

Vasilij Antonovič Golubev

Mnohočleny, nabývající mnoha prvočíselných hodnot

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 362--363

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117501>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

R Ů Z N Ě

CELOČÍSELNÉ ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH DIOFANTSKÝCH ROVNIC

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo, SSSR

Uvádím zde dvě věty, z nichž plyne, že jisté diofantické rovnice mají nekonečně mnoho řešení. Důkazy těchto vět jsou snadné, takže je mohu přenechat čtenáři.

Věta 1. *Buď k celé, n přirozené; nechť $\alpha^2 = -k$ (α může být komplexní). Buďte r, s celá; položme*

$$x = \frac{(r + \alpha s)^n + (r - \alpha s)^n}{2}, \quad y = \frac{(r + \alpha s)^n - (r - \alpha s)^n}{2\alpha}, \quad z = r^2 + ks^2.$$

Potom jsou x, y, z celá a je $x^2 + ky^2 = z^n$.

Věta 2. *Buďte n, r nesoudělná přirozená čísla; buďte a, b celá čísla. Nechť $mn + 1 = qr$ (m, q celá ≥ 0). Zvolme libovolně celá x_0, y_0 a položme*

$$z_0 = ax_0^n + by_0^n, \quad x_1 = x_0 z_0^m, \quad y_1 = y_0 z_0^m, \quad z_1 = z_0^q.$$

Potom $ax_1^n + by_1^n = z_1^r$.

Buď dále k přirozené číslo; položme

$$x = x_1 z_1^k, \quad y = y_1 z_1^k, \quad z = z_1.$$

Potom $ax^n + by^n = z^{kn+r}$.

MNOHOČLENY, NABÝVAJÍCÍ MNOHA PRVOČÍSELNÝCH HODNOT

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo, SSSR

Je známo jen 6 kvadratických trojčlenů $x^2 + x + p$ (kde p je prvočíslo), které pro $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ nabývají prvočíselných hodnot; jsou to trojčleny pro $p = 2, 3, 5, 11, 17, 41$. Existují však též kvadratické dvojčleny tvaru $ax^2 + p$, které mají výše uvedenou vlastnost. Už L. EULER znal případ $2x^2 + 29$, kde pro $x = 0, 1, 2, \dots, 28$ dostáváme vesměs prvočísla. Nalezl jsem ještě několik takových případů, např.

$$6x^2 + 7, \quad 2x^2 + 11, \quad 6x^2 + 13, \quad 6x^2 + 17.$$

Existují rovněž trojčleny tvaru $ax^2 + ax + p$, jež pro $x = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ dávají prvočísla. Některé z nich našla M. NOVÁKOVÁ;*) já jsem našel ještě případy:

$$6x^2 + 6x + 31, \quad 7x^2 + 7x + 17, \quad 3x^2 + 3x + 23.$$

Také trojčlen $7x^2 + 3x + 7$ dává různá prvočísla, dosazujeme-li $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$.

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Nech $m > n > 1$ sú ľubovoľné dve prirodzené čísla a nech $A = \{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\}$ je množina všetkých koreňov rovnice $x^n = 1$. Nech M je ľubovoľná taká množina s n prvkami, ktorá má tieto dve vlastnosti:

$$(1) \quad M \subset \{1, 2, \dots, m - 1\},$$

$$(2) \quad \sum_{x \in M} x \equiv 0 \pmod{m}.$$

Rozhodnite, či vždy existuje také prosté zobrazenie φ množiny A na množinu M , že pre všetky $r = 1, 2, \dots, n$ a pre každé prirodzené $s < n$ platí:

$$\sum_{k=r}^{r+s-1} \varphi(\alpha^k) \not\equiv 0 \pmod{m}.$$

Anton Kotzig, Bratislava

*) Viz JAN MAŘÍK: O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot. Časopis pro pěstování matematiky 78 (1953), 53–58.