Josef Kateřiňák

O volném zobrazení prostoru do roviny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 296--311

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117507

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O VOLNÉM ZOBRAZENÍ PROSTORU DO ROVINY

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina

(Došlo dne 3. prosince 1962)

V práci je axiomaticky zavedeno třemi axiomy volné zobrazení eukleidovského prostoru do roviny. Jsou odvozeny základní vlastnosti tohoto zobrazení a ukázána možnost jeho aplikace v deskriptivní geometrii.

Prostorem všude rozumíme trojrozměrný eukleidovský prostor a rovinou rozumíme eukleidovskou rovinu tohoto prostoru.

Definice. *Volným zobrazením prostoru do roviny* ϱ nebo jen stručně *volným zobrazením* budeme nazývat každé zobrazení prostoru do roviny ϱ, které splňuje následující tři axiomy:

(1) *Obrazem každých dvou rovnoběžných přímek jsou buď dvě rovnoběžné přímky nebo dva body.*[1] (Zejména tedy obrazem každé přímky je buď přímka nebo bod.)

(2) *Je-li bod B mezi body A, C* (tj. B je vnitřním bodem úsečky AC), *což budeme značit $B\mu A, C$, potom pro obrazy platí buď $A' \equiv B' \equiv C'$ nebo $B'\mu A', C'$.*

(3) *Obrazem alespoň jedné trojice bodů A, B, C je trojice bodů A', B', C' neležících na jedné přímce.* (Podle (1) ovšem také body A, B, C neleží na jedné přímce.)

Poznámka 1. Volné zobrazení je singulární afinní zobrazení eukleidovského $\mathbf{E}_3$ do $\mathbf{E}_2$ (viz [1], str. 102–105).[2])

1. Nejdříve odvodíme základní vlastnosti volného zobrazení, zejména tzv. větu o určenosti volného zobrazení (věta 5).

Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, budeme obrazy při volném zobrazení označovat čárkou; např. A' znamená obraz bodu A apod.

---

[1]) Slova „dva prvky" všude znamenají dva různé nebo totožné prvky; podobně slova „tři prvky, čtyři prvky atd.".

[2]) Uvážíme-li, že afinní zobrazení lze považovat za projektivní zobrazení, které každému nevlastnímu bodu přiřazuje nevlastní bod, potom axiom (2) je nadbytečný. (Srovnej [2], §§ 47–52 a [9], str. 271–281.)

Avšak pomocí axiomu (2) se mnohem snadněji odvodí základní vlastnosti volného zobrazení, aniž by bylo třeba uvažovat projektivní rozšíření prostoru.

Věta 1. *Obrazem úsečky AB je buď úsečka $A'B'$ nebo bod $A' \equiv B'$.*

Důkaz. Úsečka AB je množina bodů složená právě z bodů A, B a všech bodů $X\mu A, B$.

Je-li $A' \not\equiv B'$, pak podle (2) je obrazem každého bodu X úsečky AB bod X' úsečky $A'B'$. Obráceně, každý bod X' úsečky $A'B'$ je podle (1) obrazem jistého bodu X přímky AB. Protože podle (2) není ani $A\mu X, B$ ani $B\mu A, X$, je X bodem úsečky AB.

Je-li $A' \equiv B'$, pak pro obraz každého bodu X úsečky AB platí podle (2) $A' \equiv \equiv X' \equiv B'$.

Věta 2. *Obrazem dvou rovnoběžných a shodných úseček AB, CD jsou buď dvě rovnoběžné a shodné úsečky $A'B'$, $C'D'$ nebo dva body $A' \equiv B'$, $C' \equiv D'$.*

Důkaz. Je-li $A' \equiv B'$, pak podle (1) též $C' \equiv D'$.

Nechť $A' \not\equiv B'$ a tedy i $C' \not\equiv D'$. Rozlišujme:

1. Přímky $A'B'$, $C'D'$ jsou různé. Pak také přímky AB, CD jsou různé a tedy $ABCD$ resp. $ABDC$ je rovnoběžník a podle (1) také $A'B'C'D'$ resp. $A'B'D'C'$ je rovnoběžník. Tedy úsečky $A'B'$, $C'D'$ jsou rovnoběžné a shodné.

2. Přímky $A'B'$, $C'D'$ jsou totožné. Pak vzhledem ke (3) existuje taková úsečka EF rovnoběžná a shodná s úsečkou AB (a tedy i s CD), že přímky $E'F'$ a $A'B' \equiv C'D'$ jsou různé. Podle dokázané části 1 jsou úsečky $A'B'$, $C'D'$ rovnoběžné a shodné s touž úsečkou $E'F'$ a tedy jsou i navzájem rovnoběžné a shodné.

Věta 3. *Je-li obrazem úsečky AB úsečka $A'B'$ a je-li S střed úsečky AB, potom je S' střed úsečky $A'B'$.*

Důkaz. Věta plyne přímo z definice středu úsečky a z věty 2.

Věta 4. *Jsou-li A, B, C tři různé body na jedné přímce, potom buď $A' \equiv B' \equiv C'$ nebo dělicí poměr $(A'B'C') = (ABC)$.*

Důkaz. Je-li $A' \equiv B'$, pak podle (2) je $A' \equiv B' \equiv C'$.

Nechť $A' \not\equiv B'$, takže podle (2) jsou A', B', C' tři různé body na jedné přímce. Označme úsečku $AB = u$ a úsečku $A'B' = u'$. Velikost libovolné úsečky XY při jednotkové úsečce u (resp. u') označujme $[\overline{XY}]_u$ (resp. $[\overline{XY}]_{u'}$). Protože dělicí poměr nezávisí na volbě jednotkové úsečky,[3] jest

$$(ABC) = \pm \frac{[\overline{AC}]_u}{[\overline{BC}]_u}, \quad (A'B'C') = \pm \frac{[\overline{A'C'}]_{u'}}{[\overline{B'C'}]_{u'}},$$

při čemž vzhledem ke (2) je u obou současně totéž znamení.

Jestliže $B\mu A, C$, pak podle (2) platí

$$(4) \qquad [\overline{AC}]_u = [\overline{AB}]_u + [\overline{BC}]_u, \quad [\overline{A'C'}]_{u'} = [\overline{A'B'}]_{u'} + [\overline{B'C'}]_{u'}.$$

---

[3]) Platí: $[\overline{XY}]_u = c . [\overline{XY}]_{u'}$, kde c je kladná konstanta.

Podobně pro $A\mu B$, C platí

$$(4') \qquad [\overline{BC}]_u = [\overline{AB}]_u + [\overline{AC}]_u \,, \quad [\overline{B'C'}]_{u'} = [\overline{A'B'}]_{u'} + [\overline{A'C'}]_{u'} \,,$$

a pro $C\mu A$, B platí

$$(4'') \qquad [\overline{AB}]_u = [\overline{AC}]_u + [\overline{BC}]_u \,, \quad [\overline{A'B'}]_{u'} = [\overline{A'C'}]_{u'} + [\overline{B'C'}]_{u'} \,.$$

Uvážíme-li ještě, že $[\overline{AB}]_u = 1$ a $[\overline{A'B'}]_{u'} = 1$, stačí dokázat rovnost $[\overline{AC}]_u = [\overline{A'C'}]_{u'}$, ze které podle (4) nebo (4') nebo (4'') plyne rovnost $[\overline{BC}]_u = [\overline{B'C'}]_{u'}$ a tedy i rovnost $(ABC) = (A'B'C')$.

Dokážeme nyní rovnost $[\overline{AC}]_u = [\overline{A'C'}]_{u'}$.

Položme $P_0 \equiv A$ a nanášejme na polopřímku AC postupně úsečku AB, tj. určeme body $P_1, P_2, P_3, \ldots$ polopřímky AC tak, aby vždy $P_i\mu P_{i-1}$, P_{i+1} a aby úsečka P_iP_{i+1} byla shodná s úsečkou AB $(i = 1, 2, \ldots)$. Podle Archimedova axiomu existuje takové celé číslo $k \geqq 0$, že C je bodem úsečky P_kP_{k+1}. Platí tedy

$$k = [\overline{AP_k}]_u \leqq [\overline{AC}]_u \leqq [\overline{AP_{k+1}}]_u = k + 1 \,.$$

Budiž S_1 střed úsečky P_kP_{k+1}. Položme $Q_1 \equiv P_k$, $R_1 \equiv S_1$ nebo $Q_1 \equiv S_1$, $R_1 \equiv P_{k+1}$ podle toho, zda C je bodem úsečky P_kS_1 nebo S_1P_{k+1}. Vždy tedy platí

$$k + \frac{k_1}{2} = [\overline{AQ_1}]_u \leqq [\overline{AC}]_u \leqq [\overline{AR_1}]_u = k + \frac{k_1 + 1}{2} \,,$$

kde k_1 je 0 nebo 1.

Budiž S_2 střed úsečky Q_1R_1. Položme $Q_2 \equiv Q_1$, $R_2 \equiv S_2$ nebo $Q_2 \equiv S_2$, $R_2 \equiv R_1$ podle toho, zda C je bodem úsečky Q_1S_2 nebo S_2R_1. Vždy tedy platí

$$k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} = [\overline{AQ_2}]_u \leqq [\overline{AC}]_u \leqq [\overline{AR_2}]_u = k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2 + 1}{2^2} \,,$$

kde k_2 je 0 nebo 1.

Postupujeme-li takto dále, dostáváme pro každé přirozené číslo n vztahy

$$(5) \qquad k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n}{2^n} \leqq [\overline{AC}]_u \leqq k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n + 1}{2^n} \,,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou 0 nebo 1.

Podle (2) a věty 3 však platí přesně totéž pro příslušné obrazy, takže současně

$$(6) \qquad k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n}{2^n} \leqq [\overline{A'C'}]_{u'} \leqq k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n + 1}{2^n} \,.$$

Posloupnost na levé straně v (5) a (6) i posloupnost na pravé straně v (5) a (6) je konvergentní a obě mají tutéž limitu, takže skutečně $[\overline{AC}]_u = [\overline{A'C'}]_{u'}$.[4])

---

[4]) Užíváme známé věty pro posloupnosti:

$$a_n \leqq c \leqq b_n \,, \quad \lim a_n = \lim b_n \Rightarrow \lim a_n = c \,.$$

Věta 5. *Je-li dán v prostoru čtyrstěn $ABCD$* (tj. čtyři body neležící v jedné rovině), *a jsou-li dány v rovině ϱ čtyři body A', B', C', D' neležící na jedné přímce, potom existuje právě jedno volné zobrazení prostoru do roviny ϱ, které bodům A, B, C, D přiřazuje body A', B', C', D'.*

Každé volné zobrazení lze složit z podobnosti a rovnoběžného promítání.[5])

Důkaz. I. Podobnost $\boldsymbol{P}$ a rovnoběžné promítání $\boldsymbol{R}$ do roviny ϱ splňují (1) až (3), takže podle definice je zobrazení složené z $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$ volným zobrazením prostoru do roviny ϱ. Existence zobrazení složeného z $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$, které bodům A, B, C, D přiřazuje body A', B', C', D', plyne ze zobecněné věty Pohlkovy.[6]) Obrazy při tomto zobrazení složeném z $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$ budeme označovat hvězdičkou. Tedy $A^* \equiv A'$, $B^* \equiv B'$, $C^* \equiv C'$, $D^* \equiv D'$.

Nechť také $\boldsymbol{V}$ je volné zobrazení prostoru do roviny ϱ, které bodům A, B, C, D přiřazuje body A', B', C', D'. Obrazy při tomto zobrazení $\boldsymbol{V}$ budeme označovat čárkou. Máme dokázat, že pro každý bod X prostoru je $X^* \equiv X'$. Rozlišujme:

1. X leží na některé z přímek AB, AC, AD, BC, BD, CD, např. na AB (obr. 1a). Protože $A^* \equiv A'$, $B^* \equiv B'$, stačí uvažovat $X \not\equiv A$, $X \not\equiv B$, takže podle věty 4 buď $A^* \equiv B^* \equiv X^*$ i $A' \equiv B' \equiv X'$ a tedy $X^* \equiv X'$ nebo $(ABX) = (A^*B^*X^*)$ i $(ABX) = (A'B'X')$ a tedy opět $X^* \equiv X'$.[7])

2. X leží v některé z rovin ABC, ABD, ACD, BCD, např. v ABC (obr. 1b). Bodem X veďme přímku p tak, aby protínala dvě z přímek AB, AC, BC ve dvou různých bodech $M \not\equiv N$. Podle dokázané části 1 je nejdříve $M^* \equiv M'$, $N^* \equiv N'$ a dále (když místo A, B dáme M, N) je $X^* \equiv X'$.

3. X je libovolný bod prostoru. Bodem X veďme přímku p tak, aby protínala dvě z rovin ABC, ABD, ACD, BCD ve dvou různých bodech $M \not\equiv N$ (obr. 1c). Podle dokázané části 2 je $M^* \equiv M'$, $N^* \equiv N'$ a podle části 1 opět $X^* \equiv X'$.

II. Budiž $\boldsymbol{V}$ volné zobrazení prostoru do roviny ϱ. Jsou-li body A, B, C ze (3) a je-li D libovolný bod prostoru mimo rovinu ABC, potom $\boldsymbol{V}$ přiřazuje bodům A, B, C, D čtyrstěnu $ABCD$ body A', B', C', D' neležící na jedné přímce, takže jak jsme v I dokázali, je $\boldsymbol{V}$ totožné se zobrazením složeným z $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$.

---

[5]) *Podobností* rozumíme takové zobrazení prostoru do prostoru, které každým dvěma různým bodům $X \not\equiv Y$ přiřazuje dva různé body $X^* \not\equiv Y^*$ tak, že $\overline{X^*Y^*} = k \,.\, \overline{XY}$, kde k je kladné číslo zvané koeficient podobnosti ($\overline{XY}$ a $\overline{X^*Y^*}$ značí velikost úsečky XY a X^*Y^* při pevně zvolené jednotkové úsečce). Je-li $k = 1$, pak se podobnost nazývá *shodností*.

Množinu bodů $\boldsymbol{U}'$ nazýváme podobnou resp. shodnou s množinou bodů $\boldsymbol{U}$, jestliže existuje podobnost resp. shodnost, při které $\boldsymbol{U}'$ je obrazem $\boldsymbol{U}$.

Rovnoběžným promítáním do roviny ϱ rozumíme takové zobrazení prostoru do roviny ϱ, které každému bodu X prostoru přiřazuje bod X^* roviny ϱ tak, že X a X^* leží na jedné přímce téhož směru. (Směr je množina všech navzájem rovnoběžných přímek prostoru.)

O rozložení singulárního afinního zobrazení na podobnost a paralelní projekci pojednává [5].

[6]) Viz dodatek.

[7]) Užíváme věty: $(KLY) = (KLZ) \Rightarrow Y \equiv Z$.

Poznámka 2. Důkaz věty 5 (viz část 1 až 3) nám udává i konstrukci obrazu X' libovolného bodu X při volném zobrazení **V**, které je určeno čtyrstěnem $ABCD$ a čtyřmi body A', B', C', D' roviny ϱ neležícími na jedné přímce jakožto obrazy bodů A, B, C, D.

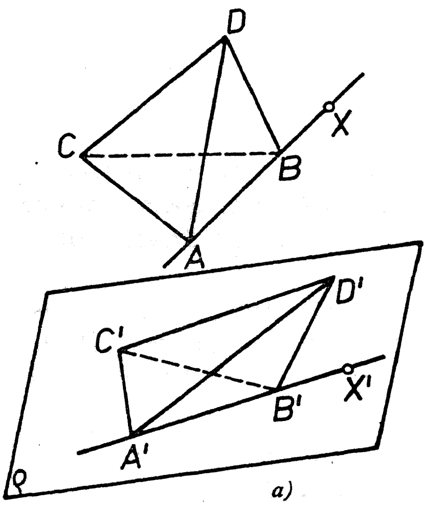
Poznámka 3. Z věty 5 plyne, že řada vlastností rovnoběžného promítání se přenáší na volné zobrazení, např. že je zobrazením na celou rovinu ϱ, že obrazem roviny je buď přímka nebo celá rovina ϱ, apod.

V dalším si všimneme některých zvláštních případů volného zobrazení.

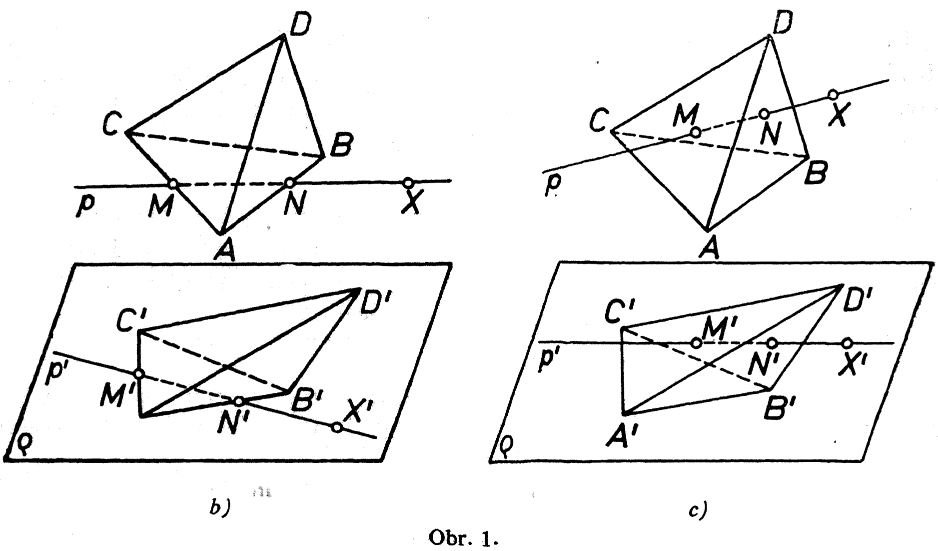
Věta 6. *Volné zobrazení lze složit ze shodnosti a rovnoběžného promítání právě když obrazem aspoň jednoho trojúhelníka ABC* (tj. tří bodů neležících na jedné přímce) *je trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný.*

Důkaz. 1. Nechť volné zobrazení je složeno ze shodnosti **S** a rovnoběžného promítání **R** do roviny ϱ. Zvolme v ϱ libovolný trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem jistého trojúhelníka ABC při shodnosti **S**. Pak zřejmě trojúhelník $A'B'C'$ je shodný s trojúhelníkem ABC a je jeho obrazem při zobrazení složeném z **S** a **R** (body A', B', C' jsou při **R** samodružné).

2. Nechť při volném zobrazení **V** prostoru do roviny ϱ je obrazem trojúhelníka ABC



a)



b) c)

Obr. 1.

trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný. Existuje tedy shodnost $\mathbf{S}$, která bodům A, B, C přiřazuje body A', B', C'. Zvolme bod D prostoru mimo rovinu ABC a budiž $\bar{D}$ jeho obraz při $\mathbf{S}$ a D' jeho obraz při $\mathbf{V}$. Je-li $\mathbf{R}$ rovnoběžné promítání do roviny ϱ, při kterém bod D' je obrazem bodu $\bar{D}$, pak podle věty 5 je $\mathbf{V}$ totožné se zobrazením složeným z $\mathbf{S}$ a $\mathbf{R}$.

Poznámka 4. Příkladem volného zobrazení z věty 6 je tzv. *volné rovnoběžné promítání* (viz [6]). Je to volné zobrazení, které lze složit z translace[8]) a rovnoběžného promítání.

Věta 7. *Volné zobrazení je rovnoběžným promítáním* (tj. zobrazením složeným z identity a rovnoběžného promítání) *právě když má aspoň tři samodružné body, které neleží na jedné přímce.*

Důkaz. 1. Rovnoběžné promítání do roviny ϱ je zřejmě volným zobrazením, které má dokonce každý bod roviny ϱ samodružným.

2. Nechť volné zobrazení $\mathbf{V}$ prostoru do roviny ϱ má tři samodružné body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Je tedy $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$. Zvolme bod D prostoru mimo rovinu ϱ a budiž D' jeho obraz při $\mathbf{V}$. Je-li $\mathbf{R}$ rovnoběžné promítání do roviny ϱ, při kterém bod D' je obrazem bodu D, pak podle věty 5 je $\mathbf{V}$ totožné se zobrazením $\mathbf{R}$.

2. Ukážeme možnost aplikace volného zobrazení v deskriptivní geometrii při řešení úloh incidenčních i metrických.[9]) Přitom se budeme opírat o následující větu:

Věta 8. *Při každém volném zobrazení existuje čtyrstěn $ABCD$, jehož obrazem je čtyrroh $A'B'C'D'$* (tj. čtyři body jedné roviny, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce) *a přitom je trojúhelník ABC podobný s trojúhelníkem $A'B'C'$.*

Důkaz. Podle věty 5 lze každé volné zobrazení $\mathbf{V}$ prostoru do roviny ϱ složit z podobnosti $\mathbf{P}$ a rovnoběžného promítání $\mathbf{R}$ do roviny ϱ. Zvolme v rovině ϱ čtyrroh $A'B'C'D'$. V prostoru zvolme bod $\bar{D} \notin \varrho$ tak, aby jeho obrazem při $\mathbf{R}$ byl bod D'. Protože body A', B', C' neleží na jedné přímce a bod $\bar{D} \notin \varrho$, máme čtyrstěn $A'B'C'\bar{D}$, který je obrazem jistého čtyrstěnu $ABCD$ při podobnosti $\mathbf{P}$. Je tedy trojúhelník ABC podobný s trojúhelníkem $A'B'C'$ a přitom je zřejmě čtyrroh $A'B'C'D'$ obrazem čtyrstěnu $ABCD$ při volném zobrazení $\mathbf{V}$ složeném z $\mathbf{P}$ a $\mathbf{R}$.

Při řešení incidenčních úloh ve volném zobrazení učiníme tyto dvě úmluvy:

Úmluva 1. Předpokládáme, že v rovině ϱ je dán čtyrroh $A'B'C'D'$ jakožto obraz jistého čtyrstěnu $ABCD$, který budeme nazývat *základním čtyrstěnem* a jeho roviny $\alpha \equiv BCD$, $\beta \equiv ACD$, $\gamma \equiv ABD$, $\delta \equiv ABC$ budeme nazývat *základními rovinami*.

Úmluva 2. a) Bod X, který leží v některé základní rovině určujeme jeho obrazem X'.

---

[8]) *Translace* je shodnost, při které každý bod X a jeho obraz X^* určují tentýž vektor $X^* - X$.

[9]) Obdobnou náplň mají [3], [4] resp. [7].

b) Bod X, který neleží v žádné základní rovině určujeme jako bod přímky MN takové, která má za obraz přímku $M'N'$ a kde body M, N leží v základních rovinách, tj. určujeme současně obrazy X' a $M' \not\equiv N'$.

c) Přímku určujeme buď dvěma různými body nebo jedním bodem a přímkou s ní rovnoběžnou (určenou dvěma různými body).

d) Rovinu určujeme buď třemi body neležícími na jedné přímce nebo přímkou a bodem mimo ni nebo dvěma různoběžkami nebo dvěma různými rovnoběžkami.

Úloha 1. Určete průsečík R dané přímky $a \equiv XY$ se základní rovinou $\delta \equiv ABC$ (pokud ovšem tento průsečík existuje).

Prostorové řešení. Zvolíme bod $Q \notin a, \delta$ tak, aby existovaly průměty $\bar{X}$, $\bar{Y}$ bodů X, Y z bodu Q do základní roviny δ. Hledaný průsečík R je pak průsečíkem přímek $a \equiv XY$ a $\bar{a} \equiv \bar{X}\bar{Y}$. (Přitom R existuje právě když přímky a a $\bar{a}$ jsou různoběžné.)

Řešení ve volném zobrazení. I. Nechť obrazem přímky $a \equiv XY$ je bod $a' \equiv X' \equiv Y'$. Potom zřejmě je a různoběžná s δ a obrazem jejich průsečíku R je bod $R' \equiv a' \equiv X' \equiv Y'$.

II. Nechť obrazem přímky $a \equiv XY$ je přímka $a' \equiv X'Y'$. Potom obraz R' hledaného průsečíku R určíme podle výše uvedeného prostorového řešení (místo vzorů dáme všude příslušné obrazy). Přitom volba bodu Q závisí ještě na daných obrazech X' a Y'. Zejména nutno volit Q tak, aby jeho obraz $Q' \notin a' \equiv X'Y'$. Zpravidla volíme $Q \equiv D$ nebo aspoň Q ležící na některé z přímek AD, BD, CD. Praktický postup ukážeme na příkladě:

Příklad 1. Obrazem přímky $a \equiv XY$ je přímka $a' \equiv XY'$, kde

a) body $X \in \alpha$, $Y \in \beta$ jsou dány svými obrazy X', Y' podle obr. 2a;

b) body $X \in MN$, $M \in \alpha$, $N \in \beta$, $Y \in \gamma$ jsou dány svými obrazy X', M', N', Y' podle obr. 2b;

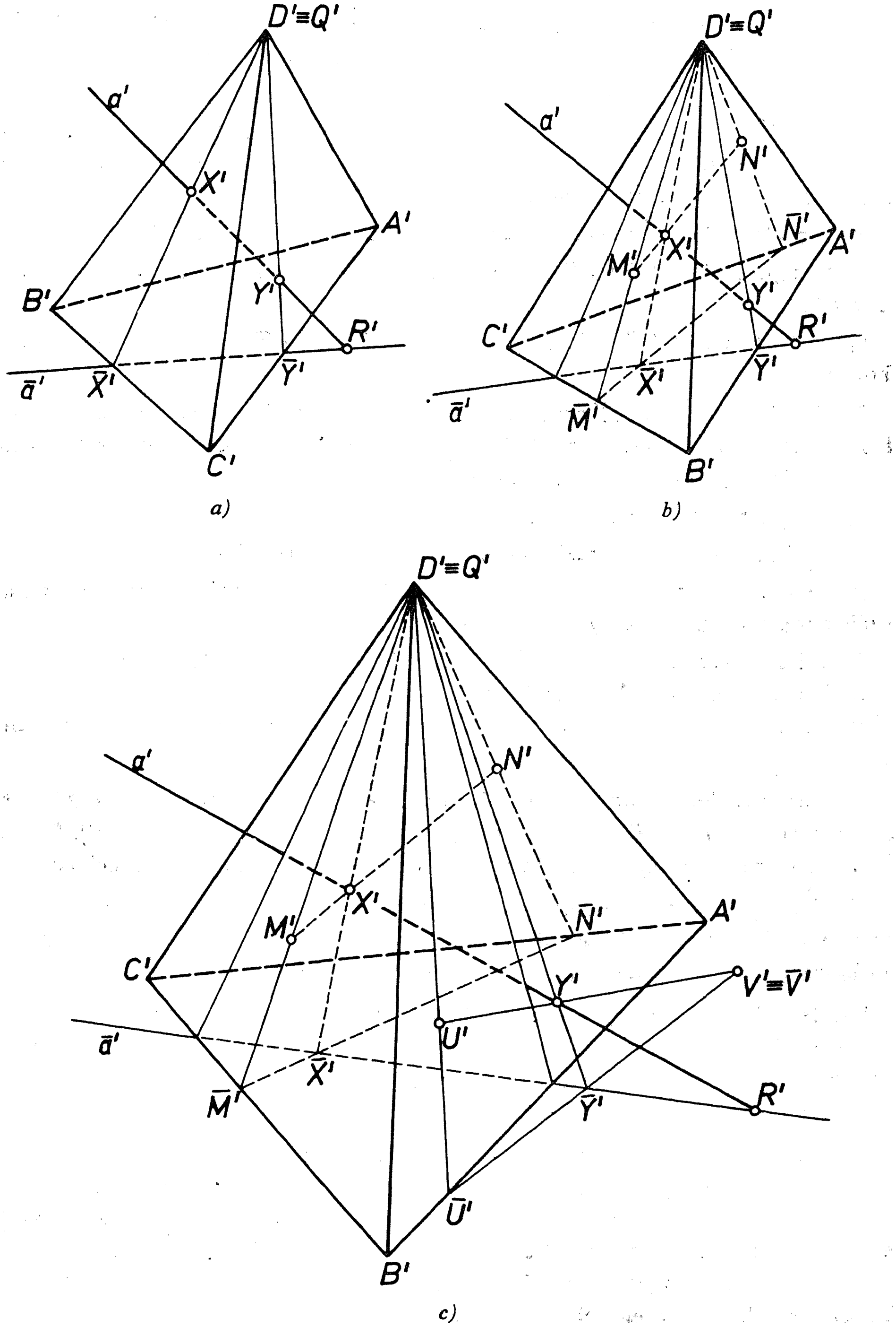
c) body $X \in MN$, $M \in \alpha$, $N \in \beta$, $Y \in UV$, $U \in \gamma$, $V \in \delta$ jsou dány svými obrazy X', M', N', Y', U', V' podle obr. 2c.

Určete obraz R' průsečíku $R \equiv a \,.\, \delta$ (pokud existuje).

Řešení ve volném zobrazení. Jedná se o výše uvedený případ II. Protože všude v obr. 2a, 2b, 2c bod $D' \notin a'$ (a tedy také $D \notin a$), volíme $Q \equiv D$. Další postup už je zřejmý z příslušných obr. 2a, 2b, 2c. (Průměty z bodu Q do základní roviny δ jsou značeny týmž písmenem s pruhem nahoře.) Vyjde nám, že obrazy a' a $\bar{a}'$ jsou různoběžné přímky, takže R existuje a jeho obraz je $R' \equiv a' \,.\, \bar{a}'$.

Doporučuji čtenáři, aby si sám promyslel postup pro další možná zadání obrazů X' a Y', zejména pokud se týká volby bodu Q.

Úloha 2. Určete vzájemnou polohu dané přímky $a \equiv XY$ a dané roviny $\tau \equiv EFG$, která není základní rovina.



a) b) c)

Obr. 2.

Prostorové řešení. Zvolíme bod $Q \notin a, \tau, \delta$ tak, aby existovaly průměty $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ daných bodů X, Y, E, F, G z bodu Q do základní roviny δ a aby existovala průsečnice r rovin τ a $\sigma \equiv (a, Q)$. Průsečnici r určíme takto:

1. Nechť přímka $\bar{a} \equiv \bar{X}\bar{Y}$ protíná dvě strany (přímky) trojúhelníka $\bar{E}\bar{F}\bar{G}$, např. $\bar{E}\bar{G}$ a $\bar{E}\bar{F}$ ve dvou různých bodech $\bar{S}$ a $\bar{T}$. Protože není $\tau \parallel \sigma$, nemůže být současně $Q\bar{S} \parallel EG$ i $Q\bar{T} \parallel EF$, takže jsou tři možnosti:

a) $S \equiv Q\bar{S} \,.\, EG$ a $T \equiv Q\bar{T} \,.\, EF$ (a ovšem $S \not\equiv T$). Potom $r \equiv ST$.

b) $S \equiv Q\bar{S} \,.\, EG$ a $Q\bar{T} \parallel EF$. Potom r prochází bodem S a je rovnoběžná s přímkou EF.

c) $Q\bar{S} \parallel EG$ a $T \equiv Q\bar{T} \,.\, EF$. Potom r prochází bodem T a je rovnoběžná s přímkou EG.

2. Nechť přímka $\bar{a} \equiv \bar{X}\bar{Y}$ prochází jedním vrcholem trojúhelníka $\bar{E}\bar{F}\bar{G}$ a je rovnoběžná s jeho protější stranou, např. $\bar{E} \in \bar{a} \parallel \bar{F}\bar{G}$. Pro přímku p jdoucí bodem Q rovnoběžně s přímkou $\bar{F}\bar{G}$ jsou pak dvě možnosti:

a) $P \equiv p \,.\, FG$. Potom $r \equiv EP$.

b) $p \parallel FG$. Potom r prochází bodem E a je rovnoběžná s FG.

Podle vzájemné polohy přímek a a r (obě leží v jedné rovině σ) potom určíme vzájemnou polohu přímky a a roviny τ.

Jsou-li a a r různoběžné, pak přímka a protíná rovinu τ v bodě $R \equiv a \,.\, r$.

Je-li $a \equiv r$, pak přímka a leží v rovině τ.

Jsou-li a a r dvě různé rovnoběžky, pak přímka a nemá s rovinou τ žádný společný bod.

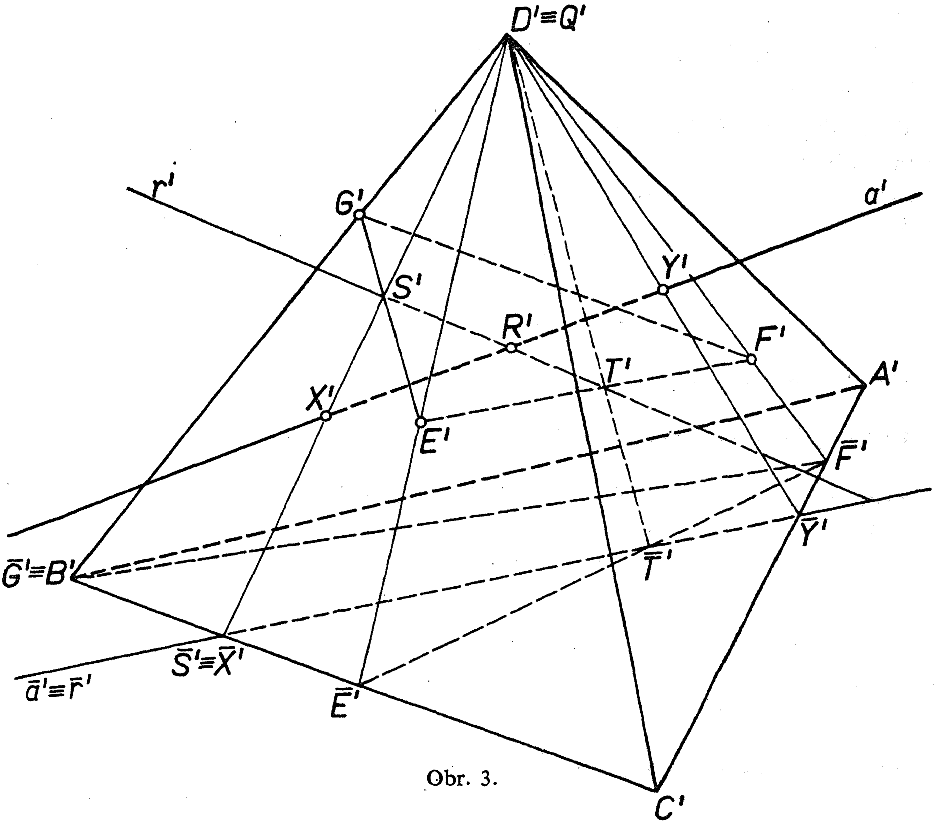
Řešení ve volném zobrazení. I. Nechť je obrazem přímky $a \equiv YX$ bod $a' \equiv X' \equiv Y'$ a obrazem roviny $\tau \equiv EFG$ přímka τ' (tj. E', F', G' leží na jedné přímce τ'). Potom buď a leží v τ nebo a nemá s τ žádný společný bod podle toho, zda $a' \in \tau'$ nebo $a' \notin \tau'$.

II. Nechť je obrazem přímky $a \equiv XY$ bod $a' \equiv X' \equiv Y'$ a obrazem roviny $\tau \equiv$ $\equiv EFG$ celá rovina ϱ (tj. E', F', G' neleží na jedné přímce). Potom je a různoběžná s τ a obrazem jejich průsečíku R je bod $R' \equiv a' \equiv X' \equiv Y'$.

III. Nechť je obrazem přímky $a \equiv XY$ přímka $a' \equiv X'Y'$ a obrazem roviny $\tau \equiv$ $\equiv EFG$ přímka τ'. Potom buď a leží v τ nebo a nemá s τ žádný společný bod nebo a protíná τ v bodě R podle toho, zda $a' \equiv \tau'$ nebo $a' \parallel \tau'$, $a' \not\equiv \tau'$ nebo zda a' protíná τ' v bodě R', který je pak obrazem bodu R.

IV. Nechť je obrazem přímky $a \equiv XY$ přímka $a' \equiv X'Y'$ a obrazem roviny $\tau \equiv$ $\equiv EFG$ celá rovina ϱ. Potom určíme vzájemnou polohu přímky a a roviny τ podle výše uvedeného prostorového řešení (místo vzorů dáme všude příslušné obrazy). Přitom volba bodu Q závisí ještě na daných obrazech X', Y', E', F', G'. Zejména nutno volit Q tak, aby jeho obraz Q' neležel na žádné z přímek $X'Y'$, $E'F'$, $E'G'$, $F'G'$. Zpravidla volíme $Q \equiv D$ nebo aspoň Q ležící na některé z přímek AD, BD, CD. Praktický postup ukážeme na příkladě:

Příklad 2. Obrazem přímky $a \equiv XY$ je přímka $a' \equiv X'Y'$ a obrazem roviny $\tau \equiv EFG$ (která není základní rovina) je celá rovina ϱ. Body $X \in \alpha$, $Y \in \beta$, $E \in \alpha$, $F \in \beta$, $G \in BD$ jsou dány svými obrazy X', Y', E', F', G' podle obr. 3. Určete vzájemnou polohu přímky a a roviny τ.



Obr. 3.

Řešení ve volném zobrazení. Jedná se o výše uvedený případ IV. Protože v obr. 3 bod D' neleží na žádné z přímek $X'Y'$, $E'F'$, $E'G'$, $F'G'$, volíme $Q \equiv D$. Další postup už je zřejmý z obr. 3. (Průměty z bodu Q do základní roviny δ jsou značeny týmž písmenem s pruhem nahoře.) Vyjde nám, že obrazy a' a r' jsou různoběžné přímky, takže přímka a protíná rovinu τ v bodě R, jehož obrazem je bod $R' \equiv a' \,.\, r'$.

Přenechávám čtenáři, aby si sám promyslel postup pro další možná zadání obrazů X', Y', E', F', G', zejména pokud se týká volby bodu Q.

Při řešení metrických úloh ve volném zobrazení činíme kromě úmluvy 1 a 2 ještě další dvě úmluvy:

Úmluva 3. Předpokládáme (viz větu 8), že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný s trojúhelníkem ABC, a že je dán koeficient k této podobnosti $\boldsymbol{P}$ (jež bodům A, B, C přiřazuje body A', B', C').

Snadno se pak zjistí, že obraz X' kteréhokoliv bodu X základní roviny $\delta \equiv ABC$ při volném zobrazení je současně jeho obrazem i při podobnosti **P**.

Úmluva 4. Předpokládáme, že je dán v rovině ϱ bod D'_1 jakožto obraz pravoúhlého průmětu D_1 bodu D do základní roviny δ, a dále že je dána velikost z_D úsečky DD_1.

Řešení metrických úloh ve volném zobrazení převedeme na řešení těchto úloh v kótovaném promítání takto:

Pravoúhlý průmět bodu X prostoru do základní roviny δ budeme označovat X_1. Kóta z_X bodu X vzhledem k základní rovině δ je reálné číslo, které pro body X ležící v základní rovině δ je rovno nule, pro body X mimo základní rovinu δ je rovno $\pm\overline{XX_1}$ podle toho, zda X leží uvnitř poloprostoru (δ, D) nebo uvnitř poloprostoru k němu opačného. Protože obraz X'_1 bodu X_1 základní roviny δ při volném zobrazení je současně i jeho obrazem při podobnosti **P**, považujeme bod X'_1 za pravoúhlý průmět bodu X a za jeho kótu považujeme reálné číslo $\overline{z_X} = k \, . \, z_X$.[10])

Na ukázku uvedeme:

Úloha 3. Daným bodem E veďte přímku t kolmou k základní rovině $\alpha \equiv BCD$.

Prostorové řešení. 1. Nechť $E \notin \alpha$. Bodem E_1 veďme v základní rovině δ přímku $t_1 \perp BC$ a jejich průsečík označme S. Bodem S veďme v základní rovině α přímku $s \perp BC$. Konečně v rovině $\tau \equiv (s, E)$ veďme bodem E přímku $t \perp s$, která je hledanou kolmici t k základní rovině α.

2. Nechť $E \in \alpha$ nebo $E \notin \alpha$. Zvolme bod $F \notin \alpha$ a podle předchozího bodem F veďme přímku f kolmou k základní rovině α. Hledaná kolmice t je pak přímka t jdoucí bodem E rovnoběžně s přímkou f.

Řešení ve volném zobrazení provedeme podle výše uvedeného prostorového řešení (místo vzorů dáme všude příslušné obrazy) užitím dříve popsaného kótovaného promítání takto:

I. Jestliže bod $E \notin \alpha$ má obraz $E' \notin D'D'_1$ nebo $E' \not\equiv D' \equiv D'_1$, potom postupujeme podle 1.

II. Jestliže bod $E \notin \alpha$ má obraz $E' \in D'D'_1$ nebo $E' \equiv D' \equiv D'_1$, potom volíme takový bod $F \notin \alpha$, že jeho obraz $F' \notin D'D'_1$ nebo $F' \not\equiv D' \equiv D'_1$ a postupujeme podle 2.

III. Jestliže bod $E \in \alpha$, potom volíme takový bod $F \notin \alpha$, že jeho obraz $F' \notin D'D'_1$ nebo $F' \not\equiv D' \equiv D'_1$ a postupujeme podle 2.

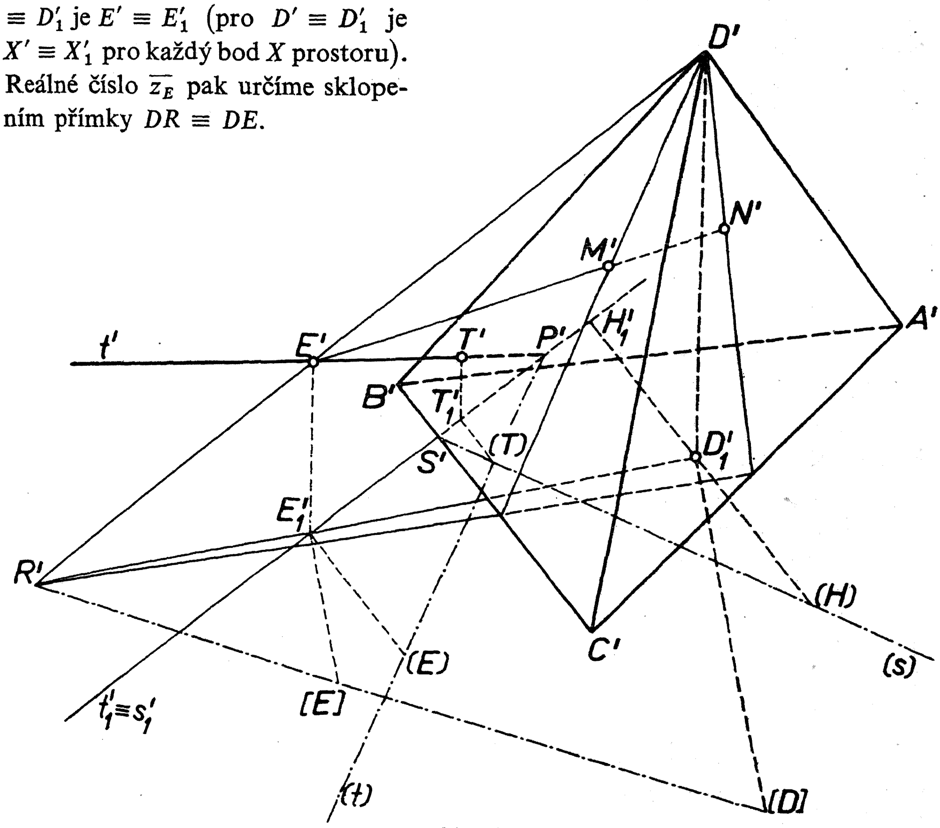
Určení obrazu E'_1 a reálného čísla $\overline{z_E}$ stačí zřejmě popsat pouze pro případ I.

---

[10]) Bod X'_1 a reálné číslo $\overline{z_X}$ jsou pravoúhlý průmět a kóta bodu $\overline{X}$, který je obrazem bodu X při podobnosti **P** (neboli názorně řečeno: X'_1 a $\overline{z_X}$ jsou pravoúhlý průmět a kóta bodu X zmenšené resp. zvětšené v měřítku k).

Nechť tedy bod $E \notin \alpha$ má obraz $E' \notin D'D'_1$ nebo $E' \not\equiv D' \equiv D'_1$. Jsou pak dvě možnosti:

a) Přímka DE protíná základní rovinu δ v bodě R, jehož obraz R' určíme podle úlohy 1. (Zřejmě $R' \notin D'D'_1$ nebo $R' \not\equiv D' \equiv D'_1$.) Potom buď pro $D' \not\equiv D'_1$ je E'_1 průsečíkem přímky $R'D'_1$ s přímkou jdoucí bodem E' rovnoběžně s $D'D'_1$, nebo pro $D' \equiv$ $\equiv D'_1$ je $E' \equiv E'_1$ (pro $D' \equiv D'_1$ je $X' \equiv X'_1$ pro každý bod X prostoru). Reálné číslo $\overline{z_E}$ pak určíme sklopením přímky $DR \equiv DE$.



Obr. 4.

b) Přímka DE neprotíná základní rovinu δ. Potom místo bodu D užijeme takového bodu $G \in DD_1$ o kótě $z_G = 2z_D, 3z_D, \ldots$ (a tedy $G'_1 \equiv D'_1$ a $\overline{z_G} = 2\overline{z_D}, 3\overline{z_D}, \ldots$), že přímka GE protíná základní rovinu δ v bodě R a postupujeme dále podle a).

Praktický postup ukážeme na příkladě:

Příklad 3. Bod $E \in MN$, $E \notin \alpha$, $M \in \alpha$, $N \in \beta$ je dán obrazy E', M', N' podle obr. 4. Bodem E veďte přímku t kolmou k základní rovině α (k, z_D a $D'_1 \not\equiv D'$ jsou dány a přitom $E' \notin D'D'_1$).

Řešení ve volném zobrazení. Jedná se o výše uvedený případ I.

Nejdříve podle úlohy 1 zjistíme existenci a obraz R' průsečíku R přímky DE se základní rovinou δ a dále podle a) určíme E'_1 jakožto průsečík přímky $R'D'_1$ s přímkou jdoucí bodem E' rovnoběžně s $D'D'_1$. Reálné číslo $\overline{z_E}$ určíme sklopením přímky $DR \equiv DE$. Sklopený bod $[D]$ určíme tak, že $D'_1[D] \perp D'_1R'$ a velikost úsečky $D'_1[D]$ je rovná součinu $\overline{z_D} = k \cdot z_D > 0$. Sklopený bod $[E]$ je průsečíkem sklopené přímky $[D]R'$ s kolmicí k přímce D'_1R' vedené bodem E'_1 a absolutní hodnota $|\overline{z_E}|$ je rovná velikosti úsečky $E'_1[E]$. Protože $\overline{z_D} > 0$ a $[E]$ leží uvnitř polopřímky $R'[D]$, je také $\overline{z_E} > 0$.

Nyní už známým způsobem v dříve popsaném kótovaném promítání určíme nejdříve t'_1, tj. $E'_1 \in t'_1 \perp B'C'$, a potom určíme sklopenou (s), tj. $(s) \equiv S'(H)$, kde $S' \equiv B'C' \cdot t'_1$ a H je takový bod přímky s, pro který $\overline{z_H} = \overline{z_D}$, takže H'_1 je průsečík přímky $s'_1 \equiv t'_1$ s přímkou vedenou bodem D'_1 rovnoběžně s $B'C'$ (je totiž $H \in s \subset \alpha$ a $z_H = z_D$, takže H leží na přímce vedené bodem D rovnoběžně s BC). Sklopená (t) pak prochází sklopeným (E) a je kolmá ke sklopené (s). Další bod $T \not\equiv E$ hledané přímky t dostaneme tak, že si zvolíme $(T) \in (t)$, $(T) \not\equiv (E)$ a určíme T'_1 jako průsečík přímky t'_1 s přímkou k ní kolmou a vedenou (T) (v obr. 4 zvolen $(T) \equiv (t) \cdot (s)$, takže je $T \equiv t \cdot \alpha$).

Obraz T' určíme pomocí přímky ET, která protíná základní rovinu δ v bodě P, jehož obraz P' je průsečík přímek $(E)(T)$ a t'_1. Podle (1) je pak T' průsečíkem přímky $E'P'$ s přímkou vedenou bodem T'_1 rovnoběžně s $D'D'_1$. Obraz t' hledané přímky t je pak určen obrazy E' a T'.

Jestliže při jiném zadání nelze k určení obrazu T' užít bodu E (tj. buď $P \equiv E$ nebo P neexistuje), užijeme místo bodu E jiného vhodného bodu L roviny $\tau \equiv (s, E)$, jehož obraz L' známe.

Takový bod L dostaneme např. tak, že na rovnoběžce s t'_1 vedené bodem (H) zvolíme bod (L) tak, aby $(L) \not\equiv (T)$ a aby přímka $(L)(T)$ nebyla kolmá k t'_1 a protínala ji v bodě P', a určíme L'_1 jako průsečík přímky t'_1 s přímkou k ní kolmou a vedenou bodem (L).

Protože je $\overline{z_L} = \overline{z_H} = \overline{z_D}$, platí i pro kóty $z_L = z_D$, takže buď je $L_1 \equiv D_1$ a $L \equiv D$, nebo je L_1D_1DL obdélník, takže podle (1) buď je $L'_1 \equiv D'_1$ a $L' \equiv D'$, nebo je $L'_1D'_1D'L'$ rovnoběžník. Známe tedy skutečně obraz L'.

Závěrem poznamenávám, že řešení incidenčních i metrických úloh ve volném zobrazení se provádí obdobným způsobem jako v jiných druzích zobrazování běžných v deskriptivní geometrii tzv. *metodou dvou zobrazení*. Užíváme totiž současně pomocného zobrazení do některé základní roviny: u incidenčních úloh promítání z jistého bodu Q a u metrických úloh pravoúhlého promítání.

DODATEK

Zobecněná věta Pohlkova. *Dané čtyři body A', B', C', D' jedné roviny ϱ, které neleží na jedné přímce, lze vždy pokládat za rovnoběžný průmět čtyrstěnu podobného s daným čtyrstěnem $ABCD$.*

Důkaz zobecněné věty Pohlkovy je vlastně důkazem existence volného zobrazení splňujícího větu 5 a obráceně.

Pro případ, že body A', B', C', D' tvoří čtyrroh, je důkaz uveden v [8], čl. 156, str. 297—299.

Zbývá už jen doplnit důkaz pro případ, že body A', B', C', D' netvoří čtyrroh. Užijeme přitom následující pomocné věty (viz [8], čl. 98, str. 164–165):

Pomocná věta. Buď dán trojúhelník $A'B'C'$ a trojúhelník $A_1^*B_1^*C_1^*$. Potom existuje takový trojúhelník $A^*B^*C_1^*$ podobný s trojúhelníkem $A'B'C'$, že body A_1^*, B_1^* jsou pravoúhlé průměty bodů A^*, B^* do roviny $\pi \equiv A_1^*B_1^*C_1^*$.

Protože body A', B', C', D' netvoří čtyrroh, a přitom neleží na jedné přímce, jsou dvě možnosti:

a) Dva z bodů A', B', C', D' jsou totožné, např. $D' \equiv C'$. Bodem C veďme rovinu π kolmou k přímce DC a označme A_1^*, B_1^*, $C_1^* \equiv C$ pravoúhlé průměty bodů A, B, C do roviny π. Podle pomocné věty existuje podobnost $\mathbf{P}$, při které body A', B', C' jsou obrazy bodů takového trojúhelníka A^*B^*C, jehož pravoúhlým průmětem do roviny π jsou právě body A_1^*, B_1^*, C. Je tedy: $A, A^* \in a$, $B, B^* \in b$, $a \parallel b \parallel DC \perp \pi$, takže pro příslušné obrazy při podobnosti $\mathbf{P}$ platí: $\bar{A}, A' \in \bar{a}$, $\bar{B}, B' \in \bar{b}$, $\bar{a} \parallel \bar{b} \parallel \bar{D}C'$, a přitom je $\bar{D}C'$ různoběžná s $\varrho \equiv A'B'C'$ (neboť DC je různoběžná s rovinou A^*B^*C). Označíme-li $\mathbf{R}$ rovnoběžné promítání do ϱ ve směru $\bar{D}C'$, pak skutečně při $\mathbf{R}$ jsou body A', B', $C' \equiv D'$ obrazy bodů čtyrstěnu $\bar{A}\bar{B}C'\bar{D}$ (který je obrazem daného čtyrstěnu $ABCD$ při $\mathbf{P}$).

b) Body A', B', C', D' jsou navzájem různé, ale tři z nich leží na jedné přímce, např. A', B', D'. Na přímce AB určeme bod H tak, aby dělicí poměr $(ABH) = (A'B'D')$. Bodem C veďme rovinu π kolmou k přímce DH a označme A_1^*, B_1^*, $C_1^* \equiv C$ pravoúhlé průměty bodů A, B, C do roviny π. Budiž $\mathbf{P}$ podobnost z části a). Je tedy: $A, A^* \in a$, $B, B^* \in b$, $a \parallel b \parallel DH \perp \pi$, takže pro příslušné obrazy při podobnosti $\mathbf{P}$ platí: $\bar{A}, A' \in \bar{a}$, $\bar{B}, B' \in \bar{b}$, $\bar{a} \parallel \bar{b} \parallel \bar{D}\bar{H}$, $(\bar{A}\bar{B}\bar{H}) = (ABH)$, a přitom je $\bar{D}\bar{H}$ různoběžná s $\varrho \equiv A'B'C'$ (neboť DH je různoběžná s rovinou A^*B^*C). Označme $\mathbf{R}$ rovnoběžné promítání do ϱ ve směru $\bar{D}\bar{H}$, takže při $\mathbf{R}$ je průsečík $H' \equiv \bar{D}\bar{H} \,.\, \varrho$ společným obrazem bodů $\bar{D}$, $\bar{H}$ a body A', B' jsou obrazy bodů $\bar{A}$, $\bar{B}$ a tedy $(A'B'H') = (\bar{A}\bar{B}\bar{H})$. Platí tedy $(A'B'H') = (A'B'D')$, takže $H' \equiv D'$ a tedy skutečně při $\mathbf{R}$ jsou A', B', C', D' obrazy bodů čtyrstěnu $\bar{A}\bar{B}C'\bar{D}$ (který je obrazem daného čtyrstěnu $ABCD$ při $\mathbf{P}$).

Literatura

[1] *E. Čech*: Základy analytické geometrie I. Praha 1951.

[2] *Н. Ф. Четверухин:* Проективная геометрия. Москва 1953.

[3] *Н. Ф. Четверухин:* Стереометрические задачи на проекционном чертеже. Москва 1955.

[4] *Н. Ф. Четверухин:* Изображения фигур в курсе геометрии. Москва 1958.

[5] *V. Havel*: O rozkladu singulárních lineárních transformací. Časopis pro pěstování matematiky, *85* (1960), č. 4, 439–447.

[6] *J. Holubář*: Theoretický základ volného rovnoběžného promítání. Matematika ve škole, roč. *V* (1955), č. 4, 202–212.

[7] *M. Jeger*: Das axonometrische Prinzip im Lichte moderner Begriffsbildungen. Elemente der Mathematik, *13* (1958), č. 1, 1–12.

[8] *F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský*: Deskriptivní geometrie I. Praha 1950.

[9] *G. Pickert*: Analytische Geometrie. Leipzig 1953.

Резюме

О СВОБОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВА В ПЛОСКОСТЬ

ЙОСЕФ КАТЕРЖИНЯК (Josef Kateřiňák), Жилина

В работе определено одно отображение трехмерного эвклидова пространства в плоскость, которое автор назвал *свободным отображением*. Это такое отображение, которое выполняет следующие три аксиомы:

(1) *Образом двух паралельных прямых являются либо две паралельные прямые либо две точки (различные или тождественные).*

(2) *Если точка B лежит между точками A* и C (это обозначено $B\mu A, C$), *то для их образов выполняется либо $A' \equiv B' \equiv C'$ либо $B'\mu A', C'$.*

(3) *Образом хотя бы одной тройки точек A, B, C являются три точки A', B', C', нележащие на одной прямой.*

Основной теоремой является:

Теорема 5. *Пусть даны в пространстве четыре точки A, B, C, D, нележащие в одной плоскости. Пусть даны в плоскости ϱ четыре точки A', B', C', D', нележащие на одной прямой. Тогда существует точно одно свободное отображение пространства в плоскость ϱ, при котором точки A', B', C', D' являются образом точек A, B, C, D.*

Каждое свободное отображение можно сложить из подобия и паралельного проектирования.

Наконец, в работе указана возможность приложений свободного отображения в начертательной геометрии для решения инцидентных и метрических задач.

Zusammenfassung

ÜBER DIE FREIABBILDUNG DES RAUMES IN DIE EBENE

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina

In der Arbeit ist eine Abbildung des dreidimensionalen eukleidischen Raumes in die Ebene definiert, welche der Verfasser als die *Freiabbildung* benannt hatte. Es handelt sich um solche Abbildung, welche die folgenden drei Axiome erfüllt:

(1) *Die Abbilder zweier parallelen Geraden sind entweder zwei parallele Geraden oder zwei Punkte (verschiedene oder identische).*

(2) *Wenn der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt (was mit $B\mu A, C$ bezeichnet wird), dann gilt für ihre Abbilder entweder $A' \equiv B' \equiv C'$ oder $B'\mu A', C'$.*

(3) *Die Abbilder wenigstens eines der Dreipunkte A, B, C sind drei Punkte A', B', C', welche nicht auf einer Gerade liegen.*

Der grundlegende Satz lautet:

Satz 5. *Es seien im Raume vier Punkte A, B, C, D gegeben, welche nicht in einer Ebene liegen. Es seien in der Ebene ϱ vier Punkte A', B', C', D' gegeben, welche nicht auf einer Gerade liegen. Dann existiert nur eine Freiabbildung des Raumes in die Ebene ϱ, welche die Punkte A', B', C', D' den Punkten A, B, C, D zuordnet.*

Jede Freiabbildung kann aus der Ähnlichkeit und der parallelen Projektion zusammengesetzt werden.

Zum Schluss der Arbeit ist gezeigt, dass die Freiabbildung in der darstellenden Geometrie bei der Lösung der inzidenten und metrischen Aufgaben abgewendet werden kann.