Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

RŮZNÉ

CELOČÍSELNÉ ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH DIOFANTSKÝCH ROVNIC

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo, SSSR

Uvádím zde dvě věty, z nichž plyne, že jisté diofantské rovnice mají nekonečně mnoho řešení. Důkazy těchto vět jsou snadné, takže je mohu přenechat čtenáři.

Věta 1. *Buď k celé, n přirozené; nechť* $\alpha^2 = -k$ *(α může být komplexní). Buďte r, s celá; položme*

$$x = \frac{(r + \alpha s)^n + (r - \alpha s)^n}{2}, \quad y = \frac{(r + \alpha s)^n - (r - \alpha s)^n}{2\alpha}, \quad z = r^2 + ks^2 .$$

Potom jsou x, y, z celá a je $x^2 + ky^2 = z^n$.

Věta 2. *Buďte n, r nesoudělná přirozená čísla; buďte a, b celá čísla. Nechť* $mn + 1 = qr$ *(m, q celá* $\geqq 0$*). Zvolme libovolně celá* x_0, y_0 *a položme*

$$z_0 = ax_0^n + by_0^n, \quad x_1 = x_0 z_0^m, \quad y_1 = y_0 z_0^m, \quad z_1 = z_0^q .$$

Potom $ax_1^n + by_1^n = z_1^r$.

Buď dále k přirozené číslo; položme

$$x = x_1 z_1^k, \quad y = y_1 z_1^k, \quad z = z_1 .$$

Potom $ax^n + by^n = z^{kn+r}$.

MNOHOČLENY, NABÝVAJÍCÍ MNOHA PRVOČÍSELNÝCH HODNOT

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo, SSSR

Je známo jen 6 kvadratických trojčlenů $x^2 + x + p$ (kde p je prvočíslo), které pro $x = 0, 1, 2, \ldots, p - 2$ nabývají prvočíselných hodnot; jsou to trojčleny pro $p = 2, 3, 5, 11, 17, 41$. Existují však též kvadratické dvojčleny tvaru $ax^2 + p$, které mají výše uvedenou vlastnost. Už L. EULER znal případ $2x^2 + 29$, kde pro $x = 0, 1, 2, \ldots, 28$ dostáváme vesměs prvočísla. Nalezl jsem ještě několik takových případů, např.

$$6x^2 + 7, \quad 2x^2 + 11, \quad 6x^2 + 13, \quad 6x^2 + 17 .$$

Existují rovněž trojčleny tvaru $ax^2 + ax + p$, jež pro $x = 0, 1, 2, \ldots, p - 2$ dávají prvočísla. Některé z nich našla M. NOVÁKOVÁ;*) já jsem nalezl ještě případy:

$$6x^2 + 6x + 31\,, \quad 7x^2 + 7x + 17\,, \quad 3x^2 + 3x + 23\,.$$

Také trojčlen $7x^2 + 3x + 7$ dává různá prvočísla, dosazujeme-li $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6$.

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Nech $m > n > 1$ sú ľubovoľné dve prírodzené čísla a nech $A = \{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ je množina všetkých koreňov rovnice $x^n = 1$. Nech M je ľubovoľná taká množina s n prvkami, ktorá má tieto dve vlastnosti:

$$M \subset \{1, 2, \ldots, m - 1\}\,, \tag{1}$$

$$\sum_{x \in M} x \equiv 0 \pmod{m}\,. \tag{2}$$

Rozhodníte, či vždy existuje také prosté zobrazenie φ množiny A na množinu M, že pre všetky $r = 1, 2, \ldots, n$ a pre každé prírodzené $s < n$ platí:

$$\sum_{k=r}^{r+s-1} \varphi(\alpha^k) \not\equiv 0 \pmod{m}\,.$$

Anton Kotzig, Bratislava

*) Viz JAN MAŘÍK: O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot. Časopis pro pěstování matematiky *78* (1953), 53–58.