Časopis pro pěstování matematiky

Petr Mandl

Elementární důkaz ergodické vlastnosti procesů množení a úmrtí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 354--358

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117513

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ ERGODICKÉ VLASTNOSTI PROCESŮ MNOŽENÍ A ÚMRTÍ

PETR MANDL, Praha

(Došlo dne 1. srpna 1963)

Použitím základních vlastností konečných soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je dokázána konvergence pravděpodobností přechodu při $t \to \infty$.

Práce obsahuje jednoduchý důkaz existence $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ pravděpodobností přechodu homogenního Markovova procesu množení a úmrtí (viz [1]). Metody studia jednoznačnosti řešení soustavy rovnic (1), vedoucí k integrální representaci pravděpodobností $P_{ij}(t)$ (viz [3]) dávají možnost ověřiti tuto jejich vlastnost. Jiné důkazy (viz [2]) se opírají o Tauberovy věty a silnou Markovovu vlastnost. Předností předloženého důkazu je rovněž to, že jej lze snadno rozšířiti na oboustranně neohraničené procesy.

Proces množení a úmrtí se stavy 0, 1, 2, ... je zpravidla zadán nekonečnou maticí intensit

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0, & \lambda_0, & 0, & \dots \\ \mu_1, & -(\lambda_1 + \mu_1), & \lambda_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Matici pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t) = \|P_{ij}(t)\|_{i,j=0}^{\infty}$, vyhovující soustavě Kolmogorovových diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} (1) \qquad & P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & P'_{ik}(t) = \lambda_{k-1} P_{ik-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) P_{ik}(t) + \mu_{k+1} P_{ik+1}(t), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & P_{ij}(0) = \delta_{ij} \text{ (symbol Kroneckera)}, \end{aligned}$$

možno získati následujícím způsobem (připouští se nerovnost $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) < 1$):

Utvořme matici typu $n + 1 \times n + 1$

$$Q_n = \begin{pmatrix} -\lambda_0, & \lambda_0, & 0, & \dots \\ \mu_1, & -(\lambda_1 + \mu_1), & \lambda_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots, & 0, & \lambda_{n-1}, & -(\lambda_n + \mu_n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

a označme $\|{}^nP_{ij}(t)\|_{i,j=0}^n = \exp Q_n t$. Platí ${}^nP_{ij}(t) \geqq 0$. Nechť $r_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$ splňuje pro $t \geqq 0$ nehomogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} r'_0(t) &= -\lambda_0 \, r_0(t) + \mu_1 \, r_1(t), \\ &\dots \\ r'_k(t) &= \lambda_{k-1} \, r_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) \, r_k(t) + \mu_{k+1} \, r_{k+1}(t), \\ &\dots \\ r'_n(t) &= \lambda_{n-1} \, r_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) \, r_n(t) + \varphi(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Řádky matice $\exp Q_n t$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy odpovídající (3), a proto můžeme psáti

$$r_j(t) = \sum_{k=0}^{n} r_k(0) \, {}^nP_{kj}(t) + \int_0^t {}^nP_{nj}(t - \tau) \, \varphi(\tau) \, d\tau. \tag{4}$$

Pro $j \leqq n < m$ ${}^mP_{ij}(t)$ vyhovují soustavě (3) s $\varphi(t) = \mu_{n+1} \, {}^mP_{in+1}(t)$. Ze (4) vidíme, že platí ${}^mP_{ij}(t) \geqq {}^nP_{ij}(t)$. Existuje tedy $\lim_{n\to\infty} {}^nP_{ij}(t) = P_{ij}(t)$, která dává řešení (1).

Stacionární řešení soustavy (1), tj. řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 x_0 + \mu_1 x_1, \\ &\dots \\ 0 &= \lambda_{k-1} x_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) \, x_k + \mu_{k+1} x_{k+1}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

má tvar

$$x_k = \text{konst} \, \pi_k, \tag{6}$$

kde

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \text{ pro } k \geqq 1.$$

Věta 1. *Pro všechna i, k existují $\lim_{t\to\infty} P_{ik}(t)$. Když $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \infty$, jsou tyto limity rovny nule.*

Důkaz. Budiž $\{P_i, \ i = 0, 1, \dots\}$ posloupnost reálných čísel. Položme pro j, $k \leqq n$

$$ {}^nP_j(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \, {}^nP_{ij}(t), \quad {}^nF_k(t) = \sum_{j=0}^{k} {}^nP_j(t), \tag{7}$$
$$ {}^nG_k(t) = {}^nF'_k(t).$$

Jelikož ${}^{n}P_j(t)$ splňují soustavu (3) s $\varphi(t) \equiv 0$, dostáváme derivováním a sečtením pro ${}^{n}G_k(t)$ soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & {}^{n}G_0'(t) = -(\lambda_0 + \mu_1)\,{}^{n}G_0(t) + \mu_1\,{}^{n}G_1(t)\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& {}^{n}G_k'(t) = \lambda_k\,{}^{n}G_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_{k+1})\,{}^{n}G_k(t) + \mu_{k+1}\,{}^{n}G_{k+1}(t)\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& {}^{n}G_n'(t) = \lambda_n\,{}^{n}G_{n-1}(t) - \lambda_n\,{}^{n}G_n(t)\,.
\end{aligned}
$$

Matice této soustavy je stejného typu, jako matice Q_n. Platí tedy zejména, že z nerovností ${}^{n}G_k(0) \leqq 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ plyne ${}^{n}G_k(t) \leqq 0$ pro $t \geqq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Z (3) také vyplývá, že platí

$$
(9) \qquad {}^{n}G_k(0) = -\lambda_k P_k + \mu_{k+1} P_{k+1}\,.
$$

Označme pro $m = 0, 1, 2, \ldots$ ${}^{n}_{m}F_k(t)$, ${}^{n}_{m}G_k(t)$ veličiny (7), odpovídající počátečnímu vektoru $P_k = \pi_k$ pro $k \leqq m$, $P_k = 0$ pro $k > m$. Z (9) dostáváme pro $n > m$ ${}^{n}_{m}G_k(0) = 0$ pro $k \neq m$, ${}^{n}_{m}G_m(0) = -\lambda_m\pi_m$. Vidíme, že pro $t \geqq 0$, ${}^{n}_{m}G_k(t) = {}^{n}_{m}F_k'(t) \leqq 0$, tj. ${}^{n}_{m}F_k(t)$ a tedy také ${}^{\infty}_{m}F_k(t) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^{n}_{m}F_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{k} \pi_i P_{ij}(t)$ je nerostoucí funkcí t. Platí vztah

$$
P_{ik}(t) = \frac{1}{\pi_i} \{ {}^{\infty}_{i}F_k(t) - {}^{\infty}_{i-1}F_k(t) - {}^{\infty}_{i}F_{k-1}(t) + {}^{\infty}_{i-1}F_{k-1}(t) \}\,.
$$

Z tohoto vyjádření $P_{ik}(t)$ jako lineární kombinace nerostoucích ohraničených funkcí plyne existence $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ik}(t)$.

Tyto limity pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ vyhovují soustavě (5), jejíž všechna řešení mají tvar (6). Odtud vyplývá, že za předpokladu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k = \infty$, je $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ik}(t) = 0$. Tím je důkaz ukončen.

Je známo (viz [3]), že při platnosti nerovnosti $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k < \infty$, je matice $\boldsymbol{P}(t)$ jednoznačně určena soustavou rovnic (1) v případě, že $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\pi_k)^{-1} = \infty$. Abychom zachovali elementární způsob výkladu, dokážeme větu 2 za předpokladu poněkud silnějšího.

Věta 2. *Nechť* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k < \infty$, $\liminf\limits_{k\to\infty} \lambda_k\pi_k = 0$. *Potom* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) = 1$ *pro* $t \geqq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\boldsymbol{P}(t)$ *je jediná matice pravděpodobností přechodu splňující* (1) *a platí* $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t) = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k)^{-1} \pi_j$ *pro* $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Důkaz. Soustavě (3) je vyhověno, položíme-li $r_j(t) \equiv \pi_j$, $\varphi(t) \equiv \mu_{n+1}\pi_{n+1} = \lambda_n\pi_n$. Použijeme-li (4) a předpokladů věty, dostáváme

$$|\pi_j - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t)| = \lim_{n\to\infty} |\pi_j - \sum_{k=0}^{n} \pi_k {}^nP_{kj}(t)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t {}^nP_{nj}(t-\tau)\, \pi_n\lambda_n \, d\tau \leqq \liminf_{n\to\infty} t\pi_n\lambda_n = 0 .$$

Vidíme tedy, že je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) = \pi_j . \tag{10}$$

Ze vztahu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k (\sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j$$

plyne, že musí být $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$ pro všechna i.

Pro každou matici pravděpodobností přechodu $\|\hat{P}_{ij}(t)\|_{i,j=0}^{\infty}$, splňující (1), platí $\hat{P}_{ij}(t) \geqq {}^nP_{ij}(t)$, jak se můžeme přesvědčiti s použitím (4). Je tedy také $P_{ij}(t) \leqq \hat{P}_{ij}(t)$. Jelikož platí zároveň $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{ij}(t) \leqq 1$, musí být $P_{ij}(t) = \hat{P}_{ij}(t)$. Matice $\boldsymbol{P}(t)$ je tedy rovnicemi (1) jednoznačně určena.

Z (10) plyne pro libovolné i

$$\pi_i P_{ij}(t) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) = \pi_j ,$$

tj. $P_{ij}(t) \leqq \pi_j/\pi_i$. Funkce $P_{ij}(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ jsou tedy majorisovány členy konvergentní řady a můžeme provésti záměnu pořadí jejich sumace a limitního přechodu. Dostáváme

$$1 = \lim_{t\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) .$$

Tento vztah, spolu s (6) dává $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = (\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k)^{-1} \pi_j$, čímž jsou tvrzení věty dokázána.

Oboustranně neohraničenému procesu, jehož stavy jsou všechna celá čísla, odpovídá matice intensit

$$\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ldots, 0, \mu_k, -(\lambda_k + \mu_k), \lambda_k, 0, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$. Položme

$$\pi_{-i} = \frac{\mu_0}{\lambda_{-1}} \frac{\mu_{-1}}{\lambda_{-2}} \dots \frac{\mu_{-i+1}}{\lambda_{-i}} \quad \text{pro} \quad i > 0\,.$$

Když $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi_k < \infty$, lze použíti předložených metod i v tomto případě.

Literatura

[1] *Feller W.*: An introduction to probability theory and its applications. New York 1950.

[2] *Chung K. L.*: Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin 1960.

[3] *Karlin S., McGregor J.*: The differential equations of birth — and — death processes and the Stieltjes moment problem. Trans. of Amer. Math. Soc. *85* (1957), 489—546.

Резюме

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСРВО ЭРГОДИЧЕСКОГО СВОЙСТВА ПРОЦЕССОВ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

Работа содержит доказательство существования пределов $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ вероятностей перехода однородного марковского процесса гибели и размножения. Доказательство использует только основные свойства конечных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Теми же методами доказано достаточное условие для однозначности системы уравнений Колмогорова.

Summary

AN ELEMENTARY PROOF OF THE ERGODIC PROPERTY OF BIRTH — AND — DEATH PROCESSES

Petr Mandl, Praha

The paper contains a proof of existence of limits $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ of transition probabilities of a homogeneous birth — and — death Markov process. The proof bases only on fundamental properties of finite systems of linear differential equations with constant coefficients. By the same methods a sufficient condition for uniqueness of the Kolmogorov system of equations is derived.