Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

О ФУНКЦИЯХ, ГРАФЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ЗАМКНУТЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

ПАВЕЛ КОСТЫРКО и ТИБОР ШАЛАТ (Pavel Kostyrko a Tibor Šalát), Братислава

(Поступило в редакцию 7/VIII 1963 г.)

В настоящей статье изучаются некоторые свойства функций, определенных на метрическом пространстве X (с метрикой ϱ_1) со значениями в метрическом пространстве Y (с метрикой ϱ_2), графы которых являются замкнутыми подмножествами пространства $X \times Y$ (с метрикой $\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}$). Показано, что в случае $Y = (-\infty, +\infty)$ (с евклидовой метрикой) эти функции являются функциями первого класса Бэра.

В теории функций известна следующая теорема (см. [1], стр. 119, упр. 3):

Теорема. *Если f — непрерывное отображение метрического пространства X с метрикой ϱ_1 в метрическое пространство Y с метрикой ϱ_2, то граф G_f отображения f будет замкнутым подмножеством пространства $X \times Y$ ($X \times Y$ с метрикой $\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}$).*

Если Y не является компактом, то, как показывает следующий пример, предыдущая теорема не допускает обращения.

Пример. $X = \langle 0, 1\rangle$, $Y = \langle 0, +\infty)$ (всюду евклидова метрика), $f(x) = 1/x$ для $x \in (0, 1\rangle$ и $f(0) = 0$.

Пусть (X, ϱ_1), (Y, ϱ_2), $(X \times Y, \varrho)$ имеют прежнее значение. Обозначим через $U(X, Y)$ множество всех тех отображений f пространства X в пространство Y, графы G_f которых являются замкнутыми подмножествами пространства $X \times Y$.

В дальнейшем $K(a, \delta)$ $(\overline{K(a, \delta)})$ означает отркытую (замкнутую) сферу с центром в точке $a \in Z$ и радиусом $\delta > 0$ в метрическом пространстве Z.

Теорема 1. *Пусть $f \in U(X, Y)$, пусть x_n, $x \in X$, $x_n \neq x$, $x_n \to x$. Пусть множество членов последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ компактно (в Y). Тогда $f(x_n) \to f(x)$.*

Доказателство. Воспользуемся доказательством от противного. Итак, пусть существует $K(f(x), \delta)$ так, что

(1) $$f(x_{n_i}) \notin K(f(x), \delta) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Тогда из условий теоремы следует существование $x_{n_{i_j}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\{f(x_{n_{i_j}})\}_{j=1}^{\infty}$ сходится в Y. Так как $f \in U(X, Y)$, мы получаем $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_{i_j}}) = f(x)$, что противоречит допущению (1).

Простым следствием доказанной теоремы является следующий известный из литературы результат (см. [1], стр. 119).

Теорема 2. *Пусть $f \in U(X, Y)$, пусть Y – компакт. Тогда отображение f непрерывно на X.*

Определение 1. Пусть f – отображение метрического пространства X в метрическое ространство Y. Мы будем говорить, что точка $a \in X$ является точкой нерегулярности отображения f, если существует такая последовательность точек $x_n \in X$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, что множество членов последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ некомпактно в Y. Обозначим в дальнейшем символом N_f множество всех точек нерегулярности функции f и символом D_f множество всех точек разрыва функции f. Тогда, очевидно, $N_f \subset D_f$.

Теорема 3. *Если $f \in U(X, Y)$, то $D_f = N_f$.*

Следствие. *Если $f \in U(X, Y)$, то f будет непрерывным отображением тогда и только тогда, если оно не имеет точек нерегулярности.*

Доказательство. Так как для всякого отображения f имеет место $N_f \subset D_f$, то достаточно показать, что из $f \in U(X, Y)$ следует $D_f \subset N_f$. Поступая от противного, допустим, что существует $x \in D_f$, $x \notin N_f$ (причем $f \in U(X, Y)$). Так как $x \in D_f$, точка x не может быть изолированной точкой пространства X. Пусть $\{x_n\}_1^{\infty}$ – последовательность точек пространства X с такими свойствами: $x_n \neq x$, $x_n \to x$. Так как $x \notin N_f$, то множество членов последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ компактно в Y. Итак, на основании теоремы 1 $f(x_n) \to f(x)$, так что $x \notin D_f$, что противоречит допущению.

Теорема 4. *Пусть $f \in U(X, Y)$ и пусть каждая точка $y \in Y$ имеет (некоторую) компактную окрестность. Тогда D_f – замкнутое множество.*

Доказателство. Пусть x_0 – предельная точка множества $D_f(=N_f)$. Покажем, что $x_0 \in N_f(= D_f)$. Существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из N_f так, что $x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$. Пусть $K(f(x_0), \delta)$ – компактная окрестность точки $f(x_0)$. На основании определения N_f для каждого натурального числа k существует последовательность $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ точек из X так, что $x_{k,n} \neq x_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_{k,n} \to x_k (n \to \infty)$ и множество членов последовательности $\{f(x_{k,n})\}_{n=1}^{\infty}$ не компактно в Y. Подберем теперь к каждому k индекс n_k так, чтобы $\varrho(x_k, x_{k,n_k}) < 1/k$, $x_{k,n_k} \neq x_0$ и $f(x_{k,n_k}) \notin K(f(x_0), \delta)$. Первому условию можно удовлетворить ввиду того, что $x_k \neq x_0$, а возможность выполнения второго условия следует из того, что множество членов каждой из последовательностей

$\{f(x_{k,n})\}_{n=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ некомпактно в Y. Очевидно, $x_{k,n_k} \to x_0(k \to \infty)$, $x_{k,n_k} \neq$ $\neq x_0(k = 1, 2, \ldots)$ и $f(x_{k,n_k})$ не сходится к $f(x_0)$, откуда $x_0 \in D_f$.

Везде в дальнейшем мы положим $Y = E_1 = (-\infty, +\infty)$, $\varrho_2(x, y) = |x - y|$ и вместо $U(X, E_1)$ будем писать лишь $U(X)$. Обратим внимание на то, что в таком случае точки нерегулярности функции f, отображающей X в $E_1 =$ $= (-\infty, +\infty)$, совпадают с точками неограниченности функции f ($a \in X$ является точкой неограниченности функции f, если для каждого $M > 0$ и каждого $\delta > 0$ существует $x \in K(a, \delta)$ так, что $|f(x)| > M$).

Следующая теорема описывает множество D_f с топологической точки зрения.

Теорема 5. *Пусть $f \in U(X)$. Пусть каждая сфера $K(x, \delta)$ $(x \in X, \delta > 0)$ является множеством второй категории. Тогда D_f нигде неплотно в X.*

Доказательство. Мы уже видели (см. теорему 3), что $D_f = N_f$. Положим $O_f = X - N_f$. В теореме 4 было показано, что N_f замкнуто в X. O_f является множеством всех тех $x_0 \in X$, которые обладают следующим свойством: для x_0 существуют $M > 0$, $\delta > 0$ так, что для $x \in K(x_0, \delta)$ имеет место $|f(x)| \leqq M$. Итак, достаточно показать, что O_f плотно в X. Докажем это от противного. Пусть O_f неплотно в X. Тогда существует $K(x_0, \delta)$ $(x_0 \in X, \delta > 0)$ так, что $O_f \cap K(x_0, \delta) = \emptyset$. Итак, во всех точках множества $K(x_0, \delta)$ функция f неограничена. Положим

$$T_n = [x \in K(x_0, \delta) : |f(x)| \leqq n] ;$$

очевидно, $K(x_0, \delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Не может быть, чтобы все T_n были нигде неплотными в $K(x_0, \delta)$, ибо тогда $K(x_0, \delta)$ было бы множеством первой категории, что противоречит условию теоремы. Итак, существует натуральное число n так, что T_n не является нигде неплотным в $K(x_0, \delta)$. Отсюда следует, что существует $K(x_0', \delta') \subset K(x_0, \delta)$ так, что T_n плотно в $K(x_0', \delta')$. Так как f неограничена в x_0, существует $z_0 \in K(x_0', \delta')$ так, что $|f(z_0)| > n$. Так как T_n плотно в $K(x_0', \delta')$, существует $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in T_n$, $x_k \to z_0$. Так как $|f(x_k)| \leqq n$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, существует $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ так, что $f(x_{k_s}) \to v$, $|v| \leqq n$ и, значит,

$$(x_{k_s}, f(x_{k_s})) \in G_f \ (s = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad (x_{k_s}, f(x_{k_s})) \to (z_0, v) \notin G_f ,$$

ввиду того, что $|v| \leqq n$ и $|f(z_0)| > n$. Мы получили противоречие с условием теоремы.

Следствие. *Пусть I означает (конечный или бесконечный) интервал на прямой; тогда для всякой функции $f \in U(I)$ множество D_f нигде неплотно на интервале I.*

Дальше (в теоремах 6, 7, 8) мы ограничимся действительными функциями действительного переменного, т.е. положим $Y = (-\infty, +\infty) = E_1$, $X \subset E_1$ и $\varrho_2(x, y) = |x - y|$, $\varrho_1(x', y') = |x' - y'|$.

Функция $f \in U(X)$ может иметь „богатое" множество точек разрыва D_f. Это показывает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $A > 0$. Тогда существует $f \in U(\langle -A, A\rangle)$ так, что $|D_f| > 0$ и $\overline{\overline{D}}_f = c$ ($|M|$ означает меру Лебега, а $\overline{\overline{M}}$ — мощность множества M, c означает мощность континуума).*

Доказательство. Из результатов работы [2] следует, что существует совершенное и нигде не плотное множество W в интервале $\langle - A, A\rangle$ так, что $|W| > 0$, $\overline{\overline{W}} = c$. Мы получим его из интервала $\langle - A, A\rangle$, выпуская счетную систему $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ открытых интервалов, попарно не пересекающихся. Определим теперь функцию f на интервале $\langle - A, A\rangle$ так: для $x \in W$ положим $f(x) = 0$, а для $x \in I_n = (a_n, b_n)$ положим $f(x) = n + [(x - a_n)(b_n - x)]^{-1}$. Покажем, что G_f замкнуто в $\langle -A, A\rangle \times E_1$. Пусть $(x_n, y_n) \in G_f$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и пусть

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)\,. \tag{2}$$

Очевидно, $y_0 = 0$ или $y_0 > 1$.

а) Пусть $y_0 = 0$. Если бы для бесконечно многих n было $x_n \in \langle - A, A\rangle - W$, то для этих n было бы $y_n > 1$, и не могло бы иметь места (2). Итак, существует n_1 так, что для $n > n_1$ будет $x_n \in W$. Но тогда, в силу замкнутости W, имеем $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in W$ и $(x_0, y_0) \in G_f$.

б) Пусть $y_0 > 1$ и пусть справедливо (2). Если бы для бесконечно многих n было $x_n \in W$, то для этих n было бы $y_n = 0$, и не могло бы иметь места (2). Следовательно, существует n_2 так, что для $n > n_2$ будет $x_n \in \langle - A, A\rangle - W$. Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность и так как смежные интервалы множества W попарно непересекающиеся, существует $n_3 > n_2$ так, что для $n > n_3$ точки x_n содержатся в каком-нибудь одном смежном интервале, скажем в (a_k, b_k). Тогда $x_0 \in \langle a_k, b_k\rangle$. Не может быть $x_0 = a_k$ или $x_0 = b_k$. Действительно, если бы, напр., $x_0 = a_k$, то из определения f на (a_k, b_k) ясно, что существует $n_4 > n_3$ так, что для $n > n_4$ уже будет $y_n > y_0 + 1$ и не могло бы иметь местия (2). Итак, $x_0 \in (a_k, b_k)$. Тогда из непрерывности f в интервале (a_k, b_k) следует $y_0 = f(x_0)$ и, следовательно, $(x_0, y_0) \in G_f$.

Далее очевидно, что $D_f = W$; значит, $\overline{\overline{D}}_f = \overline{\overline{W}} = c$ и $|D_f| = |W| > 0$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Пусть f определена на $X \subset E_1$ и пусть $a \in E_1$. Число t назовем предельным числом функции f в точке a справа (слева), если существует $\{x_n\}_1^{\infty}$, $x_n \in X$, $x_n > a$ $(x_n < a)$, $x_n \to a$ так, что $t = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Символом $L_{a+}(L_{a-})$ мы обозначим множество всех предельных чисел функции f в точке a справа (слева), множество $L_a = L_{a+} \cup L_{a-}$ назовем множеством всех предельных чисел функции f в точке a, элементы множества L_a будем называть предельными числами функции f в точке a. Если a — изолированная точка множества X, то очевидно $L_a = \emptyset$.

Теорема 7. *Пусть $f \in U(X)$, $a \in D_f$. Тогда*

$$(*) \qquad L_a \cap \{-\infty, +\infty\} \neq \emptyset,$$

$$(**) \qquad L_a \cap (-\infty, +\infty) - \{f(a)\} = \emptyset.$$

Доказательство. Часть (*) утверждения этой теоремы непосредственно следует из теоремы 3, часть (**) докажем от противного. Пусть $l \in L_a \cap \cap (-\infty, +\infty) - \{f(a)\}$, значит $l \in E_1$, $l \neq f(a)$. Тогда, очевидно, существует $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ так, что $f(x_n) \to l$. Построим $(x_n, f(x_n)) \in G_f$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда, очевидно,

$$(x_n, f(x_n)) \to (a, l) \notin G_f,$$

что противоречит условию.

Теорема 8. *Пусть $f \in U(X)$, $X \subset E_1$. Тогда $D_f = A \cup M$, где A — счетное множество и M — множество со следующим свойством: если $a \in M$, то имеет место один и только один из следующих случаев:*

I. $L_a = L_{a+} \cap L_{a-} = \{-\infty, f(a), +\infty\}$, II. $L_a = L_{a+} \cap L_{a-} = \{-\infty, f(a)\}$,
III. $L_a = L_{a+} \cap L_{a-} = \{f(a), +\infty\}$.

Доказательство. Обозначим через A_1 множество всех тех $a \in D_f$, для которых $(L_{a+} - L_{a-}) \cup (L_{a-} - L_{a+}) \neq \emptyset$. Тогда, как известно (см. [3]), A_1 будет счетным множеством. Итак, для $a \in D_f - A_1$ имеем $L_a = L_{a+} = L_{a-}$. Обозначим теперь через A_2 множество всех тех $a \in D_f - A_1$, для которых множество $L_a = L_{a+} \cap L_{a-}$ не содержит числа $f(a)$. Покажем, что тогда $(a, f(a))$ — изолированная точка множества G_f. Вследствие теоремы 7 существует $\delta > 0$ так, что для $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$, $x \neq a$ будет $|f(x) - f(a)| > 1$. Отсюда ясно, что

$$G_f \cap ((a - \delta, a + \delta) \times (f(a) - 1, f(a) + 1)) = \{(a, f(a))\}.$$

Так как $X \times E_1$ — метрическое пространство со счетным базисом, то множество всех изолированных точек множества G_f счетно, вследствие чего и A_2 будет счетным множеством.

Положим теперь $A = A_1 \cup A_2$, $M = D_f - A$. Справедливость утверждения уже непосредственно следует из теоремы 7. Доказательство теоремы закончено.

В связи с изучением системы $U(X)$ возникает вопрос: являются ли все функции системы $U(X)$ функциями первого класса Бэра? Нетрудно убедиться, что всякая действительная функция $f \in U(X)$ (X — метрическое пространство) будет функцией первого класса Бэра, как видно из следующей теоремы:

Теорема 9. *Пусть f — действительная функция, определенная на метрическом пространстве X, пусть $f \in U(X)$. Тогда f будет предельной функцией последовательности непрерывных (на X) функций f_n таких, что для всякого $n = 1, 2, 3, \ldots$ и всякого $x \in X$ имеет место $|f_n(x)| \leqq n$.*

Доказателство. Пусть $x_0 \in X$; положим $F_n = G_f \cap (\overline{K(x_0, n)} \times \langle -n, n \rangle)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. F_n является по условию теоремы замкнутым и ограниченным в $X \times E_1$ и поэтому его проекция в X, т.е. множество

$$X_n = [x \in X : \sum_{y \in E_1} (x, y) \in F_n] \subset \overline{K(x_0, n)},$$

замкнуто в X.

Определим теперь на X функции f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом: для $x \in X_n$ положим $g_n(x) = f(x)$. Очевидно, функция g_n непрерывна на X_n (а именно на основании теоремы 2, так как ее графом является множество F_n, замкнутое в $X_n \times E_1$) и принимает значения, лежащие в компакте $\langle -n, n \rangle$. Пусть f_n — непрерывное продолжение непрерывной (на X_n) функции g_n на все пространство X. Такое непрерывное продолжение существует вследствие известной теоремы Титце (см. [4], стр. 117—118) и по той же теореме будет $|f_n(x)| \leqq n$ на X, так как $|f(x)| \leqq n$ на X_n. Если бы было $X_n = \emptyset$, то мы положили бы $f_n(x) \equiv 0$ на X; для достаточно большого $n (n > n_0)$ уже очевидно, что $X_n \neq \emptyset$, и мы воспользуемся предыдущим построением при определении f_n. Очевидно, $X_1 \subset X_2 \subset \subset X_3 \subset \ldots$ и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Если теперь $x \in X$, то существует m так, что $x \in \in X_n (n \geqq m)$ и тогда $f(x) = f_n(x)$ $(n \geqq m)$, следовательно, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Этим и заканчивается доказательство теоремы.

Литература

[1] *R. Sikorski:* Funkcje rzeczywiste I. Warszawa, 1958.

[2] *T. Šalát:* O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi. Acta fac. rer. nat. Univ. Com. II, *1—2*, (1957), 71—76.

[3] *M. W. H. Young:* La symétrie de structure des fonctions de variables reélles. Bull. des sci. math. *52* (1928), 265—280.

[4] *K. Kuratowski:* Topologie I. Warszawa, 1958.

Výťah

O FUNKCIÁCH, KTORÝCH GRAFY SÚ UZAVRETÉ MNOŽINY

P. Kostyrko a T. Šalát, Bratislava

V práci sa vyšetrujú niektoré vlastnosti takých zobrazení metrického priestoru (X, ϱ_1) do metrického priestoru (Y, ϱ_2), ktorých grafy sú uzavretými podmnožinami priestoru $(X \times Y, \varrho)$, $\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}$. Označme znakom $U(X)$ množinu všetkých týchto zobrazení. Väčšina výsledkov práce sa týka špeciálneho prípadu, keď $Y = = (-\infty, +\infty)$, $\varrho_2(x, y) = |x - y|$.

V ďalšom uvedieme niektoré z týchto výsledkov (všade v ďalšom je $Y = (-\infty, +\infty)$, $\varrho_2(x, y) = |x - y|$).

Veta. *Ak $f \in U(X)$, potom množina D_f všetkých bodov nespojitosti funkcie f je uzavretá v X a je totožná s množinou N_f všetkých tých bodov, v ktorých je f neohraničená (ak $x_0 \in N_f$, potom pre každé $\delta > 0$ je $\sup |f(x)| = +\infty$, $x \in K(x_0, \delta)$).*

Veta. *Ak každá guľa $K(x_0, \delta) = [x \in X : \varrho_1(x, x_0) < \delta]$ je množinou druhej kategórie, potom D_f je riedka v X.*

Veta. *Existuje $f \in U(\langle -A, A \rangle)$ ($A > 0$, $\varrho_1(x, y) = |x - y|$), tak, že množina D_f je nespočítateľná mohutnosti kontinua, kladnej Lebesgueovej miery.*

Veta. *Každá funkcia $f \in U(X)$ je funkciou prvej Baireovskej triedy.*

Zusammenfassung

ÜBER DIE FUNKTIONEN, DEREN GRAPHEN ABGESCHLOSSENE MENGEN SIND

P. Kostyrko und T. Šalát, Bratislava

In dieser Arbeit studiert man einige Eigenschaften derjenigen Abbildungen des metrischen Raumes (X, ϱ_1) in den metrischen Raum (Y, ϱ_2), deren Graphen abgeschlossene Untermengen des Raumes $(X \times Y, \varrho)$, $\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}$ sind. Bezeichnen wir die Mengen aller dieser Abbildungen mit $U(X)$. Die Mehrheit der Ergebnisse betrifft den Fall $Y = (-\infty, +\infty)$, $\varrho_2(x, y) = |x - y|$.

Im folgenden führen wir einige dieser Ergebnisse an (im folgenden ist überall $Y = (-\infty, +\infty)$, $\varrho_2(x, y) = |x - y|$).

Satz. *Wenn $f \in U(X)$, dann ist die Menge D_f aller Unstetigkeitspunkte dieser Funktion eine (in X) abgeschlossene Menge, die mit der Menge N_f aller derjenigen Punkte identisch ist, in denen die Funktion f unbeschränkt ist (wenn $x_0 \in N_f$ ist, dann ist für jedes $\delta > 0$ $\sup |f(x)| = +\infty$, $x \in K(x_0, \delta)$).*

Satz. *Wenn jedes $K(x_0, \delta) = [x \in X : \varrho_1(x, x_0) < \delta]$ eine Menge der zweiten Kategorie ist, dann ist D_f in X nirgendsdicht.*

Satz. *Es existiert eine Funktion $f \in U(\langle -A, A \rangle)$ ($A > 0$, $\varrho_1(x, y) = |x - y|$) so, dass die Menge D_f eine unabzählbare Menge von Mächtigkeit des Kontinuums und vom positiven Lebesgueschen Mass ist.*

Satz. *Jede Funktion $f \in U(X)$ ist die Funktion der ersten Baireschen Klasse.*