varepsilon$ tak, že $A' \subset \bigcup K_n'$ a že $\sum L(K_n') < \alpha'$. Zřejmě $\sum L(K_n^*) + \sum L(K_n') < < L(G) + \alpha - L(G) = \alpha$, $A \subset G \subset (\bigcup K_n^*) \cup (\bigcup K_n')$. Nyní stačí položit např. $K_{2n-1} = K_n^*$, $K_{2n} = K_n'$.

1·12. *Pro každou množinu $A \subset E_m$ je $H(A) \leqq L(A)$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $L(A) < \infty$. Zvolme libovolně $\alpha > L(A)$ a $\varepsilon > 0$. Podle 1·11 existují koule $K_1, K_2, \ldots$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $A \subset \bigcup K_n$ a $\gamma_m \,.\, \sum (\operatorname{diam} K_n)^m = \sum L(K_n) < \alpha$. Vidíme, že $H_m(A, \varepsilon) < \alpha$; je tedy $H(A) \leqq \alpha$, $H(A) \leqq \leqq L(A)$.

1·13. **Úmluvy a označení.** Body prostoru E_m $(m > 1)$ budeme někdy psát ve tvaru $[x, y]$, kde $x \in E_{m-1}$, $y \in E_1$. Je-li $A \subset E_m$ $(m > 1)$, položíme

$$A_x = \{y;\ [x, y] \in A\} \quad \text{pro} \quad x \in E_{m-1}\,,$$

$$A^y = \{x;\ [x, y] \in A\} \quad \text{pro} \quad y \in E_1\,,$$

$$\operatorname{sym} A = \{[x, y];\ x \in E_{m-1},\ y = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2),\ y_1, y_2 \in A_x\}\,.$$

Nejmenší konvexní množinu, která obsahuje A, označíme symbolem conv A.

1·14. *Buď A konvexní kompaktní množina v E_m $(m > 1)$. Potom je* sym A *kompaktní a je* $L(\operatorname{sym} A) = L(A)$, diam sym $A \leqq$ diam A.

Důkaz. Snadno se zjistí, že sym A je kompaktní. Buď nyní $x \in E_{m-1}$. Je-li $A_x = \emptyset$, je zřejmě též $(\operatorname{sym} A)_x = \emptyset$. Je-li $A_x = \langle a, b \rangle$ $(a \leqq b)$, je $(\operatorname{sym} A)_x = \langle -c, c \rangle$, kde

$c = \frac{1}{2}(b - a)$, takže A_x, $(\operatorname{sym} A)_x$ jsou intervaly stejné délky. Z Fubiniho věty nyní plyne, že $L(\operatorname{sym} A) = L(A)$. Zvolme dále $v_1, v_2 \in \operatorname{sym} A$. Můžeme psát $v_j = [x_j, \frac{1}{2}(y_j - z_j)]$, kde $[x_j, y_j], [x_j, z_j] \in A$. Buď např. $|y_1 - y_2| \leqq |z_1 - z_2|$. Je $|v_1 - v_2|^2 = |x_1 - x_2|^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - (z_1 - z_2))^2 \leqq |x_1 - x_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |[x_1, z_1] - [x_2, z_2]|^2$. Odtud plyne ihned, že $\operatorname{diam} \operatorname{sym} A \leqq \operatorname{diam} A$.

Poznámka. Snadno se zjistí, že pro každou konvexní množinu $A \subset E_m$ je též $\operatorname{sym} A$ konvexní; nebudeme to však potřebovat.

1·15. *Pro každé $A \subset E_m$ je* $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \operatorname{conv} A$.

Důkaz. Snadno se zjistí, že $\operatorname{conv} A$ je množina všech bodů tvaru $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, kde $x_j \in A$, $\alpha_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Je-li kromě toho $y_k \in A$, $\beta_k \geqq 0$ $(k = 1, \ldots, p)$, $\sum_{k=1}^{p} \beta_k = 1$, je $|\sum_j \alpha_j x_j - \sum_k \beta_k y_k| = |\sum_{j,k} \alpha_j \beta_k x_j - \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k y_k| \leqq \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k |x_j - y_k| \leqq \Delta \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k = \Delta$, kde $\Delta = \max_{j,k} |x_j - y_k|$. Odtud snadno plyne, že $\operatorname{diam} \operatorname{conv} A \leqq \operatorname{diam} A$. Opačná nerovnost je zřejmá.

1·16. *Buď $A \subset E_m$,* $\operatorname{diam} A \leqq 1$. *Potom $L(A) \leqq \gamma_m$.*

Důkaz.[2]) Pro $m = 1$ tvrzení zřejmě platí. Nechť nyní $m > 1$ a nechť je tvrzení dokázáno v E_{m-1}. Buď $A \subset E_m$, $\operatorname{diam} A \leqq 1$; položme $P = \operatorname{conv} A$, $Q = \operatorname{sym} \bar{P}$. Podle 1.15 je $\operatorname{diam} P = \operatorname{diam} A$; zřejmě $\operatorname{diam} P = \operatorname{diam} \bar{P}$. Množina $\bar{P}$ je konvexní a kompaktní. Z 1·14 nyní plyne, že množina Q je kompaktní, tedy měřitelná, a že $\operatorname{diam} Q \leqq \operatorname{diam} \bar{P} \leqq 1$. Je-li $z_1 = [x, y] \in Q$, je zřejmě též $z_2 = [x, -y] \in Q$; protože $|2y| = |z_1 - z_2| \leqq 1$, je $|y| \leqq \frac{1}{2}$. Pro $|y| > \frac{1}{2}$ je tedy $Q^y = \emptyset$. Buď nyní $|y| \leqq \frac{1}{2}$; nechť $x_1, x_2 \in Q^y$. Protože $[x_1, y] \in Q$, $[x_2, -y] \in Q$, je $1 \geqq |[x_1, y] - [x_2, -y]|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 4y^2$ a tedy $|x_1 - x_2| \leqq (1 - 4y^2)^{\frac{1}{2}}$. Tím jsme dokázali, že pro každé y je $\operatorname{diam} Q^y \leqq \operatorname{diam} K^y$, kde K je koule o středu v počátku a průměru 1. Z indukčního předpokladu snadno plyne, že $L_{m-1}(Q^y) \leqq L_{m-1}(K^y)$ a podle Fubiniho věty je $L(Q) \leqq L(K) = \gamma_m$. Zřejmě je však $L(A) \leqq L(\bar{P})$ a podle 1·14 je $L(\bar{P}) = L(Q)$. Tím je vše dokázáno.

1·17. *Pro každé $A \subset E_m$ je $H(A) = L(A)$.*

Důkaz. Podle 1·12 stačí dokázat, že $H(A) \geqq L(A)$. Můžeme tedy předpokládat, že $H(A) < \infty$; buď $\varepsilon > 0$, $\alpha > H(A)$. Existují množiny $A_1, A_2, \ldots$ o průměrech $< \varepsilon$ tak, že $A \subset \bigcup A_n$ a $\gamma_m \sum (\operatorname{diam} A_n)^m < \alpha$. Podle 1·16 je $L(A_n) \leqq \gamma_m (\operatorname{diam} A_n)^m$, takže $L(A) \leqq \sum L(A_n) < \alpha$, $L(A) \leqq H(A)$.

1·18. *Je-li $k < m$, je $H(E_k) = 0$.*

Důkaz. Buď N množina všech bodů z E_m, jejichž m-tá souřadnice je 0. Prostor E_k lze zřejmě isometricky zobrazit do N; podle 1·6 a 1·17 je tedy $H(E_k) \leqq H(N) = L(N) = 0$.

[2]) Tento důkaz (založený na tzv. Steinerově symetrisaci) nám sdělil as. J. Jelínek.

2

V této části je nejprve dokázána věta o rozkladu matice na součin tří matic speciálního tvaru. Odtud je pak odvozen vzorec pro výpočet m-rozměrné Hausdorffovy vnější míry množiny $\Psi(Q)$, kde $Q \subset E_m$ a kde Ψ je lineární zobrazení prostoru E_m do E_k, pomocí Lebesgueovy vnější míry množiny Q.

2·1. Definice a označení. Slovem matice (resp. vektor) budeme vždy rozumět reálnou matici (resp. reálný vektor). Pro libovolnou matici M buď M' matice transponovaná k M (j-tý řádek matice M' je tedy roven j-tému sloupci matice M). Determinant čtvercové matice M označíme symbolem $\det M$. Matice typu $(1,1)$ ztotožníme zřejmým způsobem s čísly. Vektory budeme jako obvykle pokládat za sloupce. Jsou-li x, y vektory o stejném počtu členů, položíme $xy = x'y$.

Buď nyní M libovolná matice. Pro každý vektor x, pro nějž má Mx smysl, je $x'M'Mx = |Mx|^2 \geqq 0$; podle známých vět o kvadratických formách je tedy $\det(M'M) \geqq 0$. Položme $D(M) = (\det(M'M))^{\frac{1}{2}}$. Je-li M čtvercová matice, je $D(M) = |\det M|$; jsou-li tedy A, B čtvercové matice téhož typu, je $D(AB) = |\det(AB)| = |\det A| \,.\, |\det B| = D(A) \,.\, D(B)$. Je-li M vektor ($=$ sloupec), je $D(M)$ jeho norma.

2·2. *Sloupce matice M jsou lineárně závislé právě tehdy, když $D(M) = 0$.*

Důkaz. Jsou-li sloupce matice M lineárně závislé, existuje takový vektor $x \neq 0$, že $Mx = 0$; tím spíše je $M'Mx = 0$ a tedy $\det M'M = 0$, $D(M) = 0$. Je-li naopak $D(M) = 0$, existuje takový vektor $y \neq 0$, že $M'My = 0$ a tedy $|My|^2 = y'M'My = 0$, $My = 0$; vidíme, že sloupce matice M jsou lineárně závislé.

2·3. Definice. Řekneme, že systém vektorů $v_1, \ldots, v_n$ je ortonormální, když $|v_1| = \ldots = |v_n| = 1$ a když $v_i v_j = 0$ pro $i \neq j$. Řekneme, že matice M je ortonormální, když její sloupce tvoří ortonormální systém neboli když $M'M$ je jednotková matice. Pro každou ortonormální matici M je zřejmě $D(M) = 1$.

Je-li M ortonormální čtvercová matice, je MM' opět jednotková matice, takže M' je rovněž ortonormální.

2·4. *Nechť ortonormální matice M má m sloupců. Potom je $D(MB) = D(B)$ pro každou matici B, která má m řádků, a zobrazení $x \to Mx$ $(x \in E_m)$ je isometrické.*

Důkaz. Je $(MB)'\,MB = B'M'MB = B'B$ a tedy $D(MB) = D(B)$; zejména je tedy $|Mx| = |x|$.

2·5. *Buď φ lineární ($=$ aditivní a homogenní) zobrazení nenulového modulu $R \subset E_m$ do E_k. Potom existuje takové $e \in R$, že $|e| = 1$ a že platí implikace $x \in R$, $x \,.\, e = 0 \Rightarrow \varphi(e)\, \varphi(x) = 0$.*

Důkaz. Množina Q všech $t \in R$, pro něž $|t| = 1$, je kompaktní a funkce $|\varphi(t)|$ je spojitá; existuje tedy takové $e \in Q$, že pro každé $t \in Q$ je $|\varphi(t)| \geqq |\varphi(e)|$. Nechť nyní

$x \in R$, $x \,.\, e = 0$. Pro každé reálné τ položme $f(\tau) = |\varphi(e + \tau x)|^2 = |\varphi(e)|^2 + 2\tau \,.\, \varphi(e)\, \varphi(x) + \tau^2 |\varphi(x)|^2$. Zvolme τ; buď $y = e + \tau x$, $\lambda = |y|$, $z = y/\lambda$. Zřejmě $\lambda \geqq 1$, $z \in Q$ a tedy $|\varphi(y)| = \lambda |\varphi(z)| \geqq |\varphi(e)|$. Vidíme, že pro každé τ je $f(\tau) \geqq f(0)$; je tedy $\varphi(e)\, \varphi(x) = \frac{1}{2} f'(0) = 0$.

2·6. *Buď φ lineární zobrazení modulu $R \subset E_m$ do E_k a buď r dimense modulu R. Potom existuje takový ortonormální systém $v_1, \ldots, v_r$ $(v_i \in R)$, že pro $i \neq j$ je $\varphi(v_i) \,.\, \varphi(v_j) = 0$.*

Důkaz. Tvrzení zřejmě platí, je-li $r = 0$. Buď tedy $r > 0$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro dimensi $r - 1$. Buď e vektor z odst. 2·5 a buď R_0 množina všech $x \in R$, pro něž $x \,.\, e = 0$. Snadno se zjistí, že R_0 je modul dimense $r - 1$; podle indukčního předpokladu existuje ortonormální systém $v_1, \ldots, v_{r-1}$ $(v_i \in R_0)$ takový, že $\varphi(v_i)\, \varphi(v_j) = 0$, jakmile $1 \leqq i < j \leqq r - 1$. Nyní stačí položit $v_r = e$.

2·7. Definice. Buď C čtvercová matice o prvcích c_{ij}. Řekneme, že C je diagonální když $c_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

2·8. *Buď M matice typu (k, m), $k \geqq m$. Potom existuje ortonormální matice A typu (k, m), diagonální matice C typu (m, m) a ortonormální matice B typu (m, m) tak, že $M = ACB$.*

Důkaz. Podle 2·6 existuje ortonormální systém $v_1, \ldots, v_m$ $(v_i \in E_m)$ tak, že $Mv_i \,.\, Mv_j = 0$ pro $i \neq j$. Položme $\alpha_i = |Mv_i|$. Buď C diagonální matice typu (m, m) o prvcích c_{ij} taková, že $c_{ii} = \alpha_i$. Dále buď Ω množina všech indexů i, pro něž $\alpha_i > 0$. Pro $i \in \Omega$ položme $w_i = Mv_i/\alpha_i$ a pro indexy i, které nepatří do Ω, určeme w_i tak, aby systém $w_1, \ldots, w_m$ byl ortonormální. Buď A matice o sloupcích $w_1, \ldots, w_m$; buď V matice o sloupcích $v_1, \ldots, v_m$ a buď $B = V'$. Potom jsou matice A, B ortonormální; zřejmě $AC = MV$ a tedy $ACB = MVB = M$.

2·9. *Buď C diagonální matice typu (m, m). Pro každé $x \in E_m$ položme $\varphi(x) = Cx$. Potom pro každou množinu $Q \subset E_m$ je $L(\varphi(Q)) = D(C)\, L(Q)$.*

(Důkaz lze přenechat čtenáři.)

2·10. *Buď M matice typu (k, m); buď $Q \subset E_m$, $s \in E_m$, $b \in E_k$. Pro každé $t \in E_m$ položme $\Psi(t) = M(t - s) + b$. Potom $H(\Psi(Q)) = D(M)\, L(Q)$.*

Důkaz. Buď napřed $k \geqq m$ a buďte A, B, C matice z odst. 2·8. Položme $\Psi_1(t) = B(t - s)$, $\Psi_2(x) = Cx$, $\Psi_3(y) = Ay + b$. Zobrazení Ψ_1, Ψ_3 jsou podle 2·4 isometrická a je $\Psi(Q) = \Psi_3(\Psi_2(\Psi_1(Q)))$. Podle 1·6, 1·17 a 2·9 je $H(\Psi(Q)) = H(\Psi_2(\Psi_1(Q))) = L(\Psi_2(\Psi_1(Q))) = D(C) \,.\, L(\Psi_1(Q))$, $L(\Psi_1(Q)) = H(\Psi_1(Q)) = H(Q) = L(Q)$ a podle 2·4 je $D(M) = D(CB) = D(C) \,.\, D(B) = D(C)$; je tedy opravdu $H(\Psi(Q)) = D(M) \,.\, L(Q)$.

Buď nyní $k < m$. Podle 1·18 je $H(\Psi(Q)) = 0$; protože sloupce matice M jsou lineárně závislé, je podle 2·2 $D(M) = 0$, takže tvrzení opět platí.

3

V této části dokážeme větu o výpočtu Hausdorffovy míry hladké m-rozměrné plochy v E_k a větu o transformaci m-rozměrného integrálu při hladkých zobrazeních z E_m do E_k.

3·1. Úmluvy a označení. V dalším bude stále G neprázdná otevřená množina v E_m a $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_k]$ bude zobrazení třídy C_1 množiny G do E_k. (To znamená, že funkce Φ_j mají v G spojité derivace 1. řádu.) Pro $t = [t_1, \ldots, t_m] \in G$ označíme symbolem $M_\Phi(t)$ matici typu (k, m) o prvcích $[\partial\Phi_i(t)/\partial t_j]$. Místo $D(M_\Phi(t))$ budeme psát $D_\Phi(t)$; tato funkce je zřejmě spojitá na G. Pro každé $s \in G$ definujeme zobrazení Ψ_s prostoru E_m do E_k předpisem $\Psi_s(t) = \Phi(s) + M_\Phi(s) . (t - s)$.

Symbolem H budeme značit m-rozměrnou Hausdorffovu vnější míru v E_k a symbolem L Lebesgueovu vnější míru v E_m. Dále položíme $\mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}(E_r)$ (= nejmenší σ-algebra, obsahující všechny uzavřené množiny prostoru E_r).

V lemmatech 3·2—3·4 bude C neprázdná kompaktní část množiny G.

3·2. *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li*

$$s, t, v \in C\,, \quad |t - s| < \delta\,, \quad |v - s| < \delta\,, \tag{3,1}$$

potom

$$|\Phi(v) - \Phi(t) - (\Psi_s(v) - \Psi_s(t))| \leqq \varepsilon|v - t|\,. \tag{3,2}$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ s touto vlastností: Je-li $s \in C$, $w \in E_m$, $|w - s| < \delta$, potom $w \in G$ a

$$|\text{grad}\, \Phi_i(w) - \text{grad}\, \Phi_i(s)| < \varepsilon k^{-\frac{1}{2}} \quad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

Platí-li nyní (3,1), leží úsečka U o koncových bodech t, v v G a existují body $w^1, \ldots, w^k \in U$ takové, že $\Phi_i(v) - \Phi_i(t) = (v - t) . \text{grad}\, \Phi_i(w^i) = (v - t) . \text{grad}\, \Phi_i(s) + (v - t) . (\text{grad}\, \Phi_i(w^i) - \text{grad}\, \Phi_i(s))$. Protože $|w^i - s| < \delta$, je

$$|\Phi_i(v) - \Phi_i(t) - (v - t) . \text{grad}\, \Phi_i(s)| \leqq |v - t|\, \varepsilon k^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{3,3}$$

Protože $(v - t) . \text{grad}\, \Phi_i(s)$ je i-tá složka vektoru $\Psi_s(v) - \Psi_s(t)$, plyne z (3,3) ihned (3,2).

3·3. *Existuje takové $\beta \in E_1$, že platí implikace*

$$t, v \in C \Rightarrow |\Phi(v) - \Phi(t)| \leqq \beta|v - t|\,.$$

Důkaz. Určeme $\varepsilon > 0$ tak, aby množina $C^* = \{x; x \in E_m, \varrho(x, C) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon\}$ byla částí G. Položme $\alpha_i = \max |\text{grad}\, \Phi_i(t)|$ $(t \in C^*)$, $\alpha = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\kappa = \max |\Phi(v) - \Phi(t)|$ $(t, v \in C)$, $\beta = \max(\alpha, \kappa/\varepsilon)$. Nechť $t, v \in C$. Je-li $|v - t| \leqq \varepsilon$, je úsečka o koncových bodech t, v části C^* a je tedy $|\Phi_i(v) - \Phi_i(t)| \leqq \alpha_i|v - t|$, $|\Phi(v) - \Phi(t)| \leqq \alpha|v - t|$; je-li $|v - t| > \varepsilon$, je zřejmě $|\Phi(v) - \Phi(t)| \leqq \kappa \leqq \beta\varepsilon$. V obou případech je tudíž $|\Phi(v) - \Phi(t)| \leqq \beta|v - t|$.

3·4. *Předpokládejme, že zobrazení Φ je na množině C prosté a že je $D_\Phi > 0$ na C. Potom existuje otevřená množina V a číslo β tak, že $C \subset V \subset G$ a že platí implikace*

$$t, v \in V \Rightarrow |v - t| \leqq \beta|\Phi(v) - \Phi(t)|. \tag{3,4}$$

Důkaz. Předpokládejme opak. Potom ke každému přirozenému číslu n existují takové body $t^n, v^n \in G$, které mají od množiny C vzdálenost menší než $1/n$, že

$$|v^n - t^n| > n|\Phi(v^n) - \Phi(t^n)|. \tag{3,5}$$

Položme $y^n = (v^n - t^n)/|v^n - t^n|$. Můžeme předpokládat, že posloupnosti $\{t^n\}$, $\{v^n\}$, $\{y^n\}$ jsou konvergentní; nechť $t^n \to t$, $v^n \to v$, $y^n \to y$. Snadno zjistíme, že $t, v \in C$, a z (3,5) plyne, že $\Phi(t) = \Phi(v)$; je tedy $t = v$. Protože matice o řádcích grad $\Phi_i(t)$ má lineárně nezávislé sloupce a $|y| = 1$, existuje takový index i, že y . grad $\Phi_i(t) \neq 0$. Pro všechna dost velká n je $|\Phi(v^n) - \Phi(t^n)| \geqq |\Phi_i(v^n) - \Phi_i(t^n)| = |(v^n - t^n)$ . . grad $\Phi_i(w^n)| = |v^n - t^n| \, . \, |y^n$. grad $\Phi_i(w^n)|$, kde w^n je bod úsečky o koncových bodech t^n, v^n; je tedy $w^n \to t$. Z (3,5) nyní plyne, že $|y^n$. grad $\Phi_i(w^n)| < 1/n$ a tedy y . grad $\Phi_i(t) = 0$, což je spor.

3·5. *Existují kompaktní množiny $Q_1, Q_2, \ldots$ takové, že $\bigcup Q_n = \Phi(G)$ a že $H(Q_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Důkaz. Existují kompaktní množiny $C_1, C_2, \ldots$, pro něž $\bigcup C_n = G$. Položíme-li $Q_n = \Phi(C_n)$, potom podle 1·12, 3·3 a 1·6 je $H(Q_n) < \infty$. Ostatní je zřejmé.

3·6. *Buď A H-měřitelná množina, $A \subset \Phi(G)$. Potom existují takové množiny $R, S \in \mathfrak{B}_k$, že $R \subset A \subset S \subset \Phi(G)$, $H(S - R) = 0$.*

Důkaz. Buďte Q_n množiny z předešlého lemmatu. Existují $P_n, S_n \in \mathfrak{B}_k$ tak, že $Q_n \cap A \subset S_n \subset Q_n$, $Q_n - A \subset P_n \subset Q_n$, $H(S_n) = H(Q_n \cap A)$, $H(P_n) = H(Q_n - A)$. Položme $R_n = Q_n - P_n$, $R = \bigcup R_n$, $S = \bigcup S_n$. Je $R_n \subset Q_n \cap A \subset S_n$, $H(R_n) = H(Q_n) - H(P_n) = H(Q_n) - H(Q_n - A) = H(Q_n \cap A) = H(S_n)$ a tedy $H(S_n - R_n) = 0$. Protože $S - R \subset \bigcup(S_n - R_n)$, je též $H(S - R) = 0$. Ostatní je zřejmé.

3·7. *Buď Ψ prosté spojité zobrazení otevřené množiny $V \subset E_m$ do E_k. Buď $B \in \mathfrak{B}_m$, $B \subset V$. Potom je $\Psi(B) \in \mathfrak{B}_k$.*

Důkaz. Zvolme kompaktní množinu $K \subset V$ a označme symbolem $\mathfrak{A}$ systém všech množin $A \subset E_m$, pro něž $\Psi(A \cap K) \in \mathfrak{B}_k$. Systém $\mathfrak{A}$ zřejmě obsahuje všechny uzavřené množiny; z toho, že Ψ je prosté, snadno plyne, že $\mathfrak{A}$ je σ-algebra. Je tedy $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{A}$, $\Psi(B \cap K) \in \mathfrak{B}_k$. Existují kompaktní množiny $K_1, K_2, \ldots$ takové, že $\bigcup K_n = V$. Odtud plyne, že $\Psi(B) = \bigcup \Psi(B \cap K_n) \in \mathfrak{B}_k$.

3·8. *Buď $V \in \mathfrak{B}_m$; buď Ψ spojité zobrazení množiny V do E_k a buď $B \in \mathfrak{B}_k$. Potom $\Psi^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_m$.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{A}$ systém všech $A \subset E_k$, pro něž $\Psi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_m$. Snadno se zjistí, že $\mathfrak{A}$ je σ-algebra. Je-li množina F uzavřená v E_k, je množina $M = \Psi^{-1}(F)$ uzavřená ve V, tedy $M = V \cap \overline{M} \in \mathfrak{B}_m$, $F \in \mathfrak{A}$. Odtud plyne, že $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{A}$, $\Psi^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_m$.

3·9. Označení. Buď $A \subset \Phi(G)$ a buď χ_A charakteristická funkce množiny A. Položíme

$$P(A) = \int_G \chi_A(\Phi(t))\, D_\Phi(t)\, dt\,,$$

pokud tento integrál existuje.

Poznámka. Buď $G^* = \{t;\, D_\Phi(t) > 0\}$. (Množina G^* je zřejmě otevřená.) Snadno se zjistí, že $P(A)$ má smysl právě tehdy, když množina $M = G^* \cap \Phi^{-1}(A)$ je měřitelná; je potom $P(A) = \int_M D_\Phi(t)\, dt$.

3·10. *Nechť zobrazení Φ je prosté, $D_\Phi > 0$ na G a nechť existuje $P(A)$. Potom je množina A H-měřitelná a $H(A) = P(A)$.*

Důkaz. Je-li $A = \emptyset$, je tvrzení zřejmě správné; buď tedy $A \neq \emptyset$. Položme $M = \Phi^{-1}(A)$.

I. Předpokládejme napřed, že množina M je omezená a že splňuje vztahy $M \in \mathfrak{B}_m$, $\overline{M} \subset G$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje takové $\delta_1 > 0$, že platí implikace

$$(3,6) \qquad (s, t \in M, |s - t| < \delta_1) \Rightarrow |D_\Phi(s) - D_\Phi(t)| < \varepsilon\,.$$

Dále buď $\kappa = \sup\{D_\Phi(t);\, t \in M\}$ a buď η takové číslo z intervalu $(0, 1)$, že $\kappa((1 - \eta)^{-m} - 1) < \varepsilon$. Podle 3·2 a 3·4 existuje takové $\delta_2 > 0$, že pro všechna $s, t, v \in M$, která splňují nerovnosti $|t - s| < \delta_2$, $|v - s| < \delta_2$, platí vztah

$$(3,7) \qquad |\Phi(v) - \Phi(t) - (\Psi_s(v) - \Psi_s(t))| \leqq \eta|\Phi(v) - \Phi(t)|\,.$$

Buď nyní $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dále buď $R \in \mathfrak{B}_m$, $\emptyset \neq R \subset M$, $\operatorname{diam} R < \delta$; položme $T = \Phi(R)$. Zvolme $s \in R$ a pro každé $x \in T$ definujme $\varphi(x) = \Psi_s(\Phi^{-1}(x))$. Protože $\varphi(T) = \Psi_s(R)$, je podle 2·10

$$(3,8) \qquad H(\varphi(T)) = D_\Phi(s)\, L(R) \leqq \kappa\, L(R)\,.$$

Buďte nyní x, y libovolné body množiny T; nechť $x = \Phi(t)$, $y = \Phi(v)$. Protože $t, v \in R$, je podle (3,7) $|y - x - (\varphi(y) - \varphi(x))| \leqq \eta|y - x|$; podle 1·7 a (3,8) je tedy

$$(3,9) \qquad |H(T) - H(\varphi(T))| \leqq ((1 - \eta)^{-m} - 1)\, H(\varphi(T)) \leqq \varepsilon\, L(R)\,.$$

Podle (3,6) je $|H(\varphi(T)) - P(T)| = |\int_R (D_\Phi(s) - D_\Phi(t))\, dt| \leqq \varepsilon\, L(R)$; odtud a z (3,9) plyne, že

$$(3,10) \qquad |H(T) - P(T)| \leqq 2\varepsilon\, L(R)\,.$$

Snadno se zjistí, že existují navzájem disjunktní množiny $R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{B}_m$ takové, že $M = \bigcup R_j$ a že $\operatorname{diam} R_j < \delta$ pro $j = 1, \ldots, n$. Položíme-li $T_j = \Phi(R_j)$, je podle 3·7 $T_j \in \mathfrak{B}_k$ a podle (3,10) máme $|H(T_j) - P(T_j)| \leqq 2\varepsilon\, L(R_j)$; je tedy $|H(A) - P(A)| \leqq$ $\leqq 2\varepsilon\, L(M)$, $H(A) = P(A)$.

II. Vynechme nyní předpoklad, že množina M je omezená a že $\overline{M} \subset G$; předpokládejme však stále, že $M \in \mathfrak{B}_m$. Existují kompaktní množiny $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ takové, že $G = \bigcup C_n$. Položíme-li $M_n = M \cap C_n$, $A_n = \Phi(M_n)$, je podle 3·7 $A_n \in \mathfrak{B}_k$ a podle I je $H(A_n) = P(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Odtud plyne limitním přechodem vztah $H(A) =$ $= P(A)$.

III. Nyní vyšetříme obecný případ. Protože množina M je měřitelná (viz pozn. v odst. 3·9), existují takové množiny $M_1, M_2 \in \mathfrak{B}_m$, že $M_1 \subset M \subset M_2$ a že $L(M_2 -$ $- M_1) = 0$. Položme $A_j = \Phi(M_j)$. Zřejmě $A_1 \subset A \subset A_2$, $P(A_2 - A_1) = 0$. Podle 3·7 je $A_j \in \mathfrak{B}_k$ a podle II je $H(A_2 - A_1) = P(A_2 - A_1) = 0$, $H(A_1) = P(A_1)$. Množina A je tedy H-měřitelná a je $H(A) = H(A_1) = P(A_1) = P(A)$.

3·11. *Buď zobrazení Φ prosté, $D_\Phi > 0$ na G a buď g funkce na množině $\Phi(G)$. Potom je*

$$\int_G g(\Phi(t))\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\Phi(G)} g(x)\, \mathrm{d}H(x)\,,$$

pokud má levá strana smysl.

Důkaz. Podle 3·10 tvrzení platí, když g nabývá jen hodnot 0 a 1. Nyní se lemma snadno dokáže tvořením lineárních kombinací a používáním limitních přechodů.

3·12. Označení. Množinu $R \subset E_k$ nazveme l-rozměrnou rovinou, když existuje bod $z \in E_k$ a l-rozměrný podmodul Q prostoru E_k tak, že R je množina všech bodů tvaru $z + x$, kde $x \in Q$.

3·13. *Buď R l-rozměrná rovina v E_k, $M \subset E_k$, $\operatorname{diam} M < \infty$ a buď $\varepsilon > 0$. Nechť každý bod z M má od R vzdálenost $\leqq \varepsilon$. Potom existují množiny $M_1, \ldots, M_q$ takové, že $M = \bigcup M_j$, $\operatorname{diam} M_j \leqq 3\varepsilon$ $(j = 1, \ldots, q)$ a že pro každé $\alpha \geqq 0$ je*

$$\sum (\operatorname{diam} M_j)^\alpha \leqq \varepsilon^{\alpha - l} \,.\, 3^\alpha \,.\, (\varepsilon + l^{\frac{1}{2}} \,.\, \operatorname{diam} M)^l \,.$$

Důkaz. Je-li $l = 0$, je $\operatorname{diam} M \leqq 2\varepsilon$ a můžeme volit $q = 1$, $M_1 = M$. Buď nyní $l > 0$ a buď S kolmý průmět množiny M do roviny R. Určeme celé číslo n tak, aby platilo $(n - 1)\,\varepsilon \leqq l^{\frac{1}{2}} \,.\, \operatorname{diam} M < n\varepsilon$. Protože množinu S lze isometricky zobrazit do l-rozměrné krychle o hraně $n\varepsilon l^{-\frac{1}{2}}$, existují neprázdné množiny $S_1, \ldots, S_q$ $(q = n^l)$ o průměru $\leqq \varepsilon$ takové, že $S \subset \bigcup S_j$. Buď M_j množina všech bodů z M, které mají od S_j vzdálenost $\leqq \varepsilon$. Snadno se zjistí, že $M = \bigcup M_j$ a že $\operatorname{diam} M_j \leqq 3\varepsilon$ $(j = 1, \ldots, q)$. Pro každé $\alpha \geqq 0$ je tedy $\sum (\operatorname{diam} M_j)^\alpha \leqq \varepsilon^{\alpha - l} \,.\, 3^\alpha \,.\, q\varepsilon^l$. Protože $q\varepsilon^l = (n\varepsilon)^l \leqq (\varepsilon + l^{\frac{1}{2}} \,.$ $.\, \operatorname{diam} M)^l$, je tvrzení dokázáno.

3·14. *Pro množinu* $Z = \{t;\ D_\Phi(t) = 0\}$ *je* $H(\Phi(Z)) = 0$.

Důkaz. Buď C kompaktní množina, $\emptyset \neq C \subset Z$, a buď $\varepsilon \in (0, 1)$. Jestliže ve vztahu (3,2) z lemmatu 3·2 položíme $s = t$, vidíme, že při vhodně zvoleném $\delta \in (0, 1)$ je splněna implikace

$$(3,11) \qquad (t, v \in C,\ |v - t| < \delta) \Rightarrow |\Phi(v) - \Psi_t(v)| \leqq \varepsilon |v - t| .$$

Existují krychle K_n o průměrech $\delta_n < \delta$ tak, že $C \subset \bigcup K_n$, $\sum L(K_n) < 1 + L(C)$, $K_n \cap C \neq \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zvolme $t^n \in C \cap K_n$. Množina $R_n = \Psi_{t^n}(E_m)$ je podle 2·2 rovina o dimensi $l_n < m$. Každý bod množiny $S_n = \Phi(C \cap K_n)$ má podle (3,11) od roviny R_n vzdálenost $\leqq \varepsilon\delta_n$ a je diam $S_n \leqq \beta\delta_n$, kde β je konstanta z lemmatu 3·3. Podle 3·13 existují množiny $M_1^n, \ldots, M_q^n$ (po jednoduchost zápisu nevyznačujeme závislost q na n) takové, že $S_n = \bigcup\limits_j M_j^n$, diam $M_j^n \leqq 3\varepsilon\delta_n < 3\varepsilon$ a $\sum\limits_j (\text{diam } M_j^n)^m \leqq$ $\leqq (\varepsilon\delta_n)^{m-l_n} . 3^m . (\varepsilon\delta_n + l_n^{\frac{1}{2}} . \beta\delta_n)^{l_n} = \varepsilon^{m-l_n} . 3^m . \delta_n^m . (\varepsilon + l_n^{\frac{1}{2}} . \beta)^{l_n} < \varepsilon\delta_n^m . \beta_1$, kde $\beta_1 = 3^m(1 + (m-1)^{\frac{1}{2}} . \beta)^{m-1}$. Je tedy $\sum\limits_{n,j} (\text{diam } M_j^n)^m \leqq \varepsilon\beta_1 \sum\limits_n \delta_n^m = \varepsilon\beta_1 m^{\frac{1}{2}m} \sum\limits_n L(K_n) <$ $< \varepsilon\beta_2$, kde $\beta_2 = \beta_1 m^{\frac{1}{2}m}(1 + L(C))$. Protože $\bigcup\limits_{n,j} M_j^n = \Phi(C)$ a diam $M_j^n < 3\varepsilon$, je $H(\Phi(C), 3\varepsilon) < \varepsilon\gamma_m\beta_2$ a tedy $H(\Phi(C)) = 0$.

Zvolme nyní kompaktní množiny $C_1, C_2, \ldots$ tak, aby bylo $\bigcup C_n = G$, a položme $Z_n = Z \cap C_n$. Množiny Z_n jsou zřejmě kompaktní; jak jsme právě dokázali, je $H(\Phi(Z_n)) = 0$ pro každé n. Protože $\Phi(Z) = \bigcup \Phi(Z_n)$, je též $H(\Phi(Z)) = 0$.

3·15. Věta. *Buď f taková funkce na množině G, že existuje integrál* $I(f) = \int_G f(t) \,.\, D_\Phi(t)\,\mathrm{d}t$. *Potom pro H-skoro všechna $x \in \Phi(G)$ má smysl součet*

$$\sigma(x; f) = \sum f(t) \quad (t \in G,\ \Phi(t) = x)\ ;$$

dále existuje integrál $J(f) = \int_{\Phi(G)} \sigma(x; f)\,\mathrm{d}H(x)$ *(funkce $\sigma(x; f)$ je tedy H-měřitelná) a rovná se integrálu $I(f)$.*

Důkaz. I. Předpokládejme napřed, že $D_\Phi > 0$ a $f \geqq 0$ na G. Podle 3·4 (kde za C volíme jednobodovou množinu) má každý bod z G okolí, na kterém je zobrazení Φ prosté. Existují tedy takové otevřené množiny $U_1, U_2, \ldots$, že $\bigcup U_n = G$ a že Φ je na každé z nich prosté. Položme $M_n = U_n - \bigcup\limits_{j<n} U_j$, $I_n = \int_{M_n} f(t)\, D_\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Množiny M_n jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je G; je tedy $I(f) = \sum I_n$. Definujme nyní na množině $\Phi(G)$ funkce g_n takto: Je-li $x = \Phi(t)$, $t \in M_n$, buď $g_n(x) = f(t)$; jinak buď $g_n(x) = 0$. Zřejmě je $g_n(x) = 0$ pro $x \in \Phi(G) - \Phi(U_n)$, $g_n(\Phi(t)) = f(t)$ pro $t \in M_n$, $g_n(\Phi(t)) = 0$ pro $t \in U_n - M_n$. Odtud a z 3·11 plyne, že $I_n = \int_{U_n} g_n(\Phi(t))\, D_\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\Phi(U_n)} g_n(x)\,\mathrm{d}H(x) = \int_{\Phi(G)} g_n(x)\,\mathrm{d}H(x)$, takže $I(f) = \sum I_n = \int_{\Phi(G)} (\sum g_n(x))\,\mathrm{d}H(x)$. Snadno se však zjistí, že $\sum g_n(x) = \sigma(x; f)$. Tím je věta pro náš případ dokázána.

II. Vynechme nyní předpoklad, že $f \geqq 0$ (předpokládejme však stále, že $D_\Phi > 0$). Položme $f_1 = \max(f, 0)$, $f_2 = \max(-f, 0)$. Potom existují integrály $I(f_j)$, aspoň jeden z nich je konečný a podle I je $I(f_j) = J(f_j)$ $(j = 1, 2)$. Aspoň jedna z funkcí $\sigma(x; f_j)$ je tedy konečná pro H-skoro všechna x; pro tato x má pak smysl součet $\sigma(x; f)$ a rovná se $\sigma(x; f_1) - \sigma(x; f_2)$. Je tudíž $I(f) = I(f_1) - I(f_2) = J(f_1) - J(f_2) = J(f)$.

III. Nyní vyšetříme obecný případ. Položme $G^* = \{t; D_\Phi(t) > 0\}$, $Z = G - G^*$. Zřejmě je $I(f) = \int_{G^*} f(t)\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t$ a podle II je $I(f) = \int_{\Phi(G^*)} \sigma^*(x; f)\, \mathrm{d}H(x)$, kde $\sigma^*(x; f) = \sum f(t)$ $(t \in G^*, \Phi(t) = x)$. Pro každé $x \in \Phi(G) - \Phi(Z)$, pro něž má smysl $\sigma^*(x; f)$, je zřejmě $\sigma^*(x; f) = \sigma(x; f)$; dále je $\Phi(G) - \Phi(G^*) \subset \Phi(Z)$ a podle 3·14 je $H(\Phi(Z)) = 0$. Odtud plyne ihned, že

$$\int_{\Phi(G^*)} \sigma^*(x; f)\, \mathrm{d}H(x) = \int_{\Phi(G)} \sigma(x; f)\, \mathrm{d}H(x) = J(f)\,.$$

Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Buď M měřitelná množina, $M \subset G$; buď f charakteristická funkce množiny M. Ze vztahu $\Phi(M) = \{x; \sigma(x; f) > 0\}$ vidíme, že množina $\Phi(M)$ je H-měřitelná.

3·16. *Označení.* Pro každé $x \in \Phi(G)$ buď $N(x)$ počet prvků množiny $\Phi^{-1}(x)$ (je-li tato množina nekonečná, klademe $N(x) = \infty$).

3·17. *Funkce N je H-měřitelná.*

Důkaz. Jestliže ve větě 3·15 položíme $f(t) = 1$, vidíme, že $N(x) = \sigma(x; f)$.

3·18. Věta. *Buď g funkce na množině $\Phi(G)$. Položme $Y = \{x; N(x) = \infty\}$. Předpokládejme, že nastane některý z těchto dvou případů:*

1. *Existuje integrál $I = \int_G g(\Phi(t))\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t$.*

2. *Existuje integrál $J = \int_{\Phi(G)} g(x)\, N(x)\, \mathrm{d}H(x)$ a funkce g je H-měřitelná na množině Y.*

Potom oba integrály I, J existují a $I = J$.

Důkaz. **I.** Nechť existuje integrál I. Pro každé $x \in \Phi(G)$ je zřejmě $g(x)$. $N(x) = \sum g(\Phi(t))$ $(t \in G, \Phi(t) = x)$; podle 3·15 je tedy $I = J$.

II. Nechť existuje integrál J. Předpokládejme napřed, že g je charakteristická funkce množiny $A \subset \Phi(G)$. Množina A je zřejmě H-měřitelná, neboť $A = \{x; x \in \Phi(G), g(x)\, N(x) > 0\}$. Podle 3·6 existují takové množiny $A_j \in \mathfrak{B}_k$, že $A_1 \subset A \subset A_2 \subset \Phi(G)$ a že $H(A_2 - A_1) = 0$. Buď g_j charakteristická funkce množiny A_j. Potom je $g_j(\Phi(t))$ charakteristická funkce množiny $\Phi^{-1}(A_j)$; podle 3·8 je $\Phi^{-1}(A_j) \in \mathfrak{B}_m$. Položíme-li tedy $h_j(t) = g_j(\Phi(t))\, D_\Phi(t)$, existuje integrál $\int_G (h_2(t) - h_1(t))\, \mathrm{d}t$ a podle I se rovná $\int_{\Phi(G)} (g_2(x) - g_1(x))\, N(x)\, \mathrm{d}H(x)$; tento integrál se však zřejmě rovná nule. Je tedy $h_1(t) = h_2(t)$ skoro všude. Protože funkce $h(t) = g(\Phi(t))\, D_\Phi(t)$ splňuje vztah $h_1 \leqq h \leqq h_2$, je též $h(t) = h_1(t)$ skoro všude. Odtud snadno plyne, že integrál I existuje (a podle I se rovná J). Obvyklým způsobem se nyní vztah $I = J$ dokáže pro každou H-měřitelnou funkci g, pro niž existuje integrál J. Z existence integrálu J však podle 3·17 plyne, že funkce g je H-měřitelná na $\Phi(G) - Y$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka 1. Jestliže integrál J konverguje, je zřejmě $g(x) = 0$ pro H-skoro všechna $x \in Y$ a je tedy $I = J$.

Poznámka 2. Buď $A \subset \Phi(G)$. Z dokázané věty ihned plyne, že integrál $P(A)$, definovaný v odst. 3·9, existuje, jestliže množina A je H-měřitelná; množina $\Phi^{-1}(A)$ však nemusí být měřitelná, jak ukazuje příklad v odst. 3·21 (kde $k = m = 1$ a zobrazení Φ je dokonce prosté). Je-li $D_\Phi > 0$ všude na G, pak ovšem A je H-měřitelná právě tehdy, když $\Phi^{-1}(A)$ je měřitelná (viz poznámku v odst. 3·9 a poznámku za důkazem věty 3·15).

3·19. Věta. *Buď zobrazení Φ prosté a buď g funkce na množině $\Phi(G)$. Potom platí*

$$\int_G g(\Phi(t))\, D_\Phi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\Phi(G)} g(x)\, \mathrm{d}H(x)\,,$$

jakmile má aspoň jedna strana této rovnosti smysl.

(Plyne z 3·18.)

3·20. *Buď $M \subset (0, 1)$, $L(M) > 0$. Potom M obsahuje neměřitelnou množinu.*

Důkaz. Definujme v E_1 ekvivalenci $\sim$ takto: $x \sim y$ znamená, že $x - y$ je racionální. Buď $\mathfrak{T}$ systém všech tříd této ekvivalence. Pro každé $T \in \mathfrak{T}$ je zřejmě $T \cap (0, 1) \neq \emptyset$. Buď A množina, která z každého průniku $T \cap (0, 1)$ obsahuje právě jeden prvek. Dále buď $r_1, r_2, \ldots$ prostá posloupnost, obsahující všechna racionální čísla z intervalu $(-1, 1)$. Pro každé přirozené číslo n buď A_n množina všech $x + r_n$, kde $x \in A$. Snadno se zjistí, že $\bigcup A_n \subset (-1, 2)$ a že pro $p \neq n$ je $A_p \cap A_n = \emptyset$. Každé $y \in E_1$ lze psát ve tvaru $x + r$, kde $x \in A$ a r je racionální; je-li $y \in (0, 1)$, je zřejmě $|r| = |y - x| < 1$. Vidíme, že $(0, 1) \subset \bigcup A_n$. Položme nyní $M_n = M \cap A_n$ a předpokládejme, že všechny množiny M_n jsou měřitelné; odvodíme spor. Protože $M = \bigcup M_n$ a $L(M) > 0$, existuje q, pro něž $L(M_q) > 0$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď dále S_n množina všech $x - r_q + r_n$, kde $x \in M_q$. Každá z množin S_n je měřitelná a splňuje vztah $S_n \subset A_n$, $L(S_n) = L(M_q)$; protože $\bigcup S_n \subset (-1, 2)$, $S_p \cap S_n = \emptyset$ pro $p \neq n$, je jednak $L(\bigcup S_n) \leqq 3$, jednak $L(\bigcup S_n) = \sum L(S_n) = \infty$. Tímto sporem je dokázáno, že některá z množin $M \cap A_n$ je neměřitelná.

3·21. Příklad. Buď $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost reálných čísel, která je hustá v intervalu $G = (0, 1)$. Pro každé přirozené n buď φ_n funkce, která je spojitá v E_1 a má tyto vlastnosti: Je-li $t \leqq a_n$ nebo $t \geqq a_n + 3^{-n}$, je $\varphi_n(t) = 0$; je-li $a_n < t < a_n + 3^{-n}$, je $0 < \varphi_n(t) < 2^{-n}$. Pro $t \in G$ buď $\varphi(t) = \sum \varphi_n(t)$, $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau$. Snadno se zjistí, že funkce $\varphi = \Phi' = D_\Phi$ je spojitá a že zobrazení Φ je prosté. Buď $Z = \{t;\, D_\Phi(t) = 0\}$. Protože $G - Z \subset \bigcup (a_n, a_n + 3^{-n})$, je $L(G - Z) \leqq \sum 3^{-n} = \frac{1}{2}$ a tedy $L(Z) \geqq \frac{1}{2}$. Podle 3·20 existuje neměřitelná množina $R \subset Z$; položme $A = \Phi(R)$. Podle 3·14 je $L(A) = 0$, ale množina $\Phi^{-1}(A) = R$ není měřitelná.

3·22. Poznámka. Věty, které byly dokázány v tomto článku, platí pro plochy mnohem obecnější než jsou plochy definované pomocí zobrazení třídy C_1; příslušné důkazy vyžadují však jemnějších prostředků. Čtenář, zajímající se o tyto otázky, najde formulace příslušných vět o povrchu plochy např. v referátech A. S. Besicovitche [1] (pro dvojrozměrné plochy) a H. Federera [3] (pro m-rozměrné plochy). Velmi obecné věty o transformaci vícerozměrných integrálů jsou odvozeny v monografii T. Radó a P. V. Reichelderfera [6].

Literatura

[1] *A. S. Besicovitch*: Parametric surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. *56* (1950), 288—296.

[2] *I. Černý, J. Mařík*: Integrální počet, Praha 1962.

[3] *H. Federer*: Measure and area, Bull. Amer. Math. Soc. *58* (1952), 306—378.

[4] *O. Haupt, G. Aumann*: Differential- und Integralrechnung III, Berlin 1938.

[5] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.

[6] *T. Radó, P. V. Reichelderfer*: Continuous transformations in Analysis, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[7] *B. Riečan*: Poznámka o k-rozmernej miere v E_n, Mat.-fyz. časopis SAV, *11*, 1, 1961, 14—17.

[8] *S. Saks*: Theory of the integral, New York.

[9] *A. Sard*: The equivalence of n-measure and Lebesgue measure in E_n, Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943), 758—759.

[10] *R. Sikorski*: Funkcje rzeczywiste I, Warszawa 1958.

[11] *V. Šťastný*: Závěrečná práce na mat.-fys. fakultě, šk. r. 1960/61.

Резюме

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕРЕ ХАУСДОРФА НА ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ЙОСЕФ КРАЛ (*Josef Král*) и ЯН МАРЖИК (*Jan Mařík*), Прага

Статья имеет методический характер. Начиная с определения меры Хаусдорфа, авторы устанавливают её основные свойства (в §§ 1, 2) и, наконец (в §3), доказывают следующие теоремы, в которых предполагается, что G — открытое множество в m-мерном евклидовом пространстве E_m, $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_k]$ — отображение класса C_1 множества G в E_k, $k \geqq m$, H обозначает m-мерную меру Хаусдорфа и $D(t)$ квадратный корень из определителя с элементами

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial t_j} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Теорема. *Если f — функция на G и если существует интервал Лебега $A = \int_G f(t)\, D(t)\, \mathrm{d}t$, то сумма*

$$\sigma(x, f) = \sum_t f(t) \quad (t \in G,\ \Phi(t) = x)$$

имеет смысл для почти всех (относительно H) $x \in \Phi(G)$, существует интеграл $\int_{\Phi(G)} \sigma(x, f)\, \mathrm{d}H(x)$ и равняется интегралу A.

Теорема. *Обозначим через $N(x)$ число точек множества $\Phi^{-1}(x)$ и положим $Y = \{x;\ N(x) = +\infty\}$. Пусть g — функция на множестве $\Phi(G)$, удовлетворяющая некоторому из следующих требований:*

1. *Существует интеграл $I = \int_G g(\Phi(t))\, D(t)\, \mathrm{d}t$.*
2. *Существует интеграл $J = \int_{\Phi(G)} g(x)\, N(x)\, \mathrm{d}H(x)$ и g измерима (H) на Y.*

Тогда интегралы I, J оба существуют и $I = J$.

От читателя требуется лишь знакомство с основными свойствами меры и интеграла, включая теорему Фубини. Нигде не используется теорема о замене переменных в интеграле, которая таким образом получается как частный случай указанных теорем (совпадение m-мерной меры Хаусдорфа с мерой Лебега в E_m доказано в § 1).

Summary

INTEGRATION WITH RESPECT TO THE HAUSDORFF MEASURE OVER A SMOOTH SURFACE

JOSEF KRÁL and JAN MAŘÍK, Praha

The paper is methodical in character. Starting with the definition of the Hausdorff measure the authors derive its basic properties (§§ 1, 2) and, at last (§ 3), they prove the following theorems, where G is an open set in E_m (= the Euclidean m-space), $\Phi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_k]$ is a map of G into E_k $(k \geqq m)$ with Φ_i possessing continuous first order derivatives on G, $D(t)$ is the square root of the determinant with elements

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial t_j} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Theorem. *If f is a function on G such that $A = \int_G f(t)\, D(t)\, \mathrm{d}t$ exists, then*

$$\sigma(x, f) = \sum_t f(t)\ (t \in G, \Phi(t) = x)$$

is meaningful almost everywhere (H) on $\Phi(G)$, $\int_{\Phi(G)} \sigma(x, f)\, \mathrm{d}H(x)$ exists and is equal to A; here H is the m-dimensional Hausdorff measure.

Theorem. *Denote by $N(x)$ the number of points in $\Phi^{-1}(x)$ and put $Y = \{x;\ N(x) = +\infty\}$. If g is a function on $\Phi(G)$ and either $I = \int_G g(\Phi(t))\, D(t)\, \mathrm{d}t$ exists or $J = \int_{\Phi(G)} g(x)\, N(x)\, \mathrm{d}H(x)$ exists and g is measurable (H) on Y, then I, J both exist and $I = J$.*

The reader is supposed to be acquainted with basic properties of measure and integral including Fubini's theorem. Theorems concerning transformation of integrals are nowhere used and are thus obtained as a particular case of the above theorems (a proof showing that the m-dimensional Hausdorff measure in E_m coincides with the Lebesgue measure is included in § 1).