Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Jiřina

Poznámka k nekonečně dělitelným nezáporným rozložením

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 347--353

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117512`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

POZNÁMKA K NEKONEČNĚ DĚLITELNÝM NEZÁPORNÝM ROZLOŽENÍM

MILOSLAV JIŘINA, Praha

(Došlo dne 22. května 1963)

V článku je odvozen novým způsobem obecný vzorec pro logaritmus charakteristické funkce nekonečně dělitelného rozložení, koncentrovaného na nezáporné části přímky resp. k-rozměrného euklidovského prostoru.

Je známo, že logaritmus charakteristické funkce f nekonečně dělitelného pravděpodobnostního rozložení P, soustředěného na nezáporné části reálné přímky (tj. takového, že $P(\langle 0, \infty)) = 1$) má obecný tvar

$$\log f(t) = it\gamma + \int_{(0,\infty)} (e^{itx} - 1)\, N(\mathrm{d}x)\,, \tag{1}$$

kde γ je libovolná nezáporná konstanta a N je libovolná nezáporná míra na $(0, \infty)$ taková, že

$$N(\langle 1, \infty)) < \infty\,, \tag{2}$$

$$\int_{(0,1)} x\, N(\mathrm{d}x) < \infty\,. \tag{3}$$

Toto tvrzení bylo poprvé uveřejněno v [1] pouze se stručným návodem k důkazu. Podrobný důkaz byl uveřejněn v [2] (viz také [3]; v [2] je dokázáno trochu slabší tvrzení). V [2] se vychází z obecného Lévyho vzorce a dokazuje se, že záporná větev a normální složka jsou v případě $P(\langle 0, \infty)) = 1$ rovny nule a že pro kladnou větev platí vztah (3). (Obecný vzorec zaručuje pouze $\int_{(0,1)} x^2\, N(\mathrm{d}x) < \infty$.) Důkaz tohoto vztahu je nejobtížnější. Návod v [1] doporučuje stejný postup. V tomto článku se ukazuje, že tvrzení lze dokázat podstatně jednodušeji přímou konstrukcí bez použití obecného vzorce. Hlavní myšlenka tohoto nového důkazu spočívá v použití Laplaceovy transformace místo Fourierovy, což umožňuje zkonstruovat přímo míru N s vlastností (3). Ze srovnání s důkazem obecného vzorce, uvedeným v [4] (Důkaz věty 1 v § 18), je patrné, že hlavní úlohu zde hraje různé řádové chování funkce $1 - e^{-x}$ a funkce $\mathrm{Re}(1 - e^{ix}) = 1 - \cos x$ v okolí bodu 0.

Protože důkaz, že charakteristické funkci $f(t)$ definované vztahem (1) odpovídá nezáporné nekonečně dělitelné rozložení, je zřejmý (aproximace konvolucí Poissonových rozložení), dokážeme pouze následující tvrzení, ve kterém značí R množinu všech nezáporných čísel, R^+ množinu všech kladných čísel a Z množinu všech komplexních čísel s nekladnou reálnou složkou.

Věta 1. *Nechť P je nekonečně dělitelná pravděpodobnostní míra na R a položme pro každé $z \in Z$*

$$f(z) = \int_R e^{zx} P(\mathrm{d}x) . \tag{4}$$

Pak existuje nezáporná konstanta γ a nezáporná míra N na R^+ splňující podmínky (2) a (3) taková, že

$$\log f(z) = z\gamma + \int_{R^+} (e^{zx} - 1)\, N(\mathrm{d}x) . \tag{5}$$

Poznámka. Jako pro charakteristickou funkci lze i pro Laplaceovu transformaci f definovanou vztahem (4) dokázat, že je v komplexní polorovině Z spojitá a různá od nuly a že existuje na Z právě jedna spojitá funkce g taková, že $f = \exp g$ a $g(0) = 0$. V celém článku značí $\log f$ tuto funkci g. Stejné úvahy platí i v k-rozměrném případě (věta 2).

Důkaz věty 1. Existují pravděpodobnostní míry P_n na R, pro které

$$n \int_R (e^{zx} - 1)\, P_n(\mathrm{d}x) \underset{n}{\rightarrow} \log f(z)$$

stejnoměrně v každé omezené podmnožině poloroviny Z. (Viz [4], vztah (5) v § 17 a začátek důkazu věty 1 v § 18 pro ryze imaginární z; pro komplexní $z \in Z$ se dokáže stejně.) Pro každou borelovskou množinu A v R položme

$$G_n(A) = n \int_A \frac{x}{1 + x}\, P_n(\mathrm{d}x)$$

a dále položme

$$I_n(z) = \int_{R^+} h(z, x)\, G_n(\mathrm{d}x) , \tag{6}$$

kde

$$h(z, x) = (1 - e^{zx}) \frac{1 + x}{x} \quad \text{pro} \quad z \in Z \quad \text{a} \quad x \in R^+ .$$

Pak

$$I_n(z) \underset{n}{\rightarrow} - \log f(z) \tag{7}$$

stejnoměrně v každé omezené podmnožině množiny Z. Položme $z = -1$; existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je

$$- \log f(-1) + 1 \geqq \int_{R^+} h(-1, x)\, G_n(\mathrm{d}x),$$

a protože $h(-1, x) \geqq 1$ pro všechna $x > 0$, platí pro $n > n_0$ nerovnost

$$G_n(R) = G_n(R^+) \leqq 1 - \log f(-1)\,. \tag{8}$$

Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Existuje n_1 tak, že pro $n > n_1$, všechna $s \in \langle -1, 0 \rangle$ a všechna $X > 0$ platí

$$- \log f(s) + \varepsilon \geqq \int_{\langle X, \infty)} h(s, x)\, G_n(\mathrm{d}x)\,.$$

Integrováním podle s v intervalu $\langle -1/X, 0 \rangle$ dostaneme

$$- X \int_{-1/X}^{0} \log f(s)\, \mathrm{d}s + \varepsilon \geqq \int_{\langle X, \infty)} \frac{1+x}{x} \left[1 - \frac{1 - e^{-x/X}}{x/X} \right] G_n(\mathrm{d}x) \geqq$$
$$\geqq e^{-1}\, G_n(\langle X, \infty))\,,$$

neboť $(1 - e^{-y})/y \leqq 1 - e^{-1}$ pro $y \geqq 1$. Volíme-li tedy $X_0 > 0$ tak, aby

$$\max_{-(1/X_0) \leqq s \leqq 0} - f(s) < \varepsilon\,,$$

pak

$$G_n(\langle X, \infty)) \leqq 2e\varepsilon \tag{9}$$

pro všechna $X \geqq X_0$ a $n \geqq n_1$.

Vzhledem k (8) a (9) lze z posloupnosti měr G_n vybrat posloupnost G_{n_j} konvergující slabě k nějaké nezáporné a konečné míře G na R, tj. tak, že

$$\int_R g(x)\, G_{n_j}(\mathrm{d}x) \underset{j}{\to} \int_R g(x)\, G(\mathrm{d}x) \tag{10}$$

pro každou spojitou a omezenou funkci g na R. Jestliže položíme $h(z, 0) = -z$, je $h(z, x)$ spojitá na R a protože $G_n(\{0\}) = 0$ pro všechna n, platí vzhledem k (6), (7) a (10)

$$\log f(z) = - \int_R h(z, x)\, G(\mathrm{d}x) = z\, G(\{0\}) + \int_{R^+} (e^{zx} - 1) \frac{1+x}{x}\, G(\mathrm{d}x)\,.$$

Položíme-li $G(\{0\}) = \gamma$ a $N(A) = \int_A [(1 + x)/x]\, G(\mathrm{d}x)$ pro každou borelovskou množinu $A \subset R^+$, dostaneme ihned tvrzení věty 1.

Obdobným způsobem je možno dokázat i zobecnění věty 1 na k-rozměrný případ. Pozměňme označení tak, že tentokrát bude R značit množinu všech k-rozměrných vektorů $(x_1, \ldots, x_k)$ s nezápornými souřadnicemi x_i, $R^+ = R - \{\bar{0}\}$, kde $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$, a Z množinu všech vektorů $(z_1, \ldots, z_k)$, jejichž souřadnice z_i jsou komplexní čísla s nekladnou reálnou částí. Dále pro $\delta > 0$ položme $K(\delta) = \langle 0, \delta) \times \ldots \times \langle 0, \delta) \subset R$ a pro $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R$ a $z = (z_1, \ldots, z_k) \in Z$ definujme $zx = \sum_{i=1}^{k} x_i z_i$ a $|x| = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Věta 2. *Při právě zavedeném označení platí tvrzení věty 1 i v k-rozměrném případě, přičemž $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in R$ je nějaký vektor s nezápornými souřadnicemi a N nezáporná míra na R^+ taková, že*

$$N(R^+ - K(1)) < \infty, \tag{11}$$

$$\int_{K(1)-\{\bar{0}\}} |x| \, N(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{12}$$

Důkaz. Obdobně jako v důkaze věty 1 položme

$$G_n(A) = n \int_A \frac{|x|}{1 + |x|} P_n(\mathrm{d}x)$$

a $I_n(z)$ definujme pro všechna $z \in Z$ opět vztahem (6), přičemž nyní

$$h(z, x) = (1 - e^{zx}) \frac{1 + |x|}{|x|} \quad \text{pro} \quad x \neq (0, \ldots, 0).$$

Platí opět vztah (7) a obdobným způsobem lze dokázat pro dostatečně velká n nerovnosti

$$G_n(R) \leqq - \log f(-1, \ldots, -1),$$

$$e^{-1} G_n(R - K(X)) \leqq - X \int_{-1/X}^{0} \log f(s, \ldots, s) \, \mathrm{d}s + \varepsilon,$$

ze kterých plyne, že existuje M tak, že

$$G_n(R) < M \text{ pro všechna } n \tag{13}$$

a že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $X_0 > 0$ tak, že

$$G_n(R - K(X)) < \varepsilon \text{ pro všechna } X \geqq X_0 \text{ a všechna } n. \tag{14}$$

Proti jednorozměrnému případu nastává nyní určitá potíž, způsobená tím, že funkci $h(z, x)$ nelze dodefinovat spojitě v bodě $\{\bar{0}\}$.*) Použijeme proto pomocné věty, doká-

*) Tatáž potíž se zřejmě vyskytuje i při důkazu obecného k-rozměrného vzorce. Pokud je mi známo, nebyl čistě analytický důkaz obecného k-rozměrného vzorce nikdy uveřejněn.

zané na konci článku. Podle ní lze z G_n vybrat posloupnost G_{m_j} tak, že pro určitou posloupnost $K_j = K(\delta_j)$ s $\delta_j \to 0$ platí

$$(15) \qquad \int_{R-K_j} h(z, x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) \underset{j}{\to} \int_{R^+} h(z, x)\, G(\mathrm{d}x)$$

pro všechna $x \in Z$, přičemž G je určitá nezáporná a konečná míra na R. Položíme-li

$$\gamma_{j,i} = \int_{K_j - \{\bar{0}\}} \frac{1 + |x|}{|x|}\, x_i G_{m_j}(\mathrm{d}x)\,,$$

pak

$$(16) \quad \int_{K_j-\{\bar{0}\}} h(z, x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) + \sum_{i=1}^{k} z_i \gamma_{j,i} = - \int_{K_j-\{\bar{0}\}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(zx)^l}{l!} \frac{1 + |x|}{|x|}\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) \underset{j}{\to} 0\,,$$

neboť integrovaná funkce v posledním integrálu je $O(|x|)$ v okolí bodu $\{\bar{0}\}$, $\delta_j \to 0$ a platí (13). Z (15), (16) a (6) plyne

$$(17) \qquad I_{m_j}(z) + \sum_{i=1}^{k} z_i \gamma_{j,i} \underset{j}{\to} \int_{R^+} h(z, x)\, G(\mathrm{d}x)$$

pro všechna z. Protože podle (7) $I_{m_j}(z) \underset{j}{\to} -\log f(z)$ pro každé z, musí vzhledem k (17) konvergovat nezáporná posloupnost $\{\gamma_{j,i}\}_{j=1}^{\infty}$ k nějaké nezáporné konstantě γ_i ($i = 1, \ldots, k$). Z (15) pak ihned plyne

$$\log f(z) = \sum_{i=1}^{k} z_i \gamma_i + \int_{R^+} (e^{zx} - 1) \frac{1 + |x|}{|x|}\, G(\mathrm{d}x)$$

a z toho transformací míry G vztah (5).

Pomocná věta. *Jestliže posloupnost měr G_n splňuje podmínky* (13) *a* (14), *pak existuje vybraná posloupnost G_{m_j} konvergující slabě ke konečné míře G na R a posloupnost intervalů $K_j = K(\delta_j)$ tak, že $\delta_j \underset{j}{\to} 0$ a*

$$\int_{R-K_j} g(x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) \underset{j}{\to} \int_{R^+} g(x)\, G(\mathrm{d}x)$$

pro každou spojitou a omezenou funkci na R^+.

Důkaz. Z G_n lze vybrat posloupnost G_{n_r} konvergující slabě ke G. Ke každému j existuje $0 < \delta_j < \min\{1/j, \delta_{j-1}\}$ tak, že pro $K_j = K(\delta_j)$ platí

$$(18) \qquad G(\{\bar{0}\}) \leqq G(K_j) < G(\{\bar{0}\}) + \frac{1}{j}$$

a

$$(19) \qquad G_{n_r}(K_j) \underset{r}{\to} G(K_j) \text{ pro všechna } j\,.$$

Vzhledem k (19) je možno najít rostoucí posloupnost r_j tak, že pro $m_j = n_{r_j}$ platí

$$|G_{m_j}(K_j) - G(K_j)| < \frac{1}{j} \text{ pro všechna } j \tag{20}$$

a z (18) a (20) pak plyne, že $|G_{m_j}(K_j) - G(\{\bar{0}\})| < 2/j$, tj.

$$G_{m_j}(K_j) \underset{j}{\to} G(\{\bar{0}\}) . \tag{21}$$

Mějme libovolné $\varepsilon > 0$ a volme j_0 tak, aby $1/j_0 < \varepsilon$. Pak vzhledem k (18) je

$$G(K_{j_0} - \{\bar{0}\}) < \varepsilon \tag{22}$$

a pro $j \geqq j_0$ platí

$$G_{m_j}(K_{j_0} - K_j) = G_{m_j}(K_{j_0}) - G_{m_j}(K_j) \underset{j}{\to}$$
$$\underset{j}{\to} G(K_{j_0}) - G(\{\bar{0}\}) = G(K_{j_0} - \{\bar{0}\}) .$$

Existuje tedy $j_1 \geqq j_0$ tak, že pro $j \geqq j_1$ je

$$G_{m_j}(K_{j_0} - K_j) < G(K_{j_0} - \{\bar{0}\}) + \varepsilon < 2\varepsilon . \tag{23}$$

Jestliže funkce g je spojitá a omezená na R^+, pak vzhledem k (13) a (14) existuje j_2 tak, že pro $j \geqq j_2$ platí

$$\left| \int_{R-K_j} g(x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) - \int_{R-K_j} g(x)\, G(\mathrm{d}x) \right| < \varepsilon . \tag{24}$$

Pro $j \geqq \max\{j_1, j_2\}$ a $M_0 = \sup_{x \in R^+} |g(x)|$ pak vzhledem k (22), (23) a (24) platí

$$\left| \int_{R-K_j} g(x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) - \int_{R^+} g(x)\, G(\mathrm{d}x) \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_{R-K_{j_0}} g(x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) - \int_{R-K_{j_0}} g(x)\, G(\mathrm{d}x) \right| + \left| \int_{K_{j_0}-K_j} g(x)\, G_{m_j}(\mathrm{d}x) \right| +$$
$$+ \left| \int_{K_{j_0}-\{\bar{0}\}} g(x)\, G(\mathrm{d}x) \right| \leqq \varepsilon + 3M_0\varepsilon$$

a tím je dokázána pomocná věta.

Literatura

[1] *В. М. Золотарев:* Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов. Теор. вер. и ее прим. *3* (1958), 197—200.

[2] *G. Baxter, J. M. Shapiro*: On bounded infinitely divisible random variables. Sankhyā *22* (1960), 253—260.

[3] *H. G. Tucker*: Best one-sided bounds for infinitely divisible random variables. Sankhyā *23* (1961), 387—396.

[4] *Б. В. Гнеденко - А. Н. Колмогоров:* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Москва-Ленинград 1949.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА (Miloslav Jiřina), Прага

Статья содержит новое и более простое доказательство известной формулы (1) для логарифма характеристической функции некоторого безгранично делимого закона распределения на полупрямой $\langle 0, \infty)$ или на $\langle 0, \infty)^k$. В отличие от работ [1], [2], доказательство не исходит из общей формулы Левы. Метод заключается в использовании преобразования Лапласа вместо преобразования Фурье.

Summary

A NOTE TO INFINITELY DIVISIBLE AND NON-NEGATIVE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

Miloslav Jiřina, Praha

The paper presents a new and simpler proof of the well-known formula (1) for the logarithm of the characteristic function of an infinitely divisible probability distribution on the semi-axis $\langle 0, \infty)$ or, more generally, on $\langle 0, \infty)^k$. In contrast to [1], [2], the proof does not start from the general Lévy formula. The idea of the proof consists in applying the Laplace transform instead of the Fourier transform.